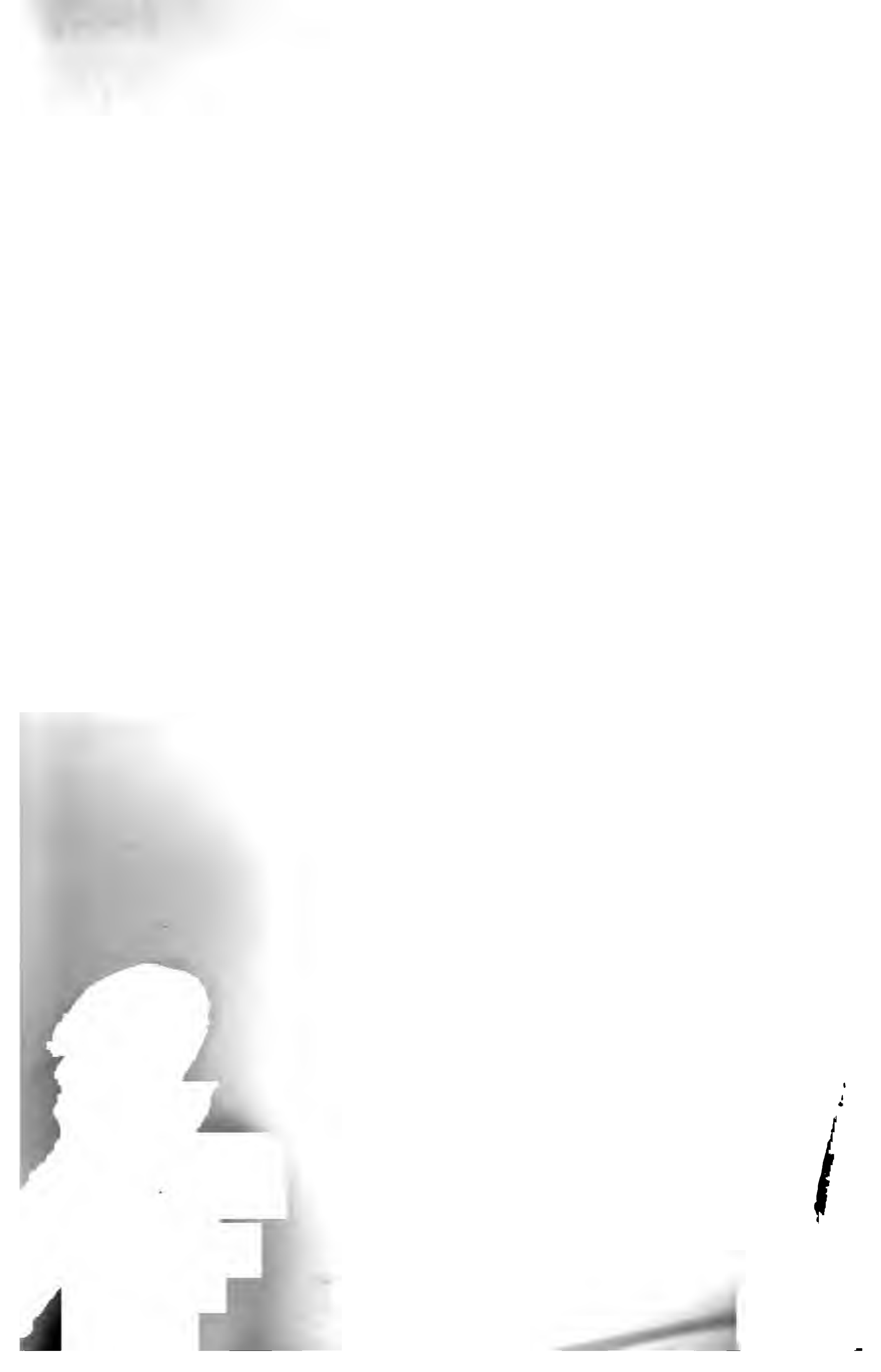








Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

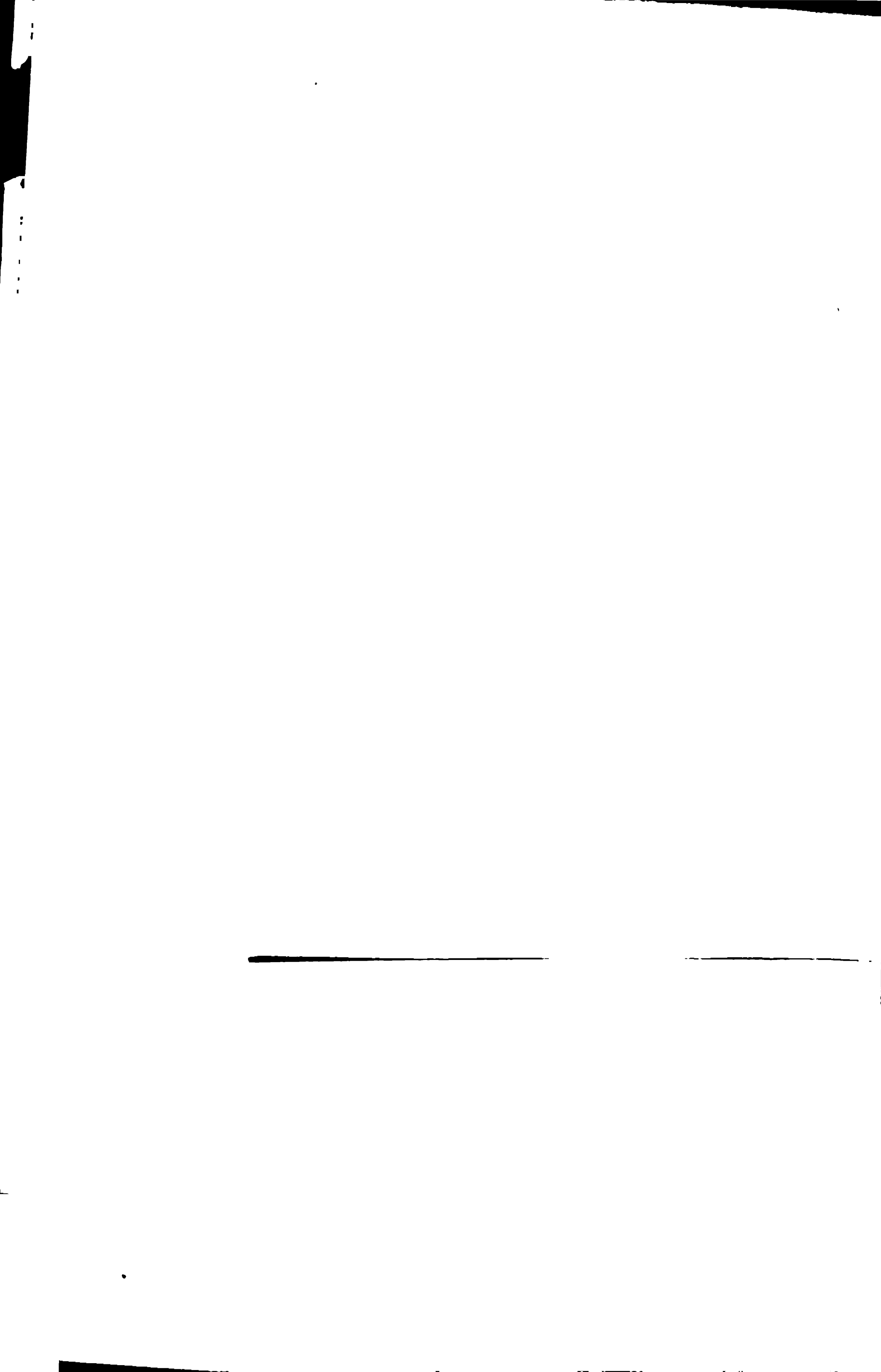
zu Göttingen.



Aus dem Jahre 1884.

Nro. 1—13.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1884.



Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

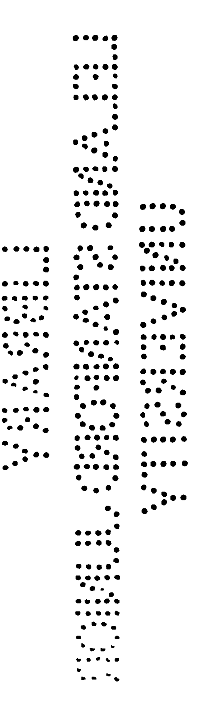


Aus dem Jahre 1884.

Nro. 1—13.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1884.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.



Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1884.

Andrews, Thomas, Wahl zum Correspondenten. 516.
Aronhold, Siegfried, gestorben zu Berlin. 515.

Benndorf, Otto, Wahl zum Correspondenten. 516.
Bezzenberger, Adalbert, Wahl zum Correspondenten. 516.
Brock, J., Ueber die Entwickelung der Geschlechtsorgane der Pulmonaten. 499.
— — Zur Systematik des Genus Loligopsis Lam. (Leachia Lesueur). 504.

Donders, F. C., Wahl zum auswärtigen Mitgliede. 515.
Droysen, Gustav, gestorben in Berlin. 515.
Dumas, Jean Baptiste, gestorben zu Paris. 515.

Engelmann, Theodor, Wahl zum Correspondenten. 516.
Enneper, A., Ueber einige elliptische Integrale. 175.
— — Bemerkungen zur Theorie der planen Curven. 364.

Gildemeister, Johannes, Wahl zum auswärtigen Mitgliede. 515.
Göttingen.
I. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.
A. Jahresbericht. 513.
a. Directoriatswechsel. 515.
b. Todesanzeigen. 515.
c. Wahlen. 515.

B. Verzeichnis der gehaltenen Vorträge und vorgelegten Abhandlungen *).

Sitzung vom 5. Januar 1884:

*W. Voigt, Theorie der Quincke'schen Beobachtungen über totale Reflexion.

F. Wüstenfeld, Die Gelehrtenfamilie Muhibbi in Damaskus und ihre Zeitgenossen im XI. (XVII.) Jahrhundert. Erste Abteilung.

*P. de Lagarde, Die Handschriftensammlung des Grafen von Ashburnham.

*F. Kielhorn, Drei buddhistische Inschriften von Kanheri mit Uebersetzung.

*P. Schiefferdecker, zur Kenntnis des Baues der Schleimdrüsen.

Sitzung vom 2. Februar 1884:

F. Wüstenfeld, Die Gelehrtenfamilie Muhibbi in Damaskus und ihre Zeitgenossen im XI. (XVII.) Jahrhundert. Zweite Abteilung.

F. Wieseler, Zwei Gemmen und zwei Intaglien mit der Darstellung römischer Herrscher aus dem 4. Jahrh. n. Chr.

*K. Schering, Ueber die Beobachtung der sogenannten Erdströme.

Sitzung vom 1. März 1884:

*A. v. Koenen, Ueber prähistorische Funde dicht bei Göttingen.

*L. Königsberger, Ueber Integrale transscendenter Functionen.

*Kießling, Ueber Diffranctionserscheinungen in feuchter Luft.

Sitzung vom 3. Mai 1884:

*K. Klein, Ueber das Krystallsystem des Leucit und den Einfluß der Wärme auf seine optischen Eigenschaften.

*W. Voigt, Theorie der optischen Eigenschaften der Metalle.

F. Frensdorff, Das Recht der deutschen Kaufleute in Nowgorod und sein Verhältnis zum Rechte von Lübeck.

*A. Enneper, Ueber einige elliptische Integrale.

*B. Minnigerode, Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle. Erste Abhandlg.

---

*) Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in dem vorliegenden Bande enthalten.

*Kiessling, Ueber die Einwirkung künstlich erzeugter Nebel auf directes Sonnenlicht.

Sitzung vom 5. Juli 1884:

J. Henle, Ueber Bau und Wachstum des Nagels und Hufs.
*E. Schering, Zur Auflösung der Keppler'schen Gleichung.
H. Wagner, Ueber die Bevölkerung der asiatischen Türkei.
H. A. Schwarz, Ueber die Lösung einer von Delaunay behandelten Aufgabe der Variationsrechnung.
*E. Riecke, Ueber die elektrodynamische Kettenlinie.
*W. Voigt, Ueber die Theorie der Dispersion und Absorption, speciell über die optischen Eigenschaften des festen Fuchsins.
*— — Ueber die Bestimmung der Brechungsindices absorbierender Medien.
*F. Lindemann, Ueber die Auflösung der algebraischen Gleichungen durch transscendente Functionen.
*P. Schiefferdecker, Beiträge zur Kenntnis des Stützgewebes der Retina.
*— — Beiträge zur Kenntnis des Baus der Drüsen des Magens und Duodenums.
*K. Schering, Das Quadrifilar-Magnetometer.

Sitzung vom 2. August 1884:

*K. Klein, Optische Studien am Leucit.
E. Schering, Neue Form der Berechnung der speciellen Störungen. Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung bei speciellen Störungen.
*— — Ueber die Acta mathematica herausgegeben von Mittag-Leffler.
*W. Voigt, Zur Theorie der Absorption des Lichtes in Krystallen.
F. Wüstenfeld, Jemen im XI. (XVII.) Jahrhundert. Die Kriege der Türken, die arabischen Imame und die Gelehrten. Erste Abteilung.
*A. Enneper, Bemerkungen zur Theorie der planen Curven.
*B. Minnigerode, Ueber die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle. Zweite Abhandlung.
*O. Hamann, Zur Histologie der Asteriden.
*R. Leuckart, Ueber Metanitroparatoluyl-phenyl-Harnstoff.
*P. Jannasch, Ueber die Darstellung größerer Mengen von Orthonitrobenzol.
*K. Schering, Inclinationsbeobachtungen in den Jahren 1882. 1883.

Pfeiffer, Th., Ueber die titrimetrische Bestimmung des Harnstoffs. 497.
Picard, Émile, Wahl zum Correspondenten. 516.
Poincaré, Henri, Wahl zum Correspondenten. 516.

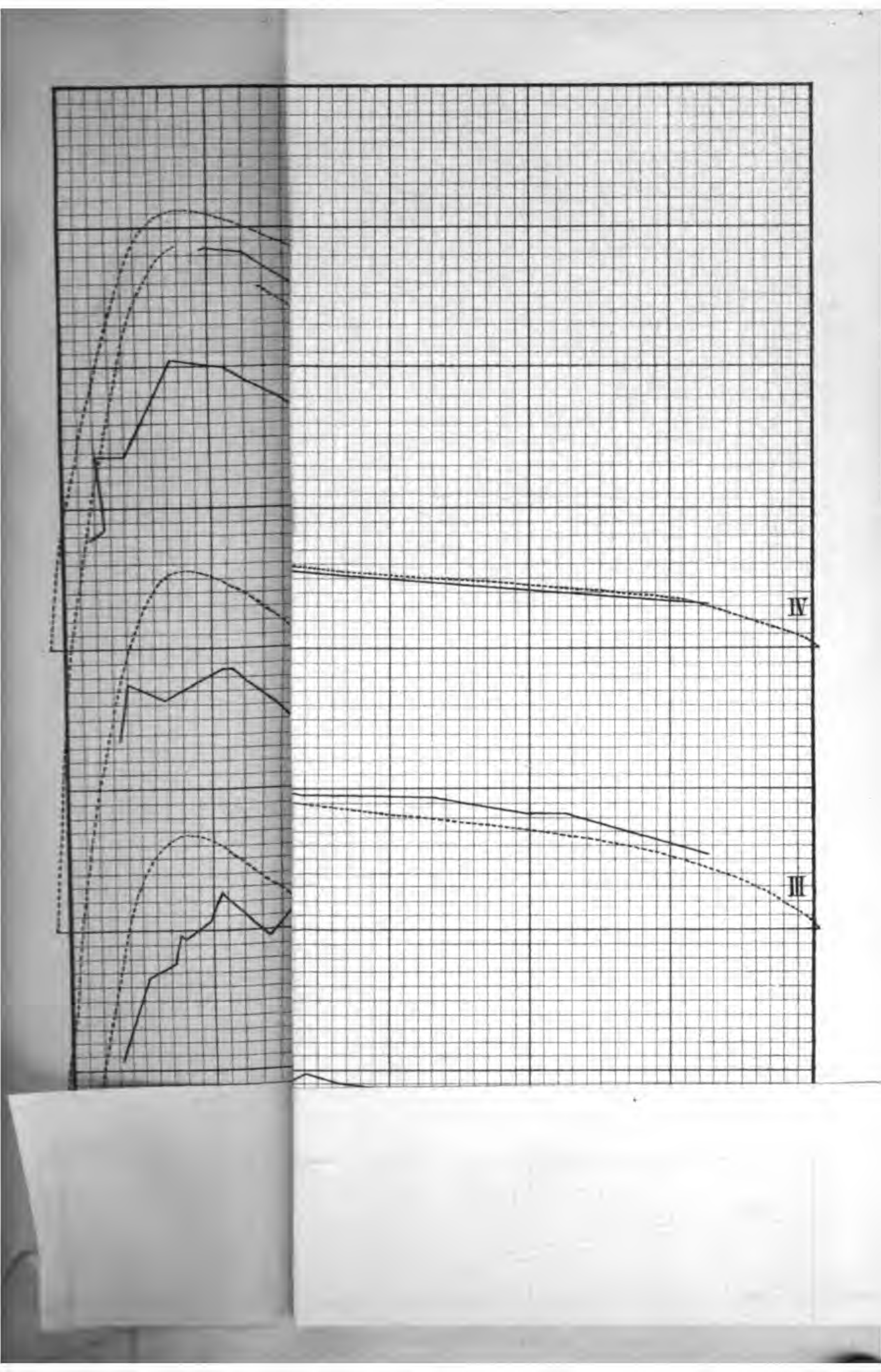
Riecke, Eduard, Ueber die elektrodynamische Kettenlinie. 255.
— — Ueber die elektromagnetische Rotation einer Flüßigkeit. 519.

Schäfer, Arnold, gestorben in Bonn. 515.
Schering, Ernst, Zur Auflösung der Keppler'schen Gleichung. 248.
— — Ueber die von Mittag-Leffler hrsgegebenen Acta mathematica. 508.
Schering, Karl, Ueber die Beobachtung der sogenannten Erdströme. 81.
— — Das Quadrifilar-Magnetometer. 306.
Schiefferdecker, Paul, zur Kenntnis des Baues der Schleimdrüsen. 68.
— — Beiträge zur Kenntnis des Stützgewebes der Retina. 294.
— — Beiträge zur Kenntnis der Drüsen des Magens und Duodenums. 303.
Schmidt, Julius, gestorben in Athen. 515.
Schwarz, Herm. Amandus, Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens. 1.
— — — Bemerkung zu der in No. 10 abgedruckten Mitteilung des Herrn Weierstraß. 516.
Sella, Quintino, gestorben in Rom. 515.
Smith, Laurence, gestorben in Louisville. 515.
Stephan, Heinrich, Staatssekretär, Wahl zum Ehrenmitgliede. 515.
Süss, Eduard, Wahl zum Correspondenten. 516.

Thomae, J., Bemerkung über die Gauß'sche Reihe. 493.
Tollens, B., Wahl zum Assessor. 516.
Tisserand, F., Wahl zum Correspondenten. 516.
Tschermak, Gustav, Wahl zum Correspondenten. 516.

Voigt, W., Theorie der Quincke'schen Beobachtungen über totale Reflexion. 49.
— — Theorie der optischen Eigenschaften der Metalle. 137.
— — Ueber die Theorie der Dispersion und Absorption, speciell über die optischen Eigenschaften des festen Fuchsins. 261.
— — Ueber die Bestimmung der Brechungsindices absorbierender Medien. 283.
— — Zur Theorie der Absorption des Lichtes in Krystallen. 337.

Wachsmuth, Curt, Wahl zum Correspondenten. 516.
Websky, Martin, Wahl zum Correspondenten. 516.
Weierstraß, Karl, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. 395.
Wieseler, Friedrich, Ueber einige beachtenswerte Bildwerke zu Trier. 473.


IV
III

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.



15. Januar. **№ 1.** 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 5. Januar.

W. Voigt, Theorie der Quincke'schen Beobachtungen über totale Reflexion.
Wüstenfeld, die Gelehrtenfamilie Mechibbí in Damaskus und ihre Zeitgenossen im XI. (XVII.) Jahrhundert. (Erscheint in den Abhandlungen.)
Paul de Lagarde, die Handschriftensammlung des Grafen von Ashburnham.
Franz Kielhorn, drei buddhistische Inschriften von Kanheri mit Uebersetzung.
Schiefferdecker, zur Kenntniss des Baues der Schleimdrüsen (vorgelegt von Henle.)

Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens.

Von

H. A. Schwarz.

Um den Satz zu beweisen, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens, hat man sich verschiedener Schlußweisen bedient, welche im Wesentlichen auf der Voraussetzung beruhen, daß es unter allen Körpern gleichen Volumens einen gibt, welcher ein Minimum der Oberfläche besitzt. So lange aber der in dieser Voraussetzung enthaltene Lehrsatz nicht ebenfalls bewiesen ist, kann keine der erwähnten Schlußweisen als Beweis des angeführten Satzes gelten.

Bei dem Versuche, für diejenigen Körper, deren Oberfläche von einer endlichen Anzahl von ganz im Endlichen liegenden Stücken

analytischer Flächen gebildet wird, den im Eingange angeführten Satz direct zu beweisen, bin ich auf ein Beweisverfahren geführt worden, welches dem Einwande mangelnder Strenge nicht ausgesetzt zu sein scheint. Dieser Beweis, dessen Darlegung den Gegenstand der vorliegenden Mittheilung bildet, beruht auf der wiederholten Anwendung eines Schlußverfahrens, dessen sich Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung bedient und dessen Kenntniß ich einer gütigen mündlichen Mittheilung desselben verdanke.

§ 1.

Es bezeichne $\mathfrak{A}$ einen von einer Kugel verschiedenen Körper, dessen Oberfläche $\mathfrak{B}$ von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen gebildet wird. Diese Flächenstücke werden als von singulären Stellen frei vorausgesetzt.

Die Punkte der Oberfläche $\mathfrak{B}$ beziehe man auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, welches so gewählt sein möge, daß kein Theil von $\mathfrak{B}$ der yz-Ebene des Coordinatensystems parallel ist. Es sei x_0 der kleinste, x_1 der größte aller in Betracht kommenden Werthe der Coordinate x.

In einem beliebigen Punkte P der Oberfläche $\mathfrak{B}$, welcher nicht einer Kante derselben angehört und dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sein mögen, denke man sich die Normale der Fläche construirt und die positive Richtung derselben so fixirt, daß diese an der betrachteten Stelle in Bezug auf den Körper $\mathfrak{A}$ die Richtung von Außen nach Innen angibt. Der Winkel, den die positive Richtung dieser Normale mit der positiven Richtung der x-Axe einschließt, werde mit ξ bezeichnet.

Durch den Punkt P denke man sich zu der yz-Ebene des Coordinatensystems eine Parallelebene $\mathfrak{E}_x$ gelegt. Diese hat mit der Oberfläche $\mathfrak{B}$ im Allgemeinen eine oder mehrere Curven $\mathfrak{C}$ gemeinsam. Die Gesammtheit dieser Curven möge als eine Curve aufgefaßt und mit $\mathfrak{C}_x$ bezeichnet werden, während dy, dz die Coordinaten eines vom Punkte P ausgehenden Elementes der Curve $\mathfrak{C}_x$ bezeichnen, welches die Länge ds besitzt. Man kann festsetzen, daß die Anfangspunkte für die Zählung der Bogenlänge s auf den Curven $\mathfrak{C}_x$ $(x_0 < x < x_1)$ eine oder mehrere auf der Oberfläche $\mathfrak{B}$ liegende analytische Linien bilden.

Die Größen x und s mögen als die unabhängigen Variablen gewählt werden, als deren Functionen die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Oberfläche $\mathfrak{B}$ betrachtet werden sollen.

In Folge der im Vorhergehenden angegebenen Voraussetzungen ist es stets möglich, durch eine endliche Anzahl von Ebenen, welche



der yz-Ebene des Coordinatensystems parallel sind, die Oberfläche $\mathfrak{B}$ in eine endliche Anzahl von schalenförmigen beziehungsweise ringförmigen Flächenstücken so zu zerlegen, daß für jedes dieser Flächenstücke die Coordinaten y und z eines beliebigen Punktes eindeutige und im Allgemeinen stetige Functionen der beiden unabhängigen Variablen x und s sind. Besteht die Curve $\mathfrak{C}_x$ nicht aus einem Stücke, sondern aus mehreren getrennten Theilen, von denen jeder eine geschlossene Linie ist, so ist für diese Theile eine bestimmte Reihenfolge und für jeden derselben ein bestimmter Anfangspunkt der Zählung der Bogenlänge festzusetzen. Die Verfügung über die Variabilität der Größe s möge so getroffen werden, daß, wenn $U_1(x)$, $U_2(x)$, $\ldots U_n(x)$ die Länge des ersten, zweiten, $\ldots n^{ten}$ geschlossenen Theiles der Curve $\mathfrak{C}_x$ bezeichnet, für den ersten Theil die Variable s alle Werthe von 0 bis $U_1(x)$, für den zweiten alle Werthe von $U_1(x)$ bis $U_1(x)+U_2(x)$, ... für den letzten alle Werthe von $U_1(x)+U_2(x)+\cdots+U_{n-1}(x)$ bis $U(x)$ annimmt, wenn mit $U(x)$ die Gesammtlänge aller Theile der Curve $\mathfrak{C}_x$ bezeichnet wird.

Es bestehen hiernach die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial s}=0, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2=1.$$

Man kann voraussetzen, daß die Festsetzung der Fortschreitungsrichtung längs jedes Theiles der Curve $\mathfrak{C}_x$, in welcher die Bogenlänge s wächst, so getroffen ist, daß die Größen

$$A=\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad B=-\frac{\partial z}{\partial s}, \qquad C=\frac{\partial y}{\partial s}$$

für jeden nicht einer Kante der Fläche $\mathfrak{B}$ angehörenden Punkt P die Coordinaten einer Strecke bedeuten, deren Richtung mit der positiven Richtung der Normale der Fläche $\mathfrak{B}$ im Punkte P zusammenfällt.

Unter dieser Voraussetzung stellt das längs der Curve $\mathfrak{C}_x$ zu erstreckende Integral

$$\int_0^{U(x)}\tfrac{1}{2}\left(y\frac{\partial z}{\partial s}-z\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds=Q(x)$$

die Größe des Flächeninhalts derjenigen aus einem oder aus mehreren Flächenstücken bestehenden ebenen Fläche dar, welche alle gleichzeitig dem Innern des Körpers $\mathfrak{A}$ und der Ebene $\mathfrak{E}_x$ angehörenden Punkte und außer diesen keine anderen enthält.

Das Volumen V des Körpers $\mathfrak{A}$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} Q(x)\,dx = V.$$

Die Grösse eines Elementes dS der Oberfläche $\mathfrak{B}$ und die Größe dT der orthogonalen Projection des Elementes dS auf die yz-Ebene des Coordinatensystems werden gegeben durch die Gleichungen

$$dS = \sqrt{1+A^2}\,dx\,ds = \frac{1}{\sin\xi}\,dx\,ds,$$

$$dT = \cos\xi\,dS = A\,dx\,ds = \operatorname{cotg}\xi\,dx\,ds.$$

Aus der geometrischen Bedeutung der Größe $Q(x)$ und des längs der Curve $\mathfrak{C}_x$ zu erstreckenden Integrals

$$\int_{s=0}^{s=U(x)} \operatorname{cotg}\xi\,dx\,ds = dx\int_0^{U(x)} \operatorname{cotg}\xi\,ds = dx\int_0^{U(x)} A\,ds$$

ergibt sich die Gleichung

$$d\,Q(x) = Q'(x)\,dx = dx\int_0^{U(x)} A\,ds.$$

Für den Flächeninhalt S der Oberfläche $\mathfrak{B}$ und für das Volumen, V des Körpers $\mathfrak{A}$ ergeben sich hiernach die Ausdrücke

$$S = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{U(x)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}\,ds = \int_{x_0}^{x_1} dx\int_0^{U(x)} \sqrt{1+A^2}\,ds,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx\int_0^{U(x)} \tfrac{1}{2}\left(y\,\frac{\partial z}{\partial s} - z\,\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds = \int_{x_0}^{x_1} Q(x)\,dx.$$

§ 2.

Es kann der Fall eintreten, daß für einen oder für einige Werthe der Größe x der Ausdruck

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} = A$$

einen von der Größe s unabhängigen Werth $\dfrac{Q'(x)}{U(x)}$ besitzt.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für diese Werthe der Größe x

$$\int_0^{U(x)} \sqrt{1+A^2}\,ds = \sqrt{U^2(x) + Q'^2(x)}.$$

In jedem anderen Falle ist aber

$$\int_0^{U(x)} \sqrt{1+A^2}\, ds > \sqrt{U^2(x)+Q'^2(x)}.$$

Um diese Behauptung zu beweisen setze man

$$\int_0^s A\, ds = t, \qquad \int_0^s \sqrt{1+A^2}\, ds = \int_0^s \sqrt{ds^2+dt^2}$$

und bestimme einen Winkel ω durch die Gleichung

$$\cos\omega = \frac{s\, ds + t\, dt}{\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{ds^2+dt^2}},$$

so ergibt sich

$$d\left(\int_0^s \sqrt{ds^2+dt^2} - \sqrt{s^2+t^2}\right) = (1-\cos\omega)\sqrt{ds^2+dt^2},$$

eine Formel, deren geometrische Interpretation sich von selbst darbietet und daher keine weitere Ausführung erfordert.

Da nun $1-\cos\omega$ nicht negativ ist und nur dann in dem Intervalle $0 < s < U(x)$ beständig gleich Null ist, wenn die Größe A von der Variablen s unabhängig ist, so ergibt sich, indem man auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichung zwischen den Grenzen $s = 0$ und $s = U(x)$ integrirt,

$$\text{I. a)} \qquad \int_0^{U(x)} \sqrt{1+A^2}\, ds \geqq \sqrt{U^2(x)+Q'^2(x)}.$$

Hierbei tritt der Fall der Gleichheit nur dann ein, wenn für den betrachteten Werth der Coordinate x die Größe A und mithin auch die Größe ξ unabhängig ist von der Größe s.

Hieraus folgt

$$\text{(I. b)} \qquad S \geqq \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{U^2(x)+Q'^2(x)}\, dx.$$

Der Fall der Gleichheit tritt nur dann ein, wenn in dem ganzen Intervalle $x_0 < x < x_1$ die Größe $A = \operatorname{cotg}\xi$ bloß eine Function der Coordinate x ist.

§ 3.

Es kann der Fall eintreten, daß für einen oder für einige Werthe der Größe x die Curve $\mathfrak{C}_x$ von einer einzigen geschlossenen Linie,

und zwar von einer **Kreislinie** mit dem Radius r gebildet wird. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für diese Werthe der Größe x

$$r^2\pi = Q(x), \qquad U^2(x) = (2r\pi)^2 = 4\,Q(x)\,\pi,$$

$$\sqrt{U^2(x)+Q'^2(x)} = \sqrt{4\,Q(x)\pi + Q'^2(x)}.$$

In jedem anderen Falle ist aber

$$U^2(x) > 4\,Q(x)\pi.$$

Um diese Behauptung zu beweisen, mit anderen Worten, um darzuthun, daß **die Kreisfläche kleineren Umfang besitzt, als jede andere ebene Figur gleichen Flächeninhalts**, kann man wie folgt verfahren.

Um den Fall, in welchem die Curve $\mathfrak{C}_x$ aus mehreren geschlossenen Linien besteht, mit gleicher Einfachheit behandeln zu können, wie den Fall, in welchem die Schnittlinie $\mathfrak{C}_x$ von einer einzigen geschlossenen Linie gebildet wird, kann man davon ausgehen, daß das längs einer gegebenen in der Ebene $\mathfrak{E}_x$ liegenden **geschlossenen** Curve in vorgeschriebenem Sinne zu erstreckende Integral

$$\int \tfrac{1}{2}(y\,dz - z\,dy)$$

seinen Werth nicht ändert, wenn dieser Curve ohne Veränderung ihrer Gestalt eine Translation ertheilt wird, durch welche dieselbe in ihrer Ebene verschoben wird. Da auch der Werth von $ds = \sqrt{dy^2+dz^2}$ hierbei nicht geändert wird, so kann man jeder einzelnen der geschlossenen Linien, aus welchen die Schnittfigur $\mathfrak{C}_x$ der Ebene $\mathfrak{E}_x$ mit der Oberfläche $\mathfrak{B}$ besteht, in der Ebene $\mathfrak{E}_x$ eine solche Translation ertheilen, daß derjenige Punkt dieser Linie, in welchem die Größe s ihren kleinsten, beziehungsweise ihren größten Werth besitzt, mit dem Punkte O_x der Ebene $\mathfrak{E}_x$ zusammenfällt, in welchem dieselbe von der x-Axe des Coordinatensystems geschnitten wird.

Durch Verschiebung der einzelnen Theile der Curve $\mathfrak{C}_x$ und Aneinanderfügung derselben zu einem Linienzuge, — in der Weise, daß längs dieses Linienzuges die Variable s stetig wachsend alle Werthe des Intervalles $0 < s < U(x)$ annimmt — erhält man eine einzige geschlossene Linie, welche mit $\overline{\mathfrak{C}}_x$ bezeichnet werden möge. Die Länge dieser Linie ist $U(x)$.

Bezeichnet man die zweite und dritte Coordinate eines beliebigen Punktes P der Curve $\overline{\mathfrak{C}}_x$, und zwar desjenigen, welcher dem Werthe s entspricht, wieder mit y und z, so sind diese Größen in dem Intervalle $0 < s < U(x)$ eindeutige und **stetige** Functionen der Variablen

s, welche an der unteren und an der oberen Grenze dieses Intervalles einzeln den Werth Null haben.

Das längs der Linie $\overline{\mathfrak{C}}_x$ zu erstreckende Integral

$$\int_0^{U(x)} \tfrac{1}{2}\left(y\frac{\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

hat den Werth $Q(x)$.

Man führe nun die Bezeichnungen ein

$$\rho = \sqrt{y^2+z^2}, \qquad \mathfrak{F} = \int_0^s \tfrac{1}{2}\left(y\frac{\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

und denke sich in der Ebene $\mathfrak{C}_x$ über der geraden Strecke $O_x P$ als Sehne einen Kreisabschnitt construirt, welcher so beschaffen ist, daß das längs des Bogens dieses Kreisabschnittes in der Richtung vom Punkte O_x nach dem Punkte P erstreckte Integral

$$\int \tfrac{1}{2}(y\,dz - z\,dy)$$

den Werth $\mathfrak{F}$ hat.

Bezeichnet

r den, jenachdem $\mathfrak{F}$ einen positiven oder negativen Werth hat, positiv oder negativ in Rechnung zu bringenden Werth des Radius der Kreisfläche, von welcher der erwähnte Kreisabschnitt ein Theil ist,

φ die positiv oder negativ in Rechnung zu bringende Bogenzahl des halben Centriwinkels dieses Kreisabschnittes,

$\mathfrak{L}$ die Länge des Bogens dieses Kreisabschnittes,

so bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{F} = r^2(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi), \qquad \rho = 2r\sin\varphi, \qquad \mathfrak{L} = 2r\varphi.$$

Zur Vereinfachung der Untersuchung kann man ohne Nachtheil für die Allgemeinheit des Ergebnisses derselben von der Voraussetzung ausgehen, daß die beiden Größen ρ und $\mathfrak{F}$ für keinen innerhalb des Intervalles $0 < s < U(x)$ liegenden Werth der Variablen s zugleich den Werth 0 annehmen. Wenn nämlich der Fall eintritt, daß die beiden Größen ρ und $\mathfrak{F}$ für den dem Intervalle $0 < s < U(x)$ angehörenden Werth s_0, aber für keinen dem Intervalle $s_0 < s < U(x)$ angehörenden Werth der Variablen s zugleich den Werth 0 annehmen, so kann die im Folgenden anzustellende auf das Intervall $0 < s < U(x)$ sich beziehende Untersuchung auf das Intervall $s_0 < s < U(x)$ beschränkt werden. Es gilt dann der Schluß $U(x) > \sqrt{4Q(x)\pi}$ a fortiori,

Zur Bestimmung des nicht außerhalb des Intervalles $-\pi \leqq \varphi \overline{\gtrless} \pi$ liegenden Werthes der Größe φ ergibt sich die transcendente Gleichung

$$f(\varphi) = \frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} = \frac{2\mathfrak{F}}{\rho^2}.$$

Da die Ableitung

$$f'(\varphi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \varphi}{\operatorname{tg}\varphi\sin^2\varphi}$$

für keinen dem angegebenen Intervalle angehörenden Werth der Größe φ negativ oder gleich Null wird, während die Function $f(\varphi)$ in diesem Intervalle alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt, so hat die Gleichung

$$f(\varphi) = \frac{2\mathfrak{F}}{\rho^2}$$

für jeden Werth der Größe s in dem angegebenen Intervalle nur eine einzige Wurzel, deren Werth sich mit dem Werthe der Variablen s stetig ändert.

Die Größe r, welche mit der Größe φ und der Größe $\mathfrak{F}$ stets gleiches Vorzeichen hat, ist mithin ebenfalls eindeutig bestimmt. Die Größe $\frac{1}{r}$ ändert sich stetig mit dem Werthe der Variablen s.

In dem betrachteten Punkte P wird die Curve $\overline{\mathfrak{C}}_x$ von der geraden Strecke O_xP sowie von dem Bogen des construirten Kreisabschnittes getroffen. Wird der Winkel, den die im Punkte P construirte Tangente der Curve $\overline{\mathfrak{C}}_x$ mit der Tangente des den Punkt O_x mit dem Punkte P verbindenden Kreisbogens einschließt, mit ω bezeichnet, so bestehen die Gleichungen

$$\cos\omega = \frac{1}{\rho}\left[\left(y\frac{\partial y}{\partial s} + z\frac{\partial z}{\partial s}\right)\cos\varphi + \left(y\frac{\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s}\right)\sin\varphi\right],$$

$$\sin\omega = \frac{1}{\rho}\left[\left(y\frac{\partial y}{\partial s} + z\frac{\partial z}{\partial s}\right)\sin\varphi - \left(y\frac{\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s}\right)\cos\varphi\right],$$

$$d\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2}\left(y\frac{\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds, \qquad d\rho = \frac{1}{\rho}\left(y\frac{\partial y}{\partial s} + z\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds,$$

$$d\mathfrak{L} = \cos\omega\, ds, \qquad \frac{\operatorname{tg}\varphi - \varphi}{\operatorname{tg}\varphi\sin^2\varphi}\, d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2\sin\omega}{\rho^2}\, ds.$$

Es ergibt sich also die Gleichung

$$d(s - \mathfrak{L}) = (1 - \cos\omega)\, ds.$$

Da nun, während die Größe s stetig zunehmend alle Werthe von 0 bis $U(x)$ annimmt, der Factor $1-\cos\omega$ nicht negativ und nur unter einer besonderen Voraussetzung beständig gleich Null ist, so ergibt sich in Folge der Gleichung

$$s-\mathfrak{L}=\int_0^s(1-\cos\omega)\,ds,$$

daß die Größe $s=U(x)$, die Länge der Curve $\mathfrak{C}_x$, im Allgemeinen größer ist, als der Werth der Größe $\mathfrak{L}$, welcher dem Werthe $s=U(x)$ entspricht.

Für $s=U(x)$ wird die Größe ρ gleich Null, die Größe $\mathfrak{F}$ erlangt den Werth $Q(x)$, die Größe φ geht, da $Q(x)$ einen positiven Werth hat, in den Werth π über, an die Stelle des Kreisabschnittes tritt eine Kreisfläche mit dem Radius $\sqrt{\frac{1}{\pi}Q(x)}$ und die Größe $\mathfrak{L}$ erlangt den Werth $\sqrt{4Q(x)\pi}$.

Aus der vorstehenden Untersuchung ergibt sich also die Beziehung

$$U(x)\geqq\sqrt{4Q(x)\pi}. \tag{II.a}$$

Hierbei ist zu bemerken, daß, in Uebereinstimmung mit der oben ausgesprochenen Behauptung, der Fall der Gleichheit stets dann, aber auch nur dann eintritt, wenn die Größe r in dem ganzen Intervalle $0<s<U(x)$ einen von der Größe s unabhängigen Werth $\sqrt{\frac{1}{\pi}Q(x)}$ besitzt, wenn also die in der Ebene $\mathfrak{E}_x$ liegende Curve $\mathfrak{C}_x$ eine Kreislinie mit dem Radius $\sqrt{\frac{1}{\pi}Q(x)}$ ist. Denn nur unter dieser Voraussetzung haben die Größen $1-\cos\omega$, $\sin\omega$ in dem ganzen Intervalle $0<s<U(x)$ den Werth Null.

Durch Verbindung der Formel (I. b) mit der Formel (II. a) ergibt sich

$$S\geqq\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{4Q(x)\pi+Q'^2(x)}\,dx. \tag{II.b}$$

Es ist hierbei zu bemerken, daß der Fall der Gleichheit nur dann eintritt, wenn der betrachtete Körper $\mathfrak{A}$ ein Rotationskörper ist, dessen Rotationsaxe der x-Axe des Coordinatensystems parallel ist.

§ 4.

Man denke sich nun einen Rotationskörper $\mathfrak{D}$ construirt, dessen Rotationsaxe mit der x-Axe des Coordinatensystems zusammen-

fällt, während der Radius r des in der Ebene $\mathfrak{E}_x$ liegenden Parallelkreises durch die Gleichung

$$r^2\pi = Q(x), \qquad r \geqq 0, \qquad x_0 \leqq x \gtreqless x_1$$

gegeben ist.

Dann ergibt sich

$$2r\pi dr = Q'(x)dx, \qquad 2r\pi\sqrt{dx^2+dr^2} = \sqrt{4Q(x)\pi + Q'^2(x)}\,dx.$$

Die Größe des Flächeninhalts der Oberfläche des Rotationskörpers $\mathfrak{D}$ wird also durch das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{4Q(x)\pi + Q'^2(x)}\,dx$$

ausgedrückt.

Man führe nun die Bezeichnung

$$\mathfrak{V} = \int_{x_0}^{x} Q(x)\,dx$$

ein und denke sich einen auf der negativen Seite der Ebene $\mathfrak{E}_x$ liegenden Kugelabschnitt construirt, dessen Volumen gleich $\mathfrak{V}$ ist, dessen ebene Begrenzungsfläche den Flächeninhalt $r^2\pi = Q(x)$ besitzt und mit der Fläche des in der Ebene $\mathfrak{E}_x$ liegenden Parallelkreises des Rotationskörpers $\mathfrak{D}$ zusammenfällt. Der Flächeninhalt des krummen Theiles der Begrenzung dieses Kugelabschnittes, der so genannten Kugelhaube, werde mit $\mathfrak{H}$, der Kugelradius mit R, und die Bogenzahl des vierten Theiles des Centriwinkels, zu welchem der Kugelabschnitt gehört, mit ψ bezeichnet. Der Winkel, den die Tangentialebene der Kugelfläche mit der Tangentialebene des Rotationskörpers in einem Punkte des gemeinsamen Parallelkreises einschließt, werde mit ω, und die Länge des Linienelementes der Meridiancurve des Rotationskörpers, oder die Größe $\sqrt{dx^2+dr^2}$, werde mit dl bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen bestehen folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{V} = \tfrac{4}{3} R^3\pi \sin^4\psi(\sin^2\psi + 3\cos^2\psi), \qquad \cos\omega = \cos 2\psi \frac{dr}{dl} + \sin 2\psi \frac{dx}{dl},$$

$$r = 2R\sin\psi\cos\psi,$$

$$\mathfrak{H} = 4R^2\pi\sin^2\psi, \qquad \sin\omega = \cos 2\psi \frac{dx}{dl} - \sin 2\psi \frac{dr}{dl},$$

$$d\mathfrak{V} = r^2\pi\,dx, \qquad d\mathfrak{H} = 2r\pi\cos\omega\,dl, \qquad (1+\operatorname{tg}^2\psi)^2 d\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{4\sin\omega}{r^2}dl.$$

Die Grösse ψ ist zu bestimmen aus der Gleichung

$$f(\psi) = \operatorname{tg}\psi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\psi = \frac{2\mathfrak{B}}{r^3\pi},$$

mit der Bedingung

$$0 \leqq \psi \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2}\pi.$$

Da die Ableitung der Function $f(\psi)$ den Werth

$$f'(\psi) = (1+\operatorname{tg}^2\psi)^2$$

besitzt, welcher immer positiv ist, so nimmt die Function $f(\psi)$ beständig wachsend alle Werthe von 0 bis ∞ an, während ψ stetig wachsend alle Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ annimmt. Aus diesem Grunde hat die Gleichung

$$f(\psi) = \frac{2\mathfrak{B}}{r^3\pi}$$

in dem angegebenen Intervalle stets eine und nur eine Wurzel, deren Werth sich mit dem Werthe der Größe x stetig ändert.

Da der Werth der Größe ψ eindeutig bestimmt ist, so gilt in Folge der Gleichung $r = 2R\sin\psi\cos\psi$ dasselbe von dem Werthe der Größe R. Aus der Gleichung

$$d\left[\int_{x_0}^{x} 2r\pi\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,dx - \mathfrak{H}\right] = 2r\pi(1-\cos\omega)\,dl$$

ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{4Q(x)\pi + Q'^2(x)}\,dx \geqq \mathfrak{H}.$$

Läßt man nun x in den Werth x_1 übergehen, so nimmt r den Werth 0 an, die Größe ψ erlangt den Werth $\frac{1}{2}\pi$, $\mathfrak{B}$ geht über in V, die Größe R erlangt den Werth $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ und die Größe $\mathfrak{H}$ nimmt den Werth $\sqrt[3]{36V^2\pi}$ an.

Es ergibt sich also

$$\text{(III. a)} \qquad \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{4Q(x)\pi + Q'^2(x)}\,dx \geqq \sqrt[3]{36V^2\pi}.$$

Der Fall der **Gleichheit** tritt nur dann ein, wenn in dem ganzen Intervalle $x_0 < x < x_1$ $\cos\omega$ den Werth 1, $\sin\omega$ den Werth 0, also R einen von der Größe x unabhängigen Werth hat. In diesem Falle ergibt sich aber aus dem zuletzt angeführten Systeme von Gleichungen, daß der Rotationskörper $\mathfrak{D}$ eine **Kugel** ist.

Tritt dieser Fall ein, so kann der Körper 𝔄 nicht ein Rotationskörper sein, dessen Rotationsaxe der x-Axe des Coordinatensystems parallel ist; derselbe müßte sonst gleichfalls eine Kugel sein und diese Möglichkeit ist von vorn herein ausgeschlossen worden.

Durch Zusammenfassung der Formeln (II. b) und (III. a) ergibt sich, daß

$$S \geqq \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{4Q(x)\pi + Q'^2(x)}\, dx \geqq \sqrt[3]{36V^2\pi}$$

und zwar tritt unter den angegebenen Voraussetzungen der Fall der Gleichheit höchstens an einer, aber nicht an beiden Stellen zugleich ein.

Es ist also jedenfalls

(III. b) $$S > \sqrt[3]{36V^2\pi}.$$

Hierdurch scheint mir mit Strenge der Satz bewiesen zu sein:

»Die Kugel besitzt kleinere Oberfläche, als jeder andere Körper gleichen Volumens, dessen Oberfläche von einer endlichen Anzahl von ganz im Endlichen liegenden Flächenstücken gebildet wird, welche in jedem ihrer Punkte den Charakter einer algebraischen Fläche besitzen.«

§ 5.

Die vorhergehende Untersuchung erstreckt sich auf alle ganz im Endlichen liegenden Körper 𝔄, deren Oberfläche von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen gebildet wird.

Die Voraussetzung »die Oberfläche des Körpers 𝔄 wird von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen gebildet«, ist nun für die Schlußfolgerung »der betrachtete Körper 𝔄 besitzt, falls er nicht selbst eine Kugel ist, größere Oberfläche, als eine Kugel gleichen Volumens«, zwar hinreichend, aber wie man sich leicht überzeugt nicht nothwendig. Denn der im Eingange dieser Mittheilung ausgesprochene Lehrsatz gilt ohne diese einschränkende Voraussetzung.

Um dies zu beweisen, braucht man nur darzuthun, daß jedem ganz im Endlichen liegenden Körper 𝔄, dessen Oberfläche den Flächeninhalt S besitzt, dessen Volumen den Werth V hat und der nicht eine Kugel ist, auf unendlich mannigfaltige Weise ein von einer endlichen Anzahl von ebenen Flächenstücken begrenztes Polyeder 𝔄* zur Seite gestellt werden kann, welches bei gleichem Volumen kleinere Oberfläche besitzt, als der Körper 𝔄.

Denn es ergibt sich, wenn dieser Satz bewiesen ist, bei Anwendung der im Vorhergehenden (§§ 1—4) durchgeführten Untersuchung auf den Körper $\mathfrak{A}^*$ a fortiori die Schlußfolgerung, daß der Körper $\mathfrak{A}$ größere Oberfläche besitzt, als eine Kugel gleichen Volumens.

Nun enthält ein Abschnitt der Steinerschen Abhandlung »Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt« [Gesammelte Werke Band II. Seite 300—306] vollständig die Hülfsmittel, zu jedem ganz im Endlichen liegenden Körper $\mathfrak{A}$, dessen Oberfläche den Flächeninhalt S besitzt, dessen Volumen den Werth V hat und der nicht eine Kugel ist, einen Körper $\mathfrak{A}'$ zu construiren, dessen Volumen V' dem Volumen des Körpers $\mathfrak{A}$ gleich ist, während der Flächeninhalt S' der Oberfläche desselben kleiner ist, als der Flächeninhalt der Oberfläche des Körpers $\mathfrak{A}$.

Denkt man sich einen solchen Körper $\mathfrak{A}'$ construirt, so ist es auf unendlich mannigfaltige Weise möglich, nach Annahme zweier von Null verschiedenen, hinsichtlich ihrer Kleinheit keiner Beschränkung unterliegenden positiven Größen ε und η der Oberfläche des Körpers $\mathfrak{A}'$ ein von einer endlichen Anzahl von ebenen Flächenstücken begrenztes Polyeder $\mathfrak{A}''$ einzubeschreiben, so daß, wenn der Flächeninhalt der Oberfläche dieses Polyeders mit S'' und das Volumen desselben mit V'' bezeichnet wird, die Differenzen $S''-S'$, $V''-V'$ dem absoluten Betrage nach beziehlich kleiner sind als $\varepsilon S'$, $\eta V'$. Construirt man hierauf ein dem Polyeder $\mathfrak{A}''$ ähnliches Polyeder $\mathfrak{A}^*$, dessen Volumen V^* dem Volumen des Körpers $\mathfrak{A}$ gleich ist, so ist der Flächeninhalt S^* der Oberfläche dieses Polyeders kleiner als $(1+\varepsilon)\sqrt[3]{(1-\eta)^{-2}}\,S'$. Wählt man aber die Größen ε und η von vorn herein so klein, daß

$$\frac{(1+\varepsilon)^3}{(1-\eta)^2} < \left(\frac{S}{S'}\right)^3,$$

so ergibt sich $S^* < S$.

Es ist also möglich, wie behauptet wurde, jedem ganz im Endlichen liegenden Körper $\mathfrak{A}$, welcher nicht eine Kugel ist, ein von einer endlichen Anzahl von ebenen Flächenstücken begrenztes Polyeder $\mathfrak{A}^*$ zur Seite zu stellen, welches bei gleichem Volumen kleinere Oberfläche besitzt, als dieser.

Der im Eingange dieser Mittheilung ausgesprochene Lehrsatz ist hiermit bewiesen.

Die Handschriftensammlung des Grafen von Ashburnham.

Von

Paul de Lagarde.

Als im Jahre 1856 der durch seine Arbeiten über den griechischen Roman von Alexander dem Großen bekannte Jean Berger de Xivrey eine Studie über den Text und den Styl des neuen Testaments herausgab, und in dieser über die einst von Sabatier benutzten Handschriften der alten lateinischen Uebersetzung des neuen Testaments handelte, hatte er sich der Hülfleistung eines jungen Gelehrten zu erfreuen, den er als Leopold Delisle vorstellt, »chez qui l'Académie a hautement apprécié une érudition solide et précise, et qui donne, chaque jour, à la bibliothèque, des preuves d'une aptitude singulière à démêler les complications bibliographiques les plus embrouillées«.

Seit dem Jahre 1856 ist dieser Leopold Delisle von Erfolg zu Erfolge in so sicherem und elastischem Gange vorgeschritten, daß er auch in Deutschland und England als der in seinem Vaterlande Erste seines Fachs anerkannt, in Frankreich an die Spitze der Bibliotheken des Reichs gestellt, und mit der speziellen Verwaltung jener herrlichen, in Jahrhunderten nicht auszunutzenden Sammlung betraut ist, welche bald »bibliothèque royale«, bald »bibliothèque nationale«, bald »bibliothèque impériale« genannt, so vielen Studien die hervorragendsten, oft die einzigen Hülfsmittel bietet.

Aber es sind nicht Delisles Gaben (denn diese sind nicht sein Werk), nicht sein Fleiß (denn des Menschen Fleiß ist seine Pflicht), nicht sein Glück (denn unsere Geschicke leitet eine höhere Hand), was von ihm zu sprechen einlädt: was ihn so anziehend macht, ist die herbe und doch warme, vor keiner Arbeit und keinem Verdrusse scheuende Liebe, mit der er sich viele Jahre lang mit einer und derselben Angelegenheit trägt, die Liebe, mit der er die alten Denkmäler der französischen Geschichte und der französischen Gelehrsamkeit zu erhalten und zu ordnen, Verlorenes, am Meisten das in Unehren Verlorene, seiner Heimat wiederzugewinnen sich bemüht. Ihn in diesem Streben zu unterstützen bezwecken die folgenden Zeilen, welche

alle gebildeten Männer und Frauen Deutschlands auf die Seite des von ihm vertretenen Rechts rufen sollen. Sie bezwecken aber auch, das Treffen von Maßregeln zu empfehlen, welche die von Delisle in helles Licht gesetzte Gefahr der öffentlichen Bibliotheken, ihre Schätze durch Diebe einzubüßen, zu beseitigen im Stande sein würden.

Unsere Zeit bevorzugt die Naturwissenschaft vor der Wissenschaft des Geistes. Und doch werden die Naturforscher selbst kaum bestreiten, daß das allein des Kennens wirklich werte Objekt des Studiums der Mensch ist. Aber der Mensch und seine Geschichte müssen sich gefallen lassen, durch gefärbte Gläser, durch Hohlspiegel und falsch geschliffene Brillen, und, wenn ohne dies Teufelswerk, von Augen betrachtet zu werden, welche oft zu sehen gar nicht gelernt haben — wenn man über Revolution und Reformation, über Hutten, Sickingen, Luther, Wilhelm von Oranien, Tilly, Friedrich den Großen sogenannte Gebildete verschiedener Parteistellung reden hört, sollte man oft nicht glauben, daß die mit einander Redenden von Einem und demselben Gegenstande sprechen —, und darum ist das erste Bestreben aller wirklichen und rücksichtslosen Freunde historischer Wahrheit, für die Urteilfindung die über die Prozesse der Geschichte handelnden Akten zu sammeln, zu sichten, zu ordnen, lesbar zu machen, wie es ihr zweites Bestreben ist, zur Urteilfindung methodisch anzuleiten.

Aus jenem Bestreben erwächst die bei den meisten Fachgenossen geradehin zur Leidenschaft werdende Sehnsucht, alle Dokumente des großen Entwickelungsganges den wir Geschichte nennen, vor dem Untergange zu retten, aus ihm weiter der so Vielen unverständliche Eifer auch um solche Handschriften und Urkunden, deren Inhalt wir vorläufig noch gar nicht kennen.

Eine Reihe griechischer und lateinischer Klassiker ist nur durch ein einziges Buch an uns gekommen. Will man es uns verdenken, wenn wir jenen berühmten Codex der Laurenziana in Florenz, der was wir von Aeschylus und Sophocles besitzen, allein erhalten hat, mit feuchten Augen in die Hand nehmen? ihn, dem wir danken, daß der Antigone »nicht mitzuhassen, mitzulieben bin ich da«, daß die zermalmende Verdammung des Macht vor Recht schätzenden Kreon, daß des blinden Oedipus Gebet an die süßen Töchter alten Dunkels, die Erinnyen des Kolonos, daß des gefesselten Prometheus Klagen mit uns durch das Leben wandern?

Uns würde für die Geschichte unsres Volkes Wesentliches fehlen, wenn uns das in Kassel liegende Manuskript des Ecclesiasticus verloren wäre, auf dessen letzten Seiten das Lied von Hildebrand und Hadubrand verzeichnet steht.

In Paris wird eine im letzten Viertel des vierten Jahrhunderts kopierte Handschrift aufbewahrt, welche streng katholische Schriften des Hilarius von Poitiers und des Ambrosius von Mailand sowie Akten der gegen die Arianer gerichteten Synode von Aquileja enthält. Am Rande dieser Handschrift hat Georg Waitz im Jahre 1840 wider diese katholischen Stücke ankämpfende Kritiken des arianischen Bischofs Maximinus und in deren Mitte die Nachrichten entdeckt, welche der ebenfalls arianische Bischof des heutigen Silistria, Auxentius, über Ulfilas, unsern Ulfilas, den Mann gegeben hat, der die Bibel in das Gotische übertragen, und durch seine Arbeit dem großen Jakob Grimm seinen Siegeslauf ermöglicht hat, Nachrichten, welche das bis 1840 bekannt Gewesene in der wertvollsten Weise, zum Beispiel durch Mitteilung des dogmatischen Testaments des Ulfilas, ergänzen. Denke man sich jenen Codex verloren: wie viel fehlte unserm Wissen über einen uns so lieben und uns so viel bedeutenden Menschen?

Derselbe Georg Waitz fand 1842 in Merseburg in einem überwiegend Hrabans von Fulda Schriften enthaltenden Tröster die althochdeutschen Gedichte, aus welchen Jakob Grimm in der ersten der von ihm in der Berliner Akademie gehaltenen Vorlesungen so Wichtiges über unsern alten Glauben, über das Verhältnis skandinavischer und deutscher Religion ermittelte: hieng da nicht alles was Grimm uns über Phol und die übrigen Götter gelehrt hat, an einem einzigen Pergamentblatte?

Im Jahre 1842 brachte Mynoides Mynas vom Athos eine griechische Handschrift des vierzehnten Jahrhunderts nach Paris. Emmanuel Miller gab 1851 zu Oxford das in ihr Enthaltene als ein Werk des Origenes heraus, aber Jacobi und Bunsen schrieben es dem Hippolytus zu. Nur diesem Einen Codex danken wir die Einsicht in höchst eigentümliche Vorgänge, welche unter Septimius Severus die Kirche Roms aufgeregt haben. Und wiederum nur durch einen einzigen in San Giovanni di Laterano ausgegrabenen Stein und eine einzige aus Saint Germain des Près nach Petersburg verschleppte Handschrift wissen wir nunmehr einigermaßen über den Verfasser der so erhaltenen Schrift Bescheid.

Nach dem Gesagten wird auch der Nicht-Gelehrte begreifen, was Handschriftensammlungen wert sind: wird verstehn, was für eine Unruhe es in das einförmige Leben des Historikers und Philologen brachte, als vor einiger Zeit eine Bibliothek von viertausend Manuskripten, noch dazu von auserwählten Manuskripten, zum Verkaufe gestellt ward.

Der jetzige Graf von Ashburnham — denn dieser ist der Verkäufer — hatte von seinem Vater jene Manuskripte geerbt: sie wur-

den bis vor Kurzem in dem bei Hastings gelegenen Sitze der Familie aufbewahrt.

Der alte Graf von Ashburnham stand unter den englischen Gelehrten nicht gut angeschrieben, weil er seine Schätze nicht gerne von ihnen benutzen ließ: nicht einmal seine Kataloge (so erzählt man) teilte er Engländern mit. Ich selbst muß dankbar bezeugen, daß, als ich ihn 1874 von London aus um seinen im Handel nicht zu erwerbenden Druck zweier Bücher des lateinischen Pentateuchs bat, er mir völlig unaufgefordert geschrieben hat, ich möge das Buch, von dem er nur noch Ein Exemplar besitze (auch das britische Museum hatte es nicht) in Ashburnham-place in seinem Hause einsehen, »as possibly I may have some manuscripts — as yet unpublished — that may be of service to You in the work upon which You are engaged«: leider konnte ich der gütigen Einladung damals nicht Folge leisten. Auch andere deutsche und verschiedene französische Gelehrte haben freien Zutritt bei dem alten Herrn gefunden.

Die Sammlung zerfiel, als sie noch in Ashburnham-place stand, in vier Abteilungen, genannt Libri (von 1923), Barrois (von 702), Stowe (von 996), Appendix (von 250 Nummern).

Die »Times« haben am 12 Februar 1883 einen von einem Kenner ersten Ranges geschriebenen Aufsatz gebracht, dem ich eine Auffrischung meiner vor Jahren durch Einsicht in die Kataloge des Grafen gewonnenen oberflächlichen Kenntnis dieser Schätze danke: sonst ruht was ich sage, auf den an verschiedenen Stellen gedruckten Mitteilungen Delisles und Ulysse Roberts, und auf der unter dem 21 Februar 1883 an den Schatzkanzler von England gerichteten »description« Edward Bonds, welcher in charakteristischer Loyalität Leopold Delisles unten zu besprechender Brief an die »Trustees« des britischen Museums vom 15 Februar 1883 beigebogen ist.

Libri hatte allein 45 Manuskripte der lateinischen Bibel und lateinischer Theologen zusammengebracht: zehn darunter stammten aus dem vierten bis siebenten Jahrhunderte, keines war jünger als das Jahr 1000. Unter den erstgenannten zeichnete sich der mit Bildern verzierte Pentateuch aus, den Dagobert hätte gebrauchen können, ein Buch, dessen Zeichnungen wegen ihrer Wichtigkeit für die Geschichte der Kunst Oskar von Gebhardt so eben veröffentlicht hat. Weiter hatte Libri lateinische Klassiker in Abschriften des neunten oder zehnten Jahrhunderts gesammelt, eine lange Reihe von Dante-Manuskripten, Denkmäler der französischen und provençalischen Poesie des Mittelalters, Correspondenzen aus dem Florenz Dantes und der ersten Medici, zahlreiche Originalbriefe von Gelehrten und Politikern.

Des Barrois Augenmerk war auf Handschriften der älteren französischen Literatur gerichtet gewesen. Er besaß Werke, bei deren Anblick eines Franzosen Herz eben so höher schlagen wird, wie das eines Deutschen es tun würde, wenn ihm unbekannte Gedichte des Kürenbergers, Heinrichs von Veldeck oder ein Tagebuch Wolfgêrs von Ellenbrechtskirchen vorgelegt würde.

Daß unter dem Namen Stowe-Collection die von den Herzögen von Buckingham zusammengetragenen Schätze zu verstehn sind, braucht man nicht erst zu sagen. Das große Haus Buckingham, welches England mit zu regieren berufen ist, interessierte sich vor Allem für englische Geschichte. So lagen in Stowe, nachmals, als der Marquess of Chandos, 1849 genötigt sein bewegliches Vermögen zu veräußern, die Bibliothek seiner Väter dem Grafen von Ashburnham überlassen hatte, in Ashburnham-place, zweiundvierzig Originalurkunden der angelsächsischen Zeit, die älteste von 693, die jüngste mit Wilhelm dem Eroberer gleichaltrig. Weiter finden wir Staatspapiere in Fülle: zwölf Bände Depeschen, welche Sir Thomas Edmondes, weiland Botschafter Englands in Frankreich und den Niederlanden, an Elisabeth und Jakob den Ersten geschrieben: zehn Bände Correspondenzen, welche der Hof von Hannover mit den Führern der englischen Parteien in der Zeit der Königin Anna gewechselt: sehr Vieles was sich auf die Verwaltung Irlands bezieht: die Entwürfe zu den Berichten, welche ein Mitglied des Hauses Buckingham als Gesandter in Konstantinopel 1681 bis 1688 erstattet hat: hundert Briefe des ersten Herzogs von Marlborough und seiner energischen Gemahlin: vieles Andere, was aufzuzählen zu weit führen würde, weil es als Reliquie ihrer Geschichte überwiegend für Engländer von Interesse ist, wie ein ganz eigenhändiger Brief Heinrichs des Vierten. Dem schließen sich die Irischen Manuskripte an, für uns Deutsche um so interessanter, als ein Deutscher, Kaspar Zeuß, für die celtische Philologie den Grund gelegt hat.

Und endlich die Appendix. Ein bescheidener Name, und wie stolze Güter deckt er. Chaucer, Wycliffe, Occleve, Lydgate sind vertreten, Mysterien des fünfzehnten Jahrhunderts aus York finden sich neben Englischen Chroniken, Dante, und französischer Literatur des Mittelalters. Kostbar mit Miniaturen verzierte Horenbücher zeigen uns, wie weit man es im Anfange des fünfzehnten Jahrhunderts in den verschiedenen Ländern Europas in der Ausschmückung der Manuskripte gebracht hatte. Was kann doch ein williger, sachverständiger, hochgestellter Mann in einem Menschenleben Alles zusammen tragen!

Die bei der ersten Fakultät Eingeschriebenen und ihre Lehrer

pflegen, wenn sie einmal von dem großen Bibelwerke des Origenes hören, zu meinen, daß dies so zu sagen im Buchhandel erschienen sei: daß wenn auch nicht allzu viele, so doch nicht wenige Kirchenväter es sich gekauft haben, und daß wir die so nützlichen und leider so kärglichen Auszüge aus ihm diesen gekauften Abschriften danken, welche etwa Eusebius von Emesa, Diodor, Theodoret, Cyrill, Hieronymus auf ihren Studierstuben jederzeit hätten von ihren Bücherbrettern nehmen können. Wer die vorzugsweise Vaticanisch genannte Handschrift der Bibel in Rom, die Alexandrinisch genannte Handschrift der Bibel in London, wer auch nur Minuskelhandschriften des griechischen oder lateinischen alten Testaments gesehen hat, weiß, daß die Sache sich so nicht gemacht hat. Welch eine lange Reihe von höchst ausgewachsenen, einen Geldwert besitzenden Schafen, Eseln, Antilopen mußte sterben, um die nötigen, doch auch nicht geraden Weges kostenfrei vom Schlachthause oder dem Jagdgrunde in des Kopisten Kammer wandernden Felle für ein das alte Testament vollständig mindestens sechsmal in mindestens sechs parallelen, mit Uncialschrift beschriebenen Kolumnen enthaltendes Buch zu liefern: wie viele Buchstaben waren in unverbundenen, steifen Zeichen von Unterhalt beanspruchenden Schreibern einzeln auf das Pergament zu malen, um es zu füllen! Ein vollständiges Exemplar jener Hexapla hätte den Wert eines Ritterguts gehabt: keiner der oben Genannten hat jemals eine eigene Abschrift derselben besessen. Als der Papyrus vom Pergamente verdrängt worden war, wurden die Bücher haltbarer, aber naturgemäß viel teurer als sie vordem gewesen. Ein französischer Gelehrter, Samuel Berger, hat vor einigen Jahren die Preise zusammengestellt, welche vor der Erfindung des Buchdrucks in Frankreich für Bibeln gezahlt worden sind. Sachverständige nehmen an, daß im vierzehnten und fünfzehnten Jahrhunderte (gerne hörte ich von einem kürzeren Zeitraum sprechen) das Geld eine sechsmal stärkere Kaufkraft besessen als es heute besitzt: wenn eine Bibel damals, je nach der Schönheit ihrer Schrift, zwischen 200 und 860 und 1752 Francs gewertet wurde, so hat man, um wirklich ein Urteil über den Preis zu gewinnen, sich zu fragen, wie lange der Schreiber an dem Buche gearbeitet, und dann, welche Art Lebens er für den Lohn der Arbeit hätte führen können: auf einen Sparpfennig für ihr Alter brauchten die Kopisten wohl kaum zu denken, da sie gewis Mönche waren, und darum auch wann sie alt geworden, ohne Entgelt im Kloster ihren Tisch gedeckt, ihr Bett gebreitet, und Feuer in ihren Kamin eingeschürt fanden.

Es wäre von großem Interesse, wie eine Sammlung aller (auf Vollständigkeit käme es an) in alten Handschriften erhaltenen Ka-

taloge mittelalterlicher Bibliotheken, so auch ein kein Datum auslassendes Verzeichnis der Angaben zu besitzen, welche über die Preise der Bücher im Mittelalter gemacht werden. Man würde sich wahrscheinlich überzeugen, daß unsere Zeitgenossen, selbst wenn sie für Handschriften hohe Summen ausgeben müssen, doch fast immer im Verhältnisse zu den Forderungen der ersten Schreiber zahlen, allenfalls einen Aufschlag für etwas Unbezahlbares, nämlich für die Liebe zur Sache, mit der jene Alten gearbeitet, tragen, aber sicher nicht die Zinsen des ursprünglich angelegten Kapitals ersetzen. Nur Staatsakten und Autographen lassen sich gar nicht taxieren, weil sie außer dem objektiven Werte ein pretium affectionis haben.

Die einzelnen Bände der Berichte, welche Sir Thomas Edmondes aus Paris an Elisabeth und Jakob den Ersten sandte, dürften, wenn man die Reisekosten der in kleinen Abteilungen sie überbringenden Boten berechnet, mit je tausend Mark (was zur Zeit der Durchschnittspreis eines unter mehreren verkauften Manuskripts ist) ebensowenig aufgewogen sein, wie das in einer kunstvollen metallenen Kapsel des eilften Saeculums verwahrte, nun achthundert Winter alte irische Missal von Stowe. Würde wohl ein mit Miniaturen versehenes Psalterium des vierzehnten Jahrhunderts mit tausend Mark wirklich vergütet sein? Tausend Mark sind jetzt etwa das Gehalt eines Briefträgers oder Forstwarts, und Makart, Richter, Menzel möchten kaum mehrere Jahre für ein solches Gehalt zeichnen und malen wollen: das Werk eines im vierzehnten Jahrhunderte arbeitenden Künstlers darf beanspruchen mit dem Gelde aufgewogen zu werden, welches dieser Künstler für seine Arbeit, falls er sie in unsrer Zeit machte, in unsrer Zeit beanspruchen müßte.

Nach meinen Auseinandersetzungen wird sich Niemand wundern, wenn er erfährt, daß die Sammlung, für welche, als sie die Appendix noch nicht enthielt, des jetzigen Grafen von Ashburnham Vater vor rund dreißig Jahren 22000 Pfund gezahlt hat, 1879 für 160000 Pfund ausgeboten wurde. Denn nehmen wir an, daß jene 1849 noch nicht vorhandene Appendix 8000 Pfund gekostet habe, so würden 30000 Pfund Kapital und für dreißig Jahre dreißigmal 1500 Pfund verlorene Zinsen, also 75000 Pfund auf alle Fälle zu rechnen, und es würde weiter zu bedenken sein, daß die Möglichkeit, Handschriften von der Güte der angebotenen und in solcher Fülle zu erwerben, seit dreißig Jahren, wenn es sich um occidentalische Waare handelt, fast ganz verschwunden ist: welcher Umstand den Preis des Gutes ganz naturgemäß erheblich in die Höhe treiben müßte, so daß die in meinem vorigen Abschnitte vorgeschlagene Berechnung noch gar nicht einmal angewandt zu werden braucht.

Weitaus die größeste Zahl der uns überkommenen Handschriften ist in Klöstern und für Klöster geschrieben: denn wenigstens ich kenne erst nach 1360 Spuren davon, daß auch Fürsten und Städte eigne Bibliotheken gesammelt haben: Karl der Große und der zweite staufische Friedrich standen mit ihrem Geschmacke für Literatur in ihren Zeiten sicher allein. Die Klöster nun sind, wenn es sich um geschriebenes Recht handelt, mit Unrecht, wenn um ungeschriebenes, mit Recht aufgehoben worden: jenes, weil gültige Willensäußerungen verfügungsfähiger Personen durch die Gewalt umgestoßen worden sind, dieses, weil die Kirche sich der Wahrheit verschlossen hat, daß Leben die Fähigkeit ist, bei fortwärendem Stoffwechsel dasselbe zu bleiben, und die mit gutem Fuge betonte Dieselbigkeit des Lebens noch nicht die Nötigung im Gefolge hat, Form und Narung des Lebendigen in dessen weiterer Entwickelung auf der Stufe des Anfanges zu halten.

Aber unserm Rechte, die Klöster, soferne sie der Wissenschaft dienten, als nicht mehr zeitgemäß abzulehnen, steht erstens die Pflicht gegenüber, das was jene getan, selbst zu tun, und besser als sie zu tun. Diese Pflicht wird von ungezählten Gelehrten, welche ohne Gelübde arm, nur um des inneren Lohnes und der Wahrheit willen arbeiten, überreichlich erfüllt: allerdings die in den Klöstern vorzugsweise gepflegte Theologie, welche ja nicht Dogmatik ist, findet so wenige nicht parteiische Bearbeiter, daß man nicht vieler Zeit bedarf, um die Namen ihrer in Deutschland nennenswerten Diener samt und sonders hersagen zu können. Zweitens aber steht jenem Rechte die Pflicht gegenüber, was die Klöster an Denkmälern der Wissenschaft und Kunst uns hinterlassen haben, zu schützen und für den Gebrauch eines jeden bereit zu stellen. Und wenn jetzt überall in Europa das aus den Klöstern in die Bibliotheken Uebergegangene ohne Klausel zur Verfügung steht (nur Berlin macht seit dem 1 März 1881 durch den achten [1]) Paragraphen seiner Statuten eine rasch zu beseitigende Ausnahme), für die Erhaltung des Ueberkommenen wird noch nicht in ausreichender Weise gesorgt, und auf diesen Punkt öffentlich hin-

1) Wer eine Handschrift benutzen will, hat sich deshalb persönlich an den Oberbibliothekar oder den mit der Verwaltung der Handschriften beauftragten Beamten zu wenden und seinen Zweck näher anzugeben. Wird die Erlaubnis erteilt, so hat er persönlich seinen Namen in das Verleihbuch einzutragen und einen Revers zu unterschreiben. Wenn der Benutzer beabsichtigt, die Handschrift ganz oder teilweise abzudrucken, so hat er sich zu verpflichten, ein Exemplar der Veröffentlichung oder des die Handschrift betreffenden Teils derselben an die königliche Bibliothek unentgeltlich abzuliefern.

zuweisen, bietet die Sammlung des Grafen von Ashburnham eine nicht zu unterschätzende Gelegenheit.

In der alten Zeit schützte man die einem Kloster oder einer Kirche, einer Moschee oder Medrese gehörenden Bücher durch die auf der letzten oder ersten Seite eingeschriebenen Formeln, welche den Fluch des Himmels auf den Räuber herabriefen. Die verhältnismäßig mildeste und zugleich vorbedachteste Gestalt einer solchen Formel zeigt sich in W. Wrights syrischem Codex 946: »Jeder der diese Erinnerung (daran, daß das Buch für das Marienkloster der Natronwüste gekauft sei) löscht, dessen Namen möge im Buche des Lebens gelöscht sein«. Mit der angewünschten Löschung Gleiches bedeutet die in Wrights 17 und 87 vorfindliche Androhung der Excommunikation, die in Wrights 110 stehende Verweisung auf den furchtbaren Richterspruch Gottes. Abbas der Große, Schah von Persien, gründete zu Ehren seines 1334 gestorbenen Ahnherrn Sefi bei dessen Grabe in Ardebil im Jahre 1608 eine Bibliothek, welche Graf Paul von Suchtelen 1829, als Ardebil von den Russen erobert worden war, nach Petersburg sandte: auf dem ersten Blatte einer jeden der von ihm gewidmeten Handschriften wünscht Abbas dem der sie vom Grabe wegnehmen werde, das Schlimmste was ein Schiit wünschen kann: daß das Blut des Imam Husain, des bei Kerbela gefallenen Enkels Muhammeds, auf ihm sein möge.

Begreiflicher Weise machen derartige Ausdrücke heut zu Tage keinen Eindruck mehr, und vermutlich haben sie schon vor Alters einen Eindruck nicht in allen Fällen gemacht.

Im Morgenlande verhilft man sich zu dem Rechte zu veruntreuen dadurch, daß man die einzelnen Stücke der Bibliothek nicht einzeln katalogisiert, sondern den Aufsichtsbeamten nur dafür verantwortlich macht, daß die Zahl der Bände nicht abnehme. Alois Sprenger erzählt in der Vorrede zu seinem Verzeichnisse der arabischen, persischen und hindostanischen Manuskripte der Könige von Audh, daß einer ihrer Bibliothekare, der eine Tochter auszustatten hatte, für 2200 Mark wertvolle Werke der ihm anvertrauten Sammlung verkaufte, und eine der Zahl der veräußerten gleiche Zahl Ladenhüter auf die Bretter stellte. In Folge solcher Geschäfte besaßen die Sultane von Audh mindestens hundert Gulistâns und ebenso viele Jûsuf-ô-Zulaikhâs, das heißt, etwa hundert Stück »Erbauliches und Beschauliches aus dem Morgenlande« und hundert Stück »Luisen«, um welchen Besitzes willen sie wertvollere Schriftstücke eingebüßt hatten.

Auch in Europa ist diese Art zu stehlen nicht ohne Beispiel. Im Januar 1853 wollte ich in Paris die ältesten Ansätze zu einem Kirchenrechte studieren. Außer auf die einst Renaudots Eigentum

gewesene Handschrift, welcher die syrische Uebersetzung der Didaskalie der Apostel allein erhalten hat, kam es mir auf Coislins im Jahre 1011 geschriebenen Codex 212 an, weil er das älteste uns erhaltene Exemplar des griechischen Textes jener Constitutionen ist. Ernst Renan holte bereitwillig herbei, was ich ihm nach Montfaucons Kataloge bezeichnete: aber unter der Signatur Coislin 212 stand ein wertloser Band Heiligengeschichten: erst nach Jahren habe ich für meine Ausgabe aus Petersburg die von oder für Peter Dubrowski in Paris gestohlene Handschrift mitgeteilt erhalten.

Plumper bereitet man ein Rechtsgeschäft vor, wenn man durch Rosoglio die Verwalter einer Bibliothek in den Zustand setzt, in welchem sie für den Klang des Goldes empfänglich werden. Robert Curzon hat in seinen »Visits to monasteries in the Levant« einige Beispiele derartiger Verhandlungen erzählt: sein Ausdruck »the bottle and the bargain were concluded at the same moment« läßt genügend erkennen, wie das Geschäft gemacht worden ist.

Allein die Rücksicht auf das Fräulein Tochter des Bibliothekars, auf Rosoglio und Sovereigns mögen immerhin gegen die Pflichttreue der bestellten Wächter einer Büchersammlung angewandt werden, wo die weißen Ameisen bereits in der Nähe sind, nicht rechtzeitig beseitigte Bände zu verspeisen, oder wo es sich um das Eigentum eines Klosters wie das Marienkloster der syrischen Mönche in der Natronwüste Aegyptens handelt. Das im Jahre 411 unserer Aera in Edessa geschriebene Manuskript, aus dem ich des Titus von Bostra Widerlegung der Manichäer und die syrische Gestalt des für unsere Faustsage so wichtigen Clemensromans herausgegeben habe, eben das Manuskript, welchem S. Lee des Eusebius Buch über die Theophanie, W. Cureton desselben Eusebius Bericht über die Märtyrer Palästinas zu danken hatten, dies sonst tadellos erhaltene Manuskript diente, wie noch heute fettige Kreise auf nicht wenigen Blättern zeigen, in drei Teile zerrissen, als Deckel für die Oelkrüge der hochwürdigen Väter: die im Jahre 932 vom Abte Moses für das Kloster erworbenen Handschriften gaben, aus den Bänden gelöst, Streu für die Maultiere der frommen Bruderschaft ab. In solchen Fällen mag man an sich nehmen was fremder Leute Eigentum ist: denn der Sinn der ursprünglichen Stiftung ist vergessen, und als gewis darf gelten, daß er nie werde wieder gefunden werden.

Aber unbedingt ist das Eigentum der Jedermann zum Gebrauche offen stehenden Bibliotheken civilisierter Länder gegen Diebe sicher zu stellen, was mit den jetzt verfügbaren Mitteln nicht durchaus zu bewerkstelligen scheint.

Manche aus älterer Zeit herrührende Sammlungen haben nicht

einmal durch einen Stempel ihr Eigentum als solches gekennzeichnet. Sogar in Göttingen hatten 1869 nicht alle Bände der Universitätsbibliothek einen solchen. In Schleusingen steht im Gymnasium die von Wolfgang Seber und Joachim Zehender zusammengebrachte, in ihrer Art geradezu einzige Bibliothek, in welcher die ältesten Ausgaben der griechischen und lateinischen Klassiker und Kirchenväter sich neben den Flugblättern des dreißigjährigen Krieges, neben unserer Volkslitteratur und einer Reihe interessanter Predigten finden. Es wäre von Interesse, den Bericht zu lesen, welchen seiner Zeit der Direktor des Schleusinger Gymnasiums, Hartung, der Verfasser des »Euripides restitutus«, an das Ministerium in Berlin über die seiner Obhut und Pflege anvertrauten Schätze, welche ich zu retten mich bemüht habe, erstattet hat. Sind die Bücher jetzt als unentfremdbares Gut der alten Fürstenschule sicher bezeichnet?

Wer als der scheue, nichts verratende Altertumsfreund weiß, wie viele Bibliotheken alter Stiftung der Gier geldwütiger Barbaren rettungslos preisgegeben wären, wenn diese Umsicht genug besäßen, jene Schätze auszukundschaften? Nur den Namen Helmstedt will ich hier nennen, da Hoffmann von Fallersleben, dessen Geheimnis die dort noch bewahrten Reste deutscher Literatur waren, sie nicht mehr benutzen kann. Ich will weiter an das schamlose Treiben erinnern, welches in die Vittorio-Emanuele zu Rom viel des bedeutendsten Klosterguts nicht hat hineingelangen, und noch mehr hineingelangtes Klostergut aus ihr hat, meist nach Amerika, verschwinden lassen: denn über diese Schurkereien ist öffentlich, im italienischen Parlamente und vor Gericht, verhandelt worden, so daß man nichts Ungehöriges tut, wenn man ihrer gedenkt.

Unter besonders günstigen Umständen läßt sich ja auch jetzt Entfremdetes wieder gewinnen. Ich führe einige nachahmenswerthe Beispiele aus der Amtsführung Delisles an.

In Kopenhagen tauchte 1878 eine kleine Pergamenthandschrift auf, welche über die Stiftung des in Paris belegenen Klosters Saint Martin des Champs handelt. Sofort fand Delisle ein Mittel diese für Dänemark wenig, für Paris viel bedeutende Urkunde dem Palaste der rue Richelieu zurück zu erwerben. In Angers waren einige Blätter des Saxo Grammaticus im Einbande einer Handschrift entdeckt worden: Delisle ließ sich von der Stadt Angers diese schenken, und tauschte gegen sie in Kopenhagen jenes das Pariser Priorat des heiligen Martin behandelnde Manuskript ein.

In den Jahren 1706 und 1707 hatte ein damals viel genannter, durch den krausen, dem griechischen neuen Testamente gelehrter Observanz vorgedruckten Kram und dessen Parallelen den Mitgliedern

und Schülern der ersten Fakultät nicht sehr bekannt gewordener Abenteurer, Jean Aymon, die Bibliothek des Königs in Paris bestohlen, und seinen Raub nach England verkauft. Es war allerdings schon 1729 durch den Käufer, den Grafen von Oxford, das Wichtigste den fünf verstümmelten Manuskripten der Pariser Sammlung kostenfrei wieder zugeführt worden. Delisle aber wußte (was unsere Einleitungsschreiber nicht wissen), daß Sir Frederick Madden schon 1836 in dem Londoner Codex Harley 7551 zwei Blätter der von Aymon zerfetzten, aus dem Schatze der Abtei von Saint Denis stammenden Bibel Karls des Kahlen entdeckt hatte: er erkannte, auf Maddens Mitteilung hin weiter forschend, nach dem gedruckten Kataloge der Harley-Manuskripte, daß auch der Rest des Codex Harley 7551 verschiedenen Handschriften der französischen Bibliothek entfremdet sei. Und er fand den Weg, auf dem jene Paris gehörenden Stücke wieder nach Hause zu bringen wären. Er bot als Tauschstück für den Codex Harley 7551 dem brittischen Museum eine 242 Folianten starke, einst für Colbert gefertigte Abschrift der Denkwürdigkeiten und Staatspapiere Lomenies de Brienne an, deren Urschriften man jetzt in Paris besitzt, und sein Anerbieten wurde angenommen. Seit 1878 sind in Paris die letzten Spuren der Barbarei Aymons getilgt.

Aber es leuchtet ein, daß nur ein Kenner von Delisles Art so über das Handschriftenmaterial Europas orientiert ist, daß er sofort die Sachlage zu erfassen versteht: auch wird man schwerlich leugnen dürfen, daß die bloße Kennerschaft zu solchem Vorgehn nicht genügt, daß vielmehr die Schneidigkeit des echten Patrioten dazu gehört, in der eben geschilderten Weise zu handeln: und endlich, wer hat gleich in seinem Verwahrsame Gegengaben zur Verfügung, wie der französische Beamte sie in den beiden geschilderten Fällen hatte?

Ueberall sieht man jetzt das, meistens auch von Erfolg begleitete Streben der Regierungen, nur beste, kenntnisreiche und energische, ihren Beruf nicht als Nebenbeschäftigung ansehende Leute zur Bewahrung der uns überkommenen und der stets frisch zuwachsenden Bücherschätze zu verwenden.

Aber auch solche beste Bibliotheksbeamte müssen Werkzeuge zur Verfügung haben, um die Diebe ihrer Schätze und deren Helfershelfer und Hehler zu fassen. Durch die über die Ashburnhamsche Sammlung erwachsene Literatur ist mir auch klar geworden, welcher Art diese Werkzeuge zu sein haben.

Chardon de la Rochette hatte 1804 auf Befehl des Ministers Chaptal, der zu einem solchen Vorgehn moralisch kaum berechtigt war, in Troyes Handschriften ausgewählt, welche nach Paris übergeführt werden sollten. Unter dem Wegzuführenden befand sich ein aus der

Sammlung des Präsidenten Bouhier stammendes Decretum Gratiani, das auf dem Wege von Troyes nach Paris sich nach England verlor, in London 1873 verkauft, und 1874 in Paris ausgeboten wurde. Aber der Händler hatte seine Rechnung ohne Delisle gemacht. Durch einen acte extra-judiciaire wurde am 21 Februar 1874 die saisie-révendication eingeleitet, durch einen Spruch des zuständigen Gerichts wurde diese am 22 December 1875 für rechtsgültig erklärt, und zum heiligen Abende 1875 stand jenes Decretum Gratiani auf den bekannten Regalen der rue Richelieu als Staatseigentum, wärend der gutgläubige Antiquar, der mit ihm hatte ein Geschäft machen wollen, unter dem Christbaume eine Rechnung für Gerichts- und Beschlagnahmekosten fand, und sein in London angelegtes Geld verloren hatte.

Mir scheint unumgänglich, die über die saisie-révendication handelnden Paragraphen des französischen Gesetzbuchs mit den nötigen Abänderungen und Ergänzungen zu internationalem Rechte zu erheben, den Staat, dessen Anstalten oder Bürger durch Entfremdung von Handschriften oder Druckwerken geschädigt sind, zu einer im Falle des Gelingens kostenfreien Klage vor ausländischem Hofe zu beauftragen, das Gericht zu bestimmen, bei dem in jedem einzelnen Falle Recht zu suchen ist, und die Vollstreckbarkeit des Urteils durch unmisdeutbare, mit allen Staaten der Erde abgeschlossene Verträge zu sichern.

Der Florentiner Wilhelm Libri, aus politischen Gründen aus Italien flüchtig, in Frankreich Mitglied des Instituts, Correspondent der Berliner und vermutlich auch anderer Akademien, dieser seiner Zeit viel bewunderte Libri, welcher die erste der dem Grafen von Ashburnham gehörenden Handschriftensammlungen zusammengebracht hatte, stand in Frankreich schon 1848 im Verdachte, die seiner Obhut empfohlenen Bibliotheken der Provinzen bestohlen zu haben. Die Sache ist zur Kenntnis der Gerichte gekommen, ohne anders als im Contumacialverfahren entschieden zu werden: in diesem Verfahren, welches allerdings sehr unregelmäßig gewesen zu sein scheint, wurde Libri verurteilt. Vor mir liegt in einem starken Oktavbande ein im Jahre 1849 an den Unterrichtsminister de Falloux gerichteter Brief Libris, in welchem er seine Unschuld zu erweisen unternimmt. Libris Buch macht übrigens keinen schlechten Eindruck: auf alle Fälle bringt es interessante Beläge in Fülle über die unter Louis-Philippe übliche Misverwaltung der französischen Bibliotheken. Als der Prozess im Gange war, führte man in Deutschland und England ganz allgemein den Haß der französischen Republikaner, namentlich Aragos, gegen Libri darauf zurück, daß Libri Anhänger der Julimonarchie war. Im Jahre 1860 wandte sich Frau Libri mit der Bitte



das Urteil umzustoßen, an den französischen Senat, und wurde dabei durch eine Erklärung unterstützt, welche der alte Guizot, der Marquis von Audiffret, Prosper Merimée, Eduard Laboulaye, Victor Le Clerc, Paulin Paris, Jules Pelletier, Alfred de Wailly, Romain Merlin und Henry Cellier zu Gunsten ihrer Sache abgaben. Mir sind die Akten jenes Senats nicht zugänglich: eine englische Uebersetzung der im Interesse der Witwe Libri abgegebenen Erklärung steht in den »Times« vom 10 März 1883 abgedruckt.

Längst gewis ist, daß der 1855 gestorbene Barrois unreine Hände hatte. Schon 1866 war es von Leopold Delisle in der bibliothèque de l'école des chartes VI 2, 193 bewiesen worden. Der alte Graf von Ashburnham hatte im Spätsommer 1865 den bekannten Romanisten Paul Meyer in seinem Schlosse bei sich gehabt, und ihm zwei Exemplare seiner Kataloge übergeben, das Eine der beiden ausdrücklich für die damals kaiserliche Bibliothek zu Paris. Es kann nicht laut genug gesagt werden, daß der Graf, wenn er so handelte, fest überzeugt war, daß an seinen Handschriften nicht der mindeste Verdacht hafte. Paul Meyer ist mit Leopold Delisle befreundet, und so kam sein eigenes Exemplar jenes Katalogs sofort in Delisles Hände. Einen Codex als im Bande Karls des Neunten, einen anderen als im Bande Heinrichs des zweiten steckend bezeichnet finden, und in der Pariser Bibliothek nachforschen, ob die so bezeichneten Handschriften dort fehlten, das war natürlich das Werk einer halben Stunde. Untersuchung knüpfte sich an Untersuchung, und ohne je die Handschriften gesehen zu haben, bewies Delisle in öffentlichem Drucke, daß etwa dreißig Stücke des Fonds Barrois zwischen 1832 und 1844 der großen Schatzkammer der Rue Richelieu gestohlenes Gut sind. Die Verleumdungsklage stand jedem Beteiligten und den Erben jedes Beteiligten frei: Niemand hat sie angestrengt. Natürlich ist durch diese Tatsache und durch das was Aehnliches nach 1878 entdeckt worden ist, auch der Rest der Sammlung Barrois verdächtig geworden, den man Stück für Stück zu prüfen haben würde.

Schon 1866 erklärte Delisle, daß auch über Libris Bücher allerhand zu sagen sei. Erst im Jahre 1878 trat er dieser Untersuchung näher. Der alte Graf von Ashburnham hatte 1868 aus einer ihm von Libri verkauften Handschrift des sechsten Jahrhunderts eine alte lateinische Uebersetzung des Leviticus und der Numeri veröffentlicht. Delisle sprach in der Pariser Akademie die Vermutung aus, daß Ashburnhams Handschrift einst ein Teil der von ihm damals gerade untersuchten Pentateuchhandschrift der Bibliothek von Lyon sei, welcher genau das zur Vollständigkeit fehlte, was der englische Peer aus seinem Exemplare veröffentlicht hatte. Im Verlaufe der Ver-

handlung wies er nach, daß Ferdinand Floreus Fleck, als er noch außerordentlicher Professor der Theologie in Leipzig war, im Jahre 1834 den Lyoner Pentateuch in Lyon noch vollständig angetroffen hatte: die entscheidende Seite ist jetzt in Ulysse Roberts Ausgabe und im Atlas zu Delisles »Mélanges« im Lichtdrucke zu sehen. Auf diese Enthüllungen hin hat der Sohn des alten Grafen, indem er betonte, daß das englische Gesetz ihn im Besitze seines Erbes schütze, und daß erst eilf Jahre nach seines Vaters Publikation und Ein Jahr nach des Erblassers Tode der Sachverhalt an das Licht gekommen sei, die betreffende Handschrift an Frankreich zurückgeschenkt: sie ist jetzt mit dem Reste des Codex in Lyon wieder vereinigt, und von Ulysse Robert ist höchst sorgsam dieser Codex ganz herausgegeben worden, mir persönlich zu besonderem Nutzen.

Durch diesen Vorgang ist natürlich die Aufmerksamkeit auf jenen Fonds Libri gelenkt worden, und der unermüdliche administrateur général prüft der Reihe nach die Verlustlisten aller französischen Bibliotheken, und diese Verlustlisten liefern ihm der Reihe nach die Beweise für eine Schuld ich weiß nicht wessen: jedesfalls ist im höchsten Grade verdächtig, daß Manuskripte des höchsten Wertes aus den Bibliotheken Frankreichs vielfach unmittelbar nach der Zeit in welcher Libri sie in amtlicher Eigenschaft gemustert hatte, verschwunden, und daß diese Manuskripte in großer Zahl gerade aus Libris Händen in den Besitz des alten Grafen von Ashburnham übergegangen sind. Jene Verlustlisten liefern auf alle Fälle mir den Beweis für die Nachlässigkeit der früheren Beamten der französischen Bibliotheken, wie für die vollendete Gleichgültigkeit, mit welcher der französische Clerus an den unschätzbaren Resten des christlichen Altertums vorüber geht. Wo sind die Sirmond, die Achery, die Montfaucon, die Coustant, die Mabillon, die Baluze, die Cotelier geblieben, wenn der Verlust dieser Handschriften, um deren Benutzung ein wirklicher Theologe die größesten Opfer bringen würde, Jahrzehnte lang völlig unbemerkt bleiben kann?

Man weiß, welche Bedeutung Tours durch die in rascher Folge in ihm heimischen Bischöfe Hilarius, Martinus, Gregorius, und durch den Abt Alcuin im früheren Mittelalter für die gelehrten Studien und für weit mehr als nur diese gehabt hat. Wie viele und wie wertvolle Handschriften in und bei Tours aufgehäuft waren, ist noch heute festzustellen. Leider ist aber auch festzustellen, mit wie viel Nachlässigkeit dieser zum großen Teil uralte Besitz bewahrt worden ist. Der Leipziger Jurist Haenel sah zum Beispiel im Jahre 1826 in Tours noch 43 Manuskripte welche juristische Texte enthielten: von diesen waren 1875 nur vier übrig. Mehr als funfzig Bücher des hei-

ligen Gatian, des heiligen Martin und der Abtei Marmoutier hat jetzt Delisle in verschiedenen Bibliotheken Frankreichs und Englands nachgewiesen: im Ganzen sind in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts ganze 384 aus Tours verschwunden. Libri, der 1842 in amtlicher Eigenschaft die Bibliothek von Tours revidierte, besaß nachweislich vor 1847 die vierundzwanzig kostbarsten ihrer Handschriften, darunter drei in Uncialen, den im sechsten Jahrhundert geschriebenen lateinischen Pentateuch, dessen für die Geschichte der Kunst so überaus wertvolle Bilder, wie ich schon oben erwähnte, Oskar von Gebhardt so eben herausgegeben hat, die im siebenten Jahrhundert geschriebene lateinische Uebersetzung des größesten Teils der Propheten, des Hilarius Bücher über die Dreieinigkeit. Auch provençalische und altfranzösische Stücke hat man gestohlen. Wo es ihm paßte, hat der Dieb — ich nenne keinen Namen — auf seine Beute in einer Hand des funfzehnten Jahrhunderts falsche Ursprungszeugnisse geschrieben: er weist einen Augustin nach Verona, jenen Pentateuch nach Perugia. Es kann kaum zweifelhaft sein, daß im Fonds Libri des Grafen von Ashburnham sehr viel Gut steckt, das vorläufig nur noch nicht juristisch auf Tours hat zurückgeführt werden können.

Es ist seit 1878 zweifellos gewis, daß des Grafen von Ashburnham Manuskript der lateinischen Uebersetzung des Leviticus und der Numeri nach 1834 aus dem Pentateuche der Stadt Lyon herausgerissen, und durch Libri verkauft worden ist.

Schon seit 1866 ist zweifellos gewis, daß 67 Handschriften des Fonds Barrois von Rechtswegen der großen Pariser Bibliothek gehören: seit 1883 ist zweifellos gewis, daß noch drei andere Handschriften eben dieses Fonds denselben Ursprung haben, zwei aus Mâcon geraubt sind: ein volles Zehntel des Fonds Barrois ist nachweislich gestohlen.

Es ist zweifellos gewis, daß dreiundzwanzig Manuskripte, und zwar die wertvollsten, des Fonds Libri aus Tours, zweiundzwanzig aus Orléans, außer dem oben genannten noch fünf andere aus Lyon, ich weiß nicht genau wie viele aus Troyes stammen.

Es ist zweifellos gewis, daß Leopold Delisle, Paul Meyer und Julien Havet von französischer, Edward Bond und Edward Thompson von englischer Seite, also fünf Gelehrte, von deren Sachverständigkeit, Ehrenhaftigkeit und Besonnenheit Jedermann, soweit die Sonne scheint, überzeugt ist, sich im März 1883 ohne lange Untersuchung vergewissert haben, daß ungefähr 200 Handschriften der Fonds Libri und Barrois aus Bibliotheken und Archiven Frankreichs geraubt sind.

Es ist zweifellos gewis, daß es ein Ding der Unmöglichkeit war, in der Epoche Louis-Philippes die außer jenen nachweislich gestoh-

lenen zweihundert in den beiden Fonds vorhandenen 2425 Manuskripte allerhöchsten Wertes auf rechtmäßige Weise zu erwerben.

Leopold Delisle hat unter dem 15 Februar 1883 die Trustees des britischen Museums, welche in der Bibliothek des Grafen von Ashburnham auch die von Libri und Barrois dem Vater des Verkäufers abgelassenen Sammlungen kaufen sollten, in beredten Worten gewarnt, sich durch bedingungslosen Ankauf des Ganzen zu Teilnehmern jener vielleicht nicht mit Namen zu nennenden Diebe zu machen, und am 31 März 1883 haben die Trustees, ohne über die Diebe sich auszusprechen, ausdrücklich anerkannt, daß jene Handschriften nie hätten über die Grenze Frankreichs gehn dürfen, und daß den Franzosen Gelegenheit gegeben werden müsse, ihr Eigentum zurück zu erwerben.

Frankreich verpflichtete sich, falls der Graf von Ashburnham seinem Antrage gemäß für seine ganze Sammlung, vom britischen Museum vier Millionen Francs erhalte, dem Museum für Abtretung jener 200, indem es versprach Nichts weiter zurückfordern zu wollen, auch wenn nachträglich noch mehr sich als Eigentum seiner Sammlungen erweisen lasse, 600000 Francs zu zahlen.

Die englische Regierung ist auf den Antrag der Trustees leider nicht eingegangen: nur die England am meisten interessierende Stowe-Sammlung hat sie für 45000 Pfund erworben.

Ich verlange als Schutz gegen Bücherdiebe eine für internationales Recht zu erklärende Umarbeitung der auf die saisie-révendication bezüglichen Paragraphen des französischen Gesetzbuches. Möchten die Regierungen Europas und Amerikas sich zu einem Vertrage einigen, welcher es Dieben von Handschriften und Büchern, den mit ihnen verbundenen Hehlern und deren Nachbesitzern unmöglich macht, aus einem Diebstahle dieser Art Geldgewinn zu ziehen: dadurch werden solche Diebstähle wenn nicht ganz verhindert, so doch auf ein geringstes Maß beschränkt werden. Durch ein solches Abkommen werden die vertragschließenden Mächte auch verhüten, daß Ehrenmänner wie der letztverstorbene und der jetzige Graf von Ashburnham in eine so tragisch schiefe Lage kommen wie die durch die vorstehenden Blätter den Lesern bekannt gewordene es ist. Es ist nie bestritten worden, daß der alte Graf in gutem Glauben gekauft hat was Libri und Barrois nicht verkaufen durften: ebensowenig wird bestritten, daß des jetzigen Grafen von Ashburnham Eigentum nach englischem Rechte nicht angetastet werden kann. Nichts destoweniger haftet an Libris und des Barrois Sammlungen ein Makel, den jeder rechtschaffene Mann dem durch sein Ernstnehmen des Christentums und durch angeborenen Adel der Gesinnung ausgezeichneten letzten Besitzer dieser Samm-

lungen erspart gesehen zu haben von Herzen wünschen wird. Wäre ein Vertrag, wie ich ihn vorschlage, schon 1847 und 1849 in Kraft gewesen, so würden Libri und Barrois sich über die Herkunft ihrer Waare auszuweisen gehabt haben, und ein Enkel der Kämpfer von Hastings hätte nicht gutgläubig ein Eigentum erworben, von welchem ein Teil in den Händen seines sein Andenken mit Fug heilig haltenden Sohnes wie glühende Kohlen brennen muß. Möge der Abschluß eines solchen Vertrages durch den Nutzen, welchen er auf Jahrhunderte hinaus stiften wird, die Seelenschmerzen des Mannes lindern, dessen Misgeschick die Angelegenheit durch ein internationales Gesetz zu regeln nötig gemacht hat.

Mit der innigsten Teilnahme an des Grafen Lage werden Hunderte in Deutschland den Wunsch verbinden, daß Frankreich auf irgend einem Wege zurückerhalten möge, was ihm nie hätte entzogen werden sollen, und den andern, daß, was des Erblassers Liebe und Sorgfalt außer jenen zweihundert, eigentlich Frankreich gehörenden Handschriften an Manuskripten zusammengebracht hat, unter seinem Namen, wenn tunlich in dem in so großartiger Weise verwalteten und vermehrten britischen Museum, bald dem Gebrauche aller Gelehrten Europas möge bereit gestellt werden.

Oder sollte eine Möglichkeit vorhanden sein, daß Deutschland die Bibliothek des Grafen von Ashburnham, soweit diese noch beisammen ist, kauft? Von den vier Millionen Francs, welche 1879 gefordert wurden, sind die auf die Stowe-collection entfallenden 1,115,000 durch das britische Museum bereits gedeckt: weitere 600,000 hat für 200 Manuskripte Frankreich geboten. Es würden für den Rest 2,285,000 Francs aufzubringen sein, und was wir erwürben, ragte an Wert Berge hoch über das aus dem Besitze des Herzogs von Hamilton in den unsern Uebergegangene hinaus.

Göttingen, 5 December 1883.

Drei Inschriften von Ka*n*heri;

mitgetheilt von

Franz Kielhorn.

Für die drei Inschriften von Ka*n*heri, welche ich hier mittheile, habe ich Abklatsche benutzt, welche mein Freund Professor Bühler von Dr. Burgess, dem Archaeological Surveyor for Western and Southern India, erhalten hatte. Ich habe außerdem die Copien verglichen, welche Dr. West im 6. Bande des Journals der Asiat. Ges. von Bombay veröffentlicht hat, und bezeichne im Anschluß an West die erste Inschrift mit No. 15; die beiden andern, welche früher für nur eine Inschrift gehalten wurden und bei West als No. 43 gegeben sind, mit No. 43 A und No. 43 B. Für die Situation der Inschriften verweise ich auf Burgess, Archaeol. Survey of Western India Vol. IV, p. 64 und 70, und Vol. V, p. 87. Ein Theil des Anfangs der Inschrift No. 15 und die beiden ersten Zeilen von No. 43 A sind gelesen von Pa*nd*it Bhagvanlâl Indraji, dessen Uebersetzung sich im Journal der Asiat. Ges. von Bombay Vol. XIII, p. 11, und bei Burgess, Inscriptions from the Cave-temples of Western India p. 61 und 62 findet.

No. 15 enthält 6 Zeilen. Die drei ersten Zeilen sind jede 3,46 Meter, die beiden folgenden jede 5,26 Meter, und die letzte Zeile ist 3,47 Meter lang. Die Buchstaben sind 4 bis 5 Centimeter hoch; sie sind nicht so sorgfältig und regelmäßig eingehauen wie in 43 A, aber sie sind etwas tiefer und deshalb breiter. Die Inschrift ist ziemlich gut erhalten.

No. 43 A enthält 5 Zeilen, deren jede 2,17 Meter lang ist. Die Buchstaben haben eine Höhe von 3 ½ bis 4 Centimeter; sie sind mit Sorgfalt und Geschick eingehauen, aber außerordentlich flach. Die Inschrift ist gut erhalten außer gegen das Ende der oberen drei Zeilen.

No. 43 B enthält ebenfalls 5 Zeilen, deren jede 2,28 Meter lang ist. Die Buchstaben sind ungefähr 3 Centimeter hoch; sie sind unregelmäßig eingehauen, und sehr flach. Die Inschrift hat sehr gelitten und viele Aksharas sind mehr zu errathen als zu lesen.

Alle drei Inschriften sind datirt; No. 15 Âśvina badi 2, S'aka 775 = September 12, A.D. 854; No. 43 A S'aka 799 = A.D. 877—8; und No. 43 B, wie ich glaube, Sa*m*vat (*i.e.* S'akasa*m*vat) 765 = A.D. 843—4.

Die Sprache der Inschriften ist Sansk*ri*t, in No. 15 recht incorrectes Sansk*ri*t, und die Schrift altes Devanâgarî. Die Formen der Buchstaben sind im Wesentlichen dieselben wie in der Urkunde des Dantidurga vom Jahre S'aka 675 (*Indian Antiquary* XI, p. 110). Was insbesondere die Vocale betrifft, so dienen für auf Consonanten folgende *ŭ* und *û* nicht die schon im 10. Jahrhundert allgemein üblichen Zeichen ु und ू, sondern es wird *ŭ* durch einen an die linke Seite des verticalen Striches des Consonanten sich anlehnenden nach unten gebogenen Strich bezeichnet, und ein ähnlicher nur etwas längerer Strich wird für *û* gebraucht. In der Bezeichnung der auf Consonanten folgenden Diphthonge erscheint nirgends der vor das Consonantenzeichen gesetzte verticale Strich (also nirgends ते = *te*, तो = *to* u. s. w.). *E* wird entweder durch ein über den Consonanten gesetztes े, oder dadurch bezeichnet, daß der horizontale obere Strich des Consonanten in der Mitte gesenkt und auf beiden Seiten etwas herabgezogen wird. Zur Bezeichnung von *ai* dient die Combination der beiden Zeichen für *e*; und für *o* und *au* werden die Zeichen für *e* und *ai* unter Hinzufügung eines verticalen Striches auf der rechten Seite des Consonanten verwendet. Eingehendere Bemerkungen über die Schrift und die kleinen in den einzelnen Inschriften hervortretenden Eigenthümlichkeiten (— in No. 15 geht der *â*-Strich nicht so tief herunter wie in No. 43 A; das über einem Consonanten stehende *r* ist in 15 gebogen, in 43 A eckig; auf Consonanten folgendes

tha wird in 15 durch ɵ, in 43 A durch ɑ bezeichnet; u. s. w. —) glaube ich mir hier um so eher ersparen zu dürfen als Dr. Burgess Photographien der Abklatsche veröffentlichen wird.

Was den Inhalt betrifft, so sind die Inschriften, Urkunden von Schenkungen an die Mönche des Klosters zu Ka*n*heri, von allgemeinem Interesse als Zeugnisse für den Bestand des Buddhismus im westlichen Indien während der zweiten Hälfte des 9. Jahrhunderts. Sie haben außerdem einigen Werth für die Geschichte, weil sie uns für die Regierung des Râsh*t*rakû*t*a Königs Amoghavarsha (S'arva, *Ind. Antiquary* XII, p. 180) die Daten S'aka 765(?), 775, und 799, für die Regierung des von jenem abhängigen S'ilâhâra Fürsten des Konka*n* Pullas'akti das Datum S'aka 765(?), und für dessen Nachfolger Kapardin (II, laghu) die Daten S'aka 775 und 799 liefern; und bestätigen daß Amoghavarsha der Nachfolger des Jagattunga (Govinda III), und Pullas'akti der Nachfolger des ältern Kapardin, ebenfalls eines Vasallen des Amoghavarsha, gewesen ist. Beachtung verdient auch daß der Name des zweiten der erwähnten Konka*n*a-Fürsten in den vorliegenden Inschriften nicht, wie in der Urkunde des Chittarâjadeva (*Ind. Antiquary* V, p. 277) und in der zu Khârepâ*t*an aufgefundenen S'ilâhâra Urkunde (*l. c.* IX, p. 33), पुल्लसक्ति, sondern पुल्लशक्ति geschrieben wird. Im Übrigen verweise ich auf Pa*nd*it Bhagvanlâl Indraji, Journal der As. Ges. von Bombay Vol. XIII, p. 11—13; Fleet, Dynasties of the Kanarese Districts, p. 35; desselben Inschriften in Vol. XI und XII des *Ind. Antiquary*; Bühler ebendaselbst Vol. VI, p. 59 und V, p. 276; und Telang, IX, p. 33. — Ueber die in No. 43 B genannte Hauptstadt des Konka*n* Purî vergleiche man *Ind. Antiquary* V, p. 278, Plate II. A., Zeile 5, und IX, p. 35, Plate III, Zeile 64, und die Bemerkungen der Herausgeber der Inschriften.

Inschrift No. 15.

(1) ओं स्वस्ति शकनृपकालातीतसम्वत्सरशतेषु सप्तसु पंचसप्त-
तिष्वंकतः अपि सम्वत्सरशः ७७५ तदन्तर्गतप्रजापतिसस्वत्स-
रान्तःपातिआश्विनवहुलद्वितीयायां वुधदिने अस्यां सम्वत्सर-
(2) मासपक्षदिवसपूर्वायां तिथौ परमभट्टारकमहाराजाधिराज-
परमेश्वरश्रीमज्जगत्तुंगदेवपादानुध्यातपरमभट्टारकमहाराधिराजप-
रमेस्वरश्रीमदमोघवर्षदेवप्रवर्द्धमा-
(3) नविजयराज्ये तत्प्रसाकृतः अशेषकोंकणावल्लभः श्रीपुल्लश-
क्तिः समधिगतपञ्चमहाशब्दमहासामन्तशेखरः तत्पादानुध्यातस-
मधिगतपञ्चमहाशब्दमहासामन्तशेखरः श्रीपँपर्द्दिराजः प्रवर्द्ध-
(4) मानविजयराज्ये इहैव गौडविषयादागतः परमसौगतः गौमि-

(1) अपि सम्वत्सरशः — Von अपि sind nur geringe Spuren erhalten und सम्व ist undeutlich. Das letzte Zeichen sieht auf der Vorderseite des Abklatsches und bei West dem त ähnlich, aber auf der Rückseite des Abklatsches ist Visarga zu erkennen.

आश्विन° — Bei oberflächlicher Betrachtung könnte माश्विर gelesen werden; eine genauere Prüfung zeigt, daß das erste Akshara आ und das letzte न ist; auch das व ist unter dem श deutlich zu erkennen.

°द्वितीयायां वुध° — Der obere Theil der Aksharas यां वुध ist undeutlich.

सम्वत्सर° — सम्व ist sicher; das folgende त्स sieht wie यु aus, und र könnte mit क verwechselt werden. Man vergleiche aber अस्यां संवत्सरमासपक्षवारपूर्व्विकायां तिथौ z. B. *Ind. Antiquary* VI, p. 195, und besonders अस्यां संवत्सरमासपक्षदिवसपूर्व्वायां तिथौ *l. c.* XII, p. 126 und 155.

(3) तत्प्रसाकृतः — Visarga ist sehr undeutlich, aber zu erkennen.

श्रीपुल्लशक्तिः — Das obere ल von ल्ल ist undeutlich, aber zu erkennen. Visarga ist deutlich.

श्रीपँपर्द्दिराजः प्रवर्द्ध° — Auf der Vorderseite des Abklatsches sind ganz deutlich nur die Aksharas श्री, र्द्दि, und रा; auf der Rückseite sind auch प (vor र्द्दि), जः, und प्रवर्द्ध zu erkennen. Das auf श्री folgende Akshara ist प; darüber steht das Zeichen ˇ, und darunter glaube ich in kleinerer Schrift ein ऋ zu erkennen.

(4) °दागतः — Visarga ist undeutlich, aber zu erkennen.

नः अविघ्नाकरेण अस्मीं श्रीकृष्णगिरिमहाराजमहाविहारे उपश-
मकोल्लिह्वेश्मिकाः सचीवरिकाः समेता अन्नेनीतिः द्रम्मशते-
केन कारापिताः इयं चान्नयनीतोर्यावदहं जीवामि तावन्ममो-
पभोगः ममोपरतौ क्षशलैः कारो निव्रूप्यानश्यं दा-
(5) तव्या न परिपन्थना कार्या यः प्रलेपिष्यति स अवीचिपरी-
तापकुम्भीपाकादिषु नरकेषूत्पत्स्यते श्वानोद्गीर्णगोमांसं स भ-
क्षयिष्यत्येव व्यवस्था चार्यसंघस्य पुरतो आरोच्य प्रतिष्ठाप्य
लिखापिता साक्षिणश्चात्र पात्तियाणकयोगनामा चिख्यल्लपल्लि-
काआचार्यश्चात्र साक्षी। पण्यं मन्त्री[?]साक्षिणां भो

अस्मीं — Anusvâra ist deutlich.

°कोल्लिह्वेश्मिकाः सची° — Ganz deutlich sind nur कोल्लि und का. Unter ल्ल sind Spuren eines Buchstaben erhalten, den ich für ह्व halte. Zwischen ल्लि und का glaube ich zu erkennen व, ि, und Spuren von श्म unter dem noch ein Buchstabe gestanden haben muß. Auch glaube ich Visarga hinter का zu erkennen. Das auf काः folgende स ist nur theilweise sichtbar, und das च von ची fast ganz verschwunden. Siehe Inschrift 43 A, Zeile 3.

°वरिकाः — Visarga ist undeutlich, aber zu erkennen.

इयं — Anusvâra ist sichtbar.

°भोगः — Der Seitenstrich des ो ist fast ganz verschwunden.

क्षशलैः — क्ष und श sind deutlich; von लै ist nur der untere Theil (ल) ganz sicher. Visarga glaube ich deutlich zu erkennen.

°श्यं दा° — Anusvâra und der *â*-Strich von दा sind undeutlich, aber zu erkennen.

(5) स — Es ist möglich, daß auf dem Steine सो gestanden hat.

°परीतापकुम्भी° — ताप ist undeutlich, der *u*-Strich unter क ist nicht zu erkennen, und von dem भ unter म ist nur ein Theil sichtbar.

चार्यसंघस्य — Von चा ist nur der untere Theil des च zu erkennen.

पुरतो — Der Seitenstrich des ो ist undeutlich.

°पल्लिका — Das zweite (untergeschriebene) ल ist undeutlich.

पण्यं मन्त्रीसाक्षिणां — Deutlich erscheint auf der Vorderseite des Abklatsches nur पण्यमन्त्रीसाक्षिण; ausserdem glaube ich sicher zu erkennen Anusvâra über ण्य von पण्य, und ां hinter साक्षिण; dagegen bin ich zweifelhaft über den *r*-Strich unter न्त्री in मन्त्री.

भो — ो ist deutlich.

(6) भो दिव्य वुड्ढ श्रो कदाचीदपात्रं सत्वापाचारिणो साधाचार्-
स्य प्रतिपादयिष्ये स पात्रेणोपतिष्ठेत्तस्य पापादर्शनादेवावश्यं
दातव्यं अत्र यत्किंचिदूनातिरमधिकातिरं यत्तत्सर्वं प्रमाणमिति

(6) भो दिव्य वुढ श्रो — Von व्य ist der untere Theil des व verschwunden, und der *y*-Strich sehr undeutlich, aber noch zu erkennen. Von वुढ ist nur die obere Hälfte ganz deutlich. Von श्रो ist nur soviel sichtbar, daß das Akshara fast wie श्रो aussieht; (श्रो ist in ähnlicher Weise verstümmelt in Zeile 5 der Inschrift 43 A). Ob Visarga hinter श्रो gestanden hat, kann ich nicht entscheiden.

°पात्रं — Anusvâra ist undeutlich, aber zu erkennen.

सत्वापाचारिणो — Der untere Theil von त्वापा und der *â*-Strich des त्वा sind undeutlich.

°पतिष्ठेत्तस्य — Von ष्ठे ist nur das untergeschriebene ठ ganz deutlich.

पापादर्शना° — Von पाद् sind nur geringe Reste sichtbar.

°श्यं दातव्यं — Beide Anusvâras sind sehr undeutlich.

यत्किंचि° — त्किं ist deutlich.

°धिकातिरं — Von तिरं ist der untere Theil verschwunden.

प्रमाणमिति — Von ति ist nur ein Theil des ि sichtbar.

Uebersetzung.

Om! Heil! Am Mittwoch, dem zweiten der dunklen Hälfte des Monats Âśvina im laufenden Jahre Prajâpati, als siebenhundertfünfundsiebzig Jahre — ebenso in Zahlen, 775 Jahre — der Aera der S'aka-Könige verflossen waren[1]), am vorbenannten (zweiten) lunaren Tage der genannten Hälfte des genannten Monats und Jahres; unter der glorreichen sieggewohnten Regierung des höchsten Herrn (*Parama-bhattâraka*), des Oberkönigs der Großkönige, des höchsten Herrschers[2]), des erhabenen Königs **Amoghavarsha** (*Amoghavarsha-deva*), — der mit Ehrfurcht gedenkt des höchsten Herrn (*Parama-bhattâraka*), des Oberkönigs der Großkönige, des höchsten Herrschers, des erhabenen Königs **Jagattunga** (*Jagattunga-deva*); unter der glorreichen sieggewohnten Regierung des erlauchten Königs **Kapardin** (*Kapardi-râja*), der Zierde der großen Vasallen, der sich der fünf mit *Mahâ* 'Groß' anfangenden Titel erfreut, —

und der mit Ehrfurcht gedenkt des erlauchten **Pullaśakti**, der Zierde der großen Vasallen, der sich der fünf mit *Mahâ* 'Groß' anfangenden Titel erfreute, des Fürsten des gesammten Konkana in Gnaden ihm verliehen von (Amoghavarsha)[3]; — da habe ich, der *Gomin* Avighnâkara, ein eifriger Verehrer des Sugata, hierher gekommen aus dem Lande Gauda, in diesem großen Kloster am berühmten Krishnaberge (zu Kanheri) für die religiöse Erbauung (der Mönche geeignete) Hallen-wohnungen errichten lassen, und habe als dauernde Stiftung einhundert *Drammas* geschenkt (aus deren Zinsen die Mönche) Kleidung erhalten sollen[4]. Weiter (verfüge ich): so lange ich lebe, habe ich selbst den Nießbrauch dieser dauernden Stiftung; wenn ich nicht mehr bin, sollen erfahrene Männer einen Zins bestimmen der unter allen Umständen (zu obigem Zwecke) gegeben werden soll[5]. Niemand suche dies zu hindern; wer (von dem Capital oder den Zinsen) sich selbst etwas aneignen sollte[6], der wird in den *Avîchi*, *Paritâpa*, *Kumbhîpâka* und den andern Höllen wiedergeboren werden; wahrlich, der wird von Hunden ausgespieenes Kuhfleisch zur Nahrung haben.

Die Stiftung ist vor der ehrwürdigen Brüderschaft gebilligt[7], eingesetzt, und urkundlich niedergeschrieben. Zeugen dafür sind der *Pâttiyânaka* Namens Yoga und der *Âchârya* von Chikhyallapallikâ[8]. — Religiöses Verdienst [dem Stifter(?) und] den Zeugen[9].

Oh, Oh, himmlischer Buddha! Faustum sit! Nimmer sind würdige Empfänger die welche den Wesen Harm zufügen. Dem, der frommen Wandels ist, will ich geben; er nahe sich als würdiger Empfänger! Ihm soll sicherlich, weil er sündlos befunden, gegeben werden.

Was auch immer in dieser (Urkunde) zu wenige Buchstaben, und was zu viele Buchstaben enthält, Alles hat Gültigkeit[10].

Bemerkungen.

1) शकनृप⁰ .... बुधदिने. — In der Bezeichnung des Datums sind ungewöhnlich der Ausdruck संवत्सरशः und die Wendung तदन्तर्गतप्रजापतिसंवत्सरान्तःपात्याश्विन⁰; für ersteres erwartete man संवत्, oder शकसंवत्, oder संवत्सराणाम्; und *tadantargata* ... *samvatsarántahpátin* in letzterem scheint gleichbedeutend mit dem üblichen *pravartamána-* (oder *vartamána-*) ... *samvatsarántargata*. (Siehe die Sammlung von Beispielen bei Fleet im *Ind. Antiquary* XII, p. 207 ff.). — Das Prajâpati-jahr des *Bri*haspati-cyclus entspricht nach den von Warren und von Schram (Hilfstafeln für Chronologie pp. 48 u. 49) gegebenen Regeln und Tafeln nicht dem laufenden S'aka-jahre 776, sondern dem Jahre 774, und Fleet (Dynasties of the Kanarese Districts p. 35) will darum für 775 in der Inschrift 773 setzen. Indessen wird die Richtigkeit der Zahl 775 dadurch bewiesen daß (nach der Berechnung meines Freundes Professor Jacobi) *ás'vina ba di* 2 weder im laufenden Jahre 774 noch in 775, wohl aber im Jahre 776 (oder 775 *atíteshu*) auf einen Mittwoch fiel. Das Datum entspricht dem 12. September 854 A. D.

2) Man verbessere in der Inschrift ⁰महाराजाधिराजपरमेश्वर⁰.

3) Ich stelle die Worte so: तत्प्रसादीकृताशेषकोङ्कणावल्लभसमधिगतपञ्चमहाशब्दमहासामन्तशेखरश्रीपुल्लशक्तिपादानुध्यातसमधिगतपञ्चमहाशब्दमहासामन्तशेखरश्रीकपर्दिराजप्रवर्धमानविजयराज्ये.

4) इहैव ... कारापिताः — Der ganze Satz, über dessen Sinn ein Vergleich der ältern Inschriften von Junnar, Nâsik und namentlich von Kanheri selbst im Allgemeinen keinen Zweifel lassen kann, ist unklar gedacht und im Einzelnen ungrammatisch und nachlässig niedergeschrieben. Was den letzteren Punkt betrifft, so ist, wie mir scheint, das Wort महाराज vor महाविहारे zu streichen, und der Hauptsatz so zu verbessern: इहैव गौडविषयादागतेन गोमिनाविघ्नाकरेणास्मिञ्छ्रीकृष्णगिरिमहाविहार उपश्रमकोल्हिवेश्मिकाः कारापिताः. Der Sinn der Worte अक्षैनीतिः द्रम्मशतैकेन würde dann nach dem Vorgange der ältern Inschriften wiederzugeben sein durch अक्षयनीवी च दत्ता द्रम्माणां शतमेकम्; und der

in den Worten सचीवरिकाः समेताः*) angedeutete Zweck des Capitals wäre entweder einfach durch चीवरिकार्थम् oder durch einen dritten die Worte चीवरिकं दातव्यम् enthaltenden besondern Satz auszudrücken. — Man vergleiche Burgess, Archaeol. Survey of W. India, Vol. IV, p. 102, Nâsik 7 *ima lena niyâtitaṁ* [।] *data chanena akshaya nivi;* p. 115, Nâsik 20; Vol. V, p. 79, Ka*n*heri 15; p. 80, Ka*n*heri 16, Z. 6, und 10 (*akhâ nivî*); p. 81, Ka*n*heri 17 *akhayanivi dinâ* [।] *eto chivarikaṁ dâtava;* p. 82, Ka*n*heri 18; p. 83, Ka*n*heri 21; p. 83, Ka*n*heri 22 *lenaṁ podhi kodhi cha patithâpitâ* [।] *akhaya nivi cha dinâ . . . eto cha bhikhusaghe chevarika dâtava;* p. 84, Ka*n*heri 26; p. 85, Ka*n*heri 28. Man vergl. auch V, p. 76, Ka*n*heri 5, Z. 4, 8, und besonders 10 *saghârâmo sa-akhaya-niviko kârâpito.* —

कोल्हि in °कोल्हिवेश्मिकाः halte ich für das Wort *ko*dh*i* der ältern Inschriften; *l. c.* Vol. IV, p. 88, Mahâd 2; vol. V, p. 76, Ka*n*heri 5; p. 79, Ka*n*heri 15; p. 83, Ka*n*heri 22. Das Compositum उपग्राम° löse ich in Anschluß an Inschrift 43A, Z. 3 auf durch उपग्रामसदृश्यः कोल्हिवेश्मिकाः.

5) Ich lese: इयं चाक्षयनीविर्यावदहं जीवामि तावन्ममोपभोगः। ममोपरतौ कुशलैः कारी निरूप्यावश्यं दातव्या।. Das Wort कारी in der Bedeutung 'Zins' kann ich durch keine andre Stelle belegen; man vergleiche aber कारिका für welches jene Bedeutung nach dem Pet. Wörterbuche von den Lexicographen angegeben wird. Wenn der Zins erst später bestimmt werden soll, so scheint dies dadurch begründet, daß der Stifter sich den Nießbrauch des Capitals für seine Lebzeit reservirt hat.

6) Man verbessere in der Inschrift यः प्रलोप्स्यति सोऽवीचि°, und vergleiche z. B. *l. c.* Vol. IV, p. 86, Ku*d*a 10, *yo lopayet paṁchamahâpâtakasaṁyukto bhavet.*

7) Man verbessere पुरत चारोष्य, und vergleiche Inschrift 43 A, Z. 5.

---

*) Im Texte der Inschrift ist सचीवरिकाः समेताः nähere Bestimmung zu °वेश्मिकाः, und man erwartete dafür entweder einfach सचीवरिकाः oder चीवरिकसमेताः. Vergl. चीवरिकादिलाभसमन्विता कोल्हिवेश्मिका in No. 43 A, Zeile 3.

8) Man verbessere चिख्यल्लपल्लिकाचार्य°; das अत्र साक्षी hinter आचार्यस्य scheint mir überflüssig wiederholt. — Es liegt nahe zu vermuthen dass Chikhyallapallikâ der Name eines benachbarten Dorfes war, in oder bei dem sich ein Kloster befand. Ortsnamen wie Chiklee, Chikhulthân etc. sind noch heute sehr gewöhnlich. (Man vergl. चिक्खल्ल = कर्दम Deśînâmamâlâ III, 11; Hem. Prâk. III, 142; das Marâṭhî चिखल; und Ortsnamen wie Devabhadripallikâ, Ind. Ant. VI, 10; Aśilâpallikâ, Siṁhapallikâ, Pangulapallikâ *l. c.* VII, 71, 73, 76 etc.)

Der *Pâttiyânaka* oder *Pattiyânaka* Yoga fungirt als Zeuge auch in der Inschrift 43 A, wo neben ihm als Zeugen erscheinen der in dieser Inschrift als Donor genannte *Gomin* Avighnâkara und der *Âchârya* Dharmâkaramitra. Für die Bedeutung von *Âchârya* verweise ich auf Kern's Buddhismus II, p. 37 Anm. und p. 72. Unter *Gomin* wird ein gelehrter Laie zu verstehn sein, der eine ansehnliche Stelle im Etablissement des Klosters bekleidet haben und so auch als respectabler Zeuge zur Hand gewesen sein mag. Wahrscheinlich war auch der *Pattiyânaka* ein Beamter des Klosters, und ich vermuthe, daß das Wort mit पत्त्रिका 'Schriftstück, Document' zusammenhängt. Mein Freund Bühler vergleicht das Wort *pattiyan*, für welches (Wilson, Revenue terms) die Bedeutungen 'heir, administrator' gegeben werden.

9) Der Satz पुण्यं ... साक्षिणां entspricht dem Satze पुण्येन तिरेम der Inschrift 43 A, und ich suche darin den Sinn, daß das durch die Stiftung erworbene religiöse Verdienst dem Geber und den Zeugen zu Gute kommen soll. Ich bin durchaus nicht sicher, daß मन्त्रिन् je die Bedeutung 'Stifter einer Schenkung' hat oder haben kann, weiß aber, da die Aksharas मन्ती sicher sind, nichts anderes vorzuschlagen. ई *könnte* wie in कदाचीद्° in Z. 6 für इ stehn.

10) In der mit कदा° anfangenden Nachschrift ist wenigstens zu verbessern कदाचिद्पात्रं सब्राह्मणचारिणः und अत्र यत्किंचि°. Der Singular in कदाचिद्पात्रं und der Instrumentalis in स पात्रेणोपविष्टेत् sind, falls ich die Worte richtig verstanden habe, ungram-

matisch. Zum Schlusse vergleiche man z. B. *Ind. Antiquary* V, p. 279, Z. 14.

Inschrift No. 43 A.

(1) ओं स्वस्ति शकनृपकालातीतसम्वत्सरशतेषु सप्तसु नवन-
वत्यधिकेष्वंकतः ७९९ महाराजाधिराजपरमेश्वर श्री-
(2) मदमोघवर्षदेवप्रवर्द्धमानविजयराज्ये तत्प्रसादीकृतकोंकणव-
ल्लभमहासामन्तशेखरश्रीकपर्द्दिप्रवर्द्धमानाधिपत्ये श्रीमत्कृष्णगि-
रिमहावि-
(3) हारे भद्रश्री[विष्णु]र्भिक्षूणां तत्रस्थार्यसंघस्य द्रम्माणां शतमेकं
द्रव्योपशमनसदृशां चीवरिकादिलाभसमन्वितां कोल्हिवेश्मिकां
न्नि[त्यां न्यवीविश]त्संयमार्यभि रे-

(1) **ओं ist undeutlich, aber vorhanden,**
°ष्वंकतः — Anusvâra über ष्व ist sichtbar.

(2) **धिपत्ये श्री° ist etwas undeutlich, aber sicher.**

(3) **°हारे — Von हा steht auf dem Abklatsche nur der *â*-Strich; West hat हा. Der *e*-Strich über र ist deutlich.**
भद्रश्रीविष्णुर्भिक्षूणां — भद्रश्री und र्भिक्षूणां ist sicher. An Stelle von विष्णु erscheint auf der Vorderseite des Abklatsches त्वेव oder etwas ähnliches; eine genauere Prüfung aber läßt das ि des ersten Akshara deutlich erkennen, und zeigt, daß das zweite Akshara weder व noch न gewesen sein kann und daß darunter ein ण gestanden hat. Man vergleiche (भद्र)श्रीविष्णु in Zeile 2 und 3 der Inschrift 43 B. Zwischen भद्रश्री und विष्णु erscheinen Spuren eines Visarga, welches von dem *i*-Strich des वि durchschnitten wird.
°संघस्य ist undeutlich, aber noch zu erkennen.
द्रव्यो° — Das र von व्यो ist undeutlich, der Rest klar.
कोल्हिवेश्मिकां — Auf der Vorderseite des Abklatsches erscheint deutlich कोल्लिवश्मकां; die Rückseite läßt auch den *e*-Strich über व und das ि vor श्म mit Sicherheit erkennen. Außerdem steht unter dem ल्ल ein Zeichen das ich für ह halte, und eins unter श्म in dem ich म erkenne.
न्नि[त्यां न्यवीविश] — Sicher ist nur न्नि und vielleicht त्यां. न्यवीविश° scheint mir am besten zu den vorhandenen Resten der vier Aksharas zu passen, welche zwischen °त्यां und °त्संयमा° gestanden haben. Man ver-

(4) वानुकम्पामुपादाय यावच्चन्द्रार्क्कादयः प्रतपन्विताास्तावत्प्र-
तिपाल्या यस्तु न प्रतिपालयिष्यति स पंचानन्तर्यकर्म्मका - -
र्यत्रीच्यादिषु मह्द्दुःखमुनभविष्यति व्यवस्थेयं
(5) चार्यसंघस्य पुरतो आरोच्य प्रतिष्ठाप्य लिखापिता। सान्नि-
ण्यश्चात्राचार्यधर्म्माकरमित्रः गोम्यविघ्नाकरः पत्तिया[पाक]योगः
पुण्येन तिरेमेति श्री श्र

gleiche *udâram nyavîvis'ad ves'ma yatîndra(sevyam)* in Ajanta Inscriptions No. 3, Zeile 18; bei Burgess, Archaeol. Survey, Vol. IV, p. 125.

°भि-रे° — Die vorhandenen Zeichen sind deutlich; ich vermuthe natürlich °भिक्षोरे°.

(4) °न्वितास्ता° — Von स्ता ist der grössere Theil verschwunden.

यस्तु — Von स्तु ist nur der obere Theil des स und das untergeschriebene *u* zu erkennen.

°कर्म्मका ·· र्य° — Ich kann nicht erkennen ob zwischen का und र्य noch zwei Aksharas gestanden haben. Sollte es der Fall sein, so würde ich कार्य vermuthen und annehmen daß diese Aksharas absichtlich entfernt worden seien.

(5) °मित्रः, °करः — In beiden Fällen ist Visarga undeutlich.

पत्रिया[पाक]योगः — पा ist fast ganz verschwunden, und von क fehlt der verticale Seitenstrich; möglicher Weise hat auf dem Steine को gestanden. Visarga hinter योग ist sehr undeutlich, und das ग von योग selbst sieht dem modernen गु ähnlich.

पुण्येन तिरेमेति — Auf der Vorderseite des Abklatsches ist nur पुण्यनति zu lesen; die Rückseite zeigt deutlich पुण्येन तिरे, und bei sorgfältiger Prüfung auch die Aksharas मेति.

श्री sieht auf der Vorderseite fast wie स्त्री aus. Vielleicht hat Visarga dahinter gestanden.

Uebersetzung.

Om! Heil! Als siebenhundert und neunundneunzig — in Zahlen, 799 — Jahre der Aera der S'aka-Könige verflossen waren; unter der glorreichen sieggewohnten Regierung des Oberkönigs der Großkönige, des höchsten Herrschers, des erhabenen Königs **Amoghavarsha** (*Amoghavarsha-deva*); unter der glorreichen Herrschaft des erlauchten

Kapardin, der Zierde der großen Vasallen, des Fürsten von Konka*n*a (*Konkana-vallabha*) in Gnaden ihm verliehen von (Amoghavarsha); — da schenkte[1]) im großen Kloster am berühmten K*r*ish*n*aberge (zu Ka*n*heri) Vish*n*u — möge das Glück ihm hold sein! — den Mönchen der daselbst weilenden ehrwürdigen Brüderschaft einhundert *Drammas* und ließ in der Erde eine für religiöse Erbauung geeignete Hallen-wohnung errichten, wo (die Mönche) Kleidung und andere (Gaben) empfangen sollen. Diese (Wohnung und die mit ihr verbundene Stiftung) soll man aus Mitgefühl mit den ehrwürdigen Mönchen hüten so lange Mond und Sonne und die übrigen (Gestirne am Himmel) glänzen[2]). Wer sie aber nicht hüten sollte, der macht sich der fünf unsühnbaren Missethaten[3]) schuldig und wird in der *Avîchi* und den andern (Höllen) grosses Leid erdulden.

Diese Stiftung ist vor der ehrwürdigen Brüderschaft gebilligt[4]), eingesetzt, und urkundlich niedergeschrieben. Zeugen dafür sind der *Âchârya* Dharmâkaramitra, der *Gomin* Avighnâkara, (und) der *Pattiyânaka* Yoga. — Möchten wir durch religiöses Verdienst selig werden! Quod faustum sit[5])!

Bemerkungen.

1) Man verbessere दत्त्वोपशमनसदृशीं.

2) Man verbessere प्रतापान्विता°.

3) पंचानन्तर्यकर्म°. — Nach Childers (*s. v. pañcánantariyakammaṁ*) genauer 'die fünf Sünden, denen die Strafe unmittelbar auf dem Fusse folgt', Muttermord u. s. w., die gewöhnlicher als *mahâpâtaka* bezeichnet werden.

4) Man verbessere पुरत आरोप्य.

5) Bei West stehn unter Z. 5 noch fünf Aksharas, die mir im Abklatsche nicht vorliegen.

Inschrift No. 43 B. *)

(1) श्रीं (श्री)महाराजाधिराजपरमेश्वरपृथ्वीवल्लभश्रीमदमोघवर्षश्री-
महारा(ज)ः प्रवर्द्धमानविजयराज्ये तत्प्रसा(दावाप्त)महा(सा)मन्त-
को-
(2) ङ्कणावल्लभ(श्री[कपर्द्दिपादानुध्या]त)श्रीपुल्लशक्तिम(हाधिपे)
पुरीप्रभृतिकोङ्कणाविषयं (सर्व्वत)ः प्रशासति तत्पादानुजीवी पुरा-
णा(मा)त्यो (भद्र)-
(3) श्रीविष्णु(·प्तो··ध्य)त्तश्रीपू(र्ण)हरिसुतः श्रीकृष्णगिरौ श्रीम-
दार्यसंघं प्रणम्यातिकृपया ·· ति(श्री)भगव(त्प्रीत्य)र्थं विंशतिं
([द्रम्मा]णां)
(4) ([इ]हास्मि[न्ने]व वि[हारे व्यस्तव्या]कीर्ण[परिष्कारणा]र्थं
द्रम्माणां)त्रयं चीवरो(भ्यो) आर्यसंघ(स्य द्रम्माणां) पञ्च दा(प)नी-
याः (पुस्तका[र्थमे]को द्रम्मः)
(5) (अन्नेनो[वि]र्द्रम्मा)श्चत्वारिंशच्चत्वारिंश(त् कांचन)द्रम्मशतं विं-
शत्युत्तरं (रचै)तेषां द्रम्माणां कल(त्रपुत्रव)त्प्रतिपालनीया सम्व
(७६५)

Uebersetzung.

Om! Unter der glorreichen, sieggewohnten Regierung des erhabenen Oberkönigs der Großkönige, des höchsten

---

*) Da diese Inschrift stellenweise sehr gelitten hat, so halte ich es für angemessen, undeutliche Aksharas die ich richtig gelesen zu haben glaube, in runde Klammern einzuschließen; *sehr* undeutliche oder fast ganz verschwundene Aksharas, für deren Richtigkeit ich nicht in jedem Falle einstehn kann, gebe ich in eckigen Klammern. In der Uebersetzung gebe ich in eckigen Klammern alles was in der Inschrift undeutlich ist.

Herrschers, des Erdenfürsten (*Prithvî-vallabha*), des erhabenen **Amoghavarsha**, des erhabenen Großkönigs; während der erlauchte [große Oberherr] **Pullaśakti** Purî und das [ganze] übrige Konka*n*a-land beherrscht, — (Pullaśakti) der [mit Ehrfurcht gedenkt] des großen Vasallen, [des erlauchten **Kapardin**], des Fürsten von Konka*n*a (*Konkana-vallabha*) [sein eigen] durch die Gnade des (Amoghavarsha)[1]); — da . . . der dem (Pullaśakti) ehrfurchtsvoll untergebene alte Minister Vish*n*u [. .], — möge das Glück [ihm hold sein!] — der Sohn des hochachtbaren Hari, [des Aufsehers . . .], nachdem er der hochehrwürdigen Brüderschaft am berühmten K*ri*sh*n*aberge (zu Ka*n*heri) seine Verehrung bezeigt hat, aus großer Herzensgüte . . . .[2]) die ehrwürdigen (Mönche) zu erfreuen zwanzig [*Drammas*; hier in diesem Kloster verfallenes und schadhaftes auszubessern] drei [*Drammas*]. Für Kleidung der ehrwürdigen Brüderschaft sind fünf [*Drammas*] zu verausgaben, [für Bücher ein *Dramma*. (Das Capital der) dauernden Stiftung (beträgt)] vierzig [*Drammas*], vierzig, (und) hundert und zwanzig *Drammas* [in Gold[3]). Die Bestimmungen] (über die Verwendung der Zinsen) dieser *Drammas* sollen wie Weib [und Kind] gehütet werden. Im Jahre [765].

Bemerkungen.

1) Ich stelle die Worte so: तत्प्रसादावाप्तकोङ्कणवल्लभमहासामन्त-श्रीकपर्दि°. Mit °महाधिपे vergleiche man श्राधिपत्ये in Z. 2 der vorangehenden Inschrift.

2) Hinter °कृपया muß ein Verbum wie ददाति 'er schenkt' gestanden haben, von dem die folgenden Accusative विंशति und त्रयं abhängen.

3) In den in Vol. IV und V der Archaeological Reports of Western India mitgetheilten Inschriften werden die Beschaffung von Kleidung und Nahrungsmitteln für die Mönche und das Instandhalten der Klostergebäude am häufigsten als die Zwecke bezeichnet, für welche die Zinsen eines ge-

schenkten Capitals zu verwenden sind; daneben erscheinen vereinzelt Schuhe, der Almosentopf, Arzeneien, Lichte, und *Kus'ana* (?). In den Schenkungsurkunden von Valabhî (*Ind. Antiquary* I, p. 46; IV, 105; 175; V, 207; VI, 12; 15) werden genannt die Reparaturen der Klostergebäude (विहारस्य पतितविशीर्णप्रतिसंस्कारणाय, विहारस्य खण्डस्फुटितविशीर्णप्रतिसंस्कारणाय etc.); die Beschaffung von Blumen, wohlriechenden Substanzen, Räucherwerk, Oel etc. (गन्धपुष्पधूपदीपतैलादि°, etc.); Kleidung, Almosen, Arzeneien (चीवरपिण्डपातग्लानभैषज्यादि° etc.); und in einer Urkunde des Guhasena (*l. c.* VII, 67) ausserdem der Ankauf von religiösen Büchern (सद्धर्मस्य पुस्तकोपक्र—). Zu allem diesem stimmt genau die in dieser Inschrift vorgeschriebene Vertheilung der Zinsen, denn ich nehme an, daß die zuerst genannte Summe von zwanzig *Drammas* für den Unterhalt und den Comfort ebenso wie für die gottesdienstlichen Handlungen der Mönche zu verausgaben war. Die Gesammtsumme der Zinsen, 29 *Drammas*, erfordert nach dem gesetzlichen Zinsfuße von 15 Procent per annum ein Capital von circa 200 *Drammas*. Den Umstand, daß dieses Capital in der Inschrift als 40+40+120 *Drammas* bezeichnet wird, kann ich nur so erklären, daß das Capital nicht einer, sondern (wie z. B. in Nâsik Inschrift No. 10, Arch. Survey IV, p. 104) getheilt mehreren Personen oder Gilden anvertraut war. — Für चीवरीभ्यो ist चीवरिभ्य, für अक्षैनीवि° अक्षयनीवि° zu lesen; man vergleiche Inschrift No. 15, Z. 4.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

(Fortsetzung.)

Mémoires de l'acad. des sciences de St. Petersbourg. T. XXXI. Nr. 3. 4.
Buoncompagni, bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matem. e fisiche. T. XV. Settembre (für die Gauss-Bibliothek).
Bulletin astronomique et météorologique de l'observatoire de Rio-Janeiro. Nr. 6. 7.
Revista Euskara. Año VI. Nr. 60.
Ch. Hermite et R. Lipschitz, sur quelques points dans la théorie des nombres. S. A. aus Mittag-Leffler, Acta mathematica.
G. Cantor, sur la théorie des ensembles. Ebendaher.
J. Bendixson, quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. Ebendaher.
Announcement of the Wagner free institute of Science for the Collegial year 1883.
Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Vol. XI. Nr. 1. 2. Geological Series. Vol. I. Nr. 9. 10.
Mittheilungen des Vereins der Aerzte in Steiermark. 19. Vereinsjahr.
Johns Hopkins University circulars. Vol. II. Nr. 25.

October 1883.

Bulletin de la société impér. des naturalistes de Moscou. 1882. Nr. 4. 1883. Nr. 4.
Nature. Nr. 727—30.
Ztschr. der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XVIII. Oct.
Die historische Commission bei der k. bayr. Academie der Wissenschaften. 1858—1883.
Atti della reale accademia dei Lincei. Transunti. Vol. X. Fasc. 13—15.
Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba. T. IV. Entr. 2—4. T. V. Entr. 1—3.
Diplomi greci e arabi di Sicilia pubblicati da S. Cusa. Vol. I. P. 1. 2.
Atti della reale accademia dei Lincei. Memorie della classe di Scienze fisiche etc. Vol. XI—XIII. Serie 2a, Vol. VIII.
Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus. N. F. Bd. XVI. XVIII. Th. 1.
Leopoldina. Nr. 17. 18.
Revista Euskara. Año VI. Nr. 61.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVI. Entr. 3.
Journal of the royal microscop. society. 1883. Oct.
Ztschr. für Naturwissenschaften, herausgegeben vom naturwissensch. Verein in Sachsen und Thüringen. Bd. LVI. Hft. 3.
Nova acta regiae societatis scientiarum Upsalensis. Ser. III. Vol. XI. Fasc. 2.
Verhandlungen des historischen Vereins für Oberpfalz und Regensburg. Bd. XXXVI. XXXVII.
Actas de la academia nacional de ciencias en Cordoba T. IV. Entr. 1.
Informe oficial de la comission cientifica de la expedicion al Rio Negro. Entr. 2. 3.
Buoncompagni, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matem. e fisiche. T. XV. Ottobre & Novbr. (für die Gauss-Bibliothek).
Proceedings of the London mathematical Society. Nr. 203—206.
Mittag-Leffler, Acta mathematica. II. 1. 2.
Publicationen des astrophysicalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. III.
Philosophical transactions. Vol. 173. P. II. III. IV. Vol. 174. P. I.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten
von der
Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften
und der
Georg-Augusts-Universität
zu Göttingen.

13. Februar. № 2. 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Theorie der Quincke'schen Beobachtungen über totale Reflexion.

Von

W. Voigt.

Herr Prof. Quincke hat in mehreren Abhandlungen [1]) Beobachtungen derjenigen Phänomene veröffentlicht, welche man wahrnimmt, wenn man Licht auf eine dünne Schicht eines beliebigen Mediums, das zu beiden Seiten von zwei beliebigen anderen Medien begrenzt wird, so auffallen läßt, daß an der ersten Grenze die sogenannte totale Reflexion stattfindet.

Die Resultate dieser Beobachtungen sind sehr merkwürdig und bisher, soviel ich weiß, noch nicht mit der Theorie verglichen; es schien mir daher geboten diese Lücke auszufüllen, um so mehr, als durch das von Herrn G. Kirchhoff in die Optik eingeführte neue Princip [2]): »daß in der Grenze zwischen zwei verschiedenen Medien eine gewisse Arbeit der zwischen ponderabeln und Aethertheilchen wirkenden Kräfte verschwinden muß«, für die Behandlung der totalen Reflexion eine noch sicherere, und allgemeinere Grundlage gegeben ist, als die bisher benutzten waren.

Die theoretischen Gesetze erweisen sich fast in allen Punkten

1) G. Quincke, Berl. Monatsber. 1865 p. 294—311, Pogg. Ann. Bd. 127, p. 1—29 u. 199—237; 1865.
2) G. Kirchhoff, Berl. Acad. 1876 p. 75.

auf's Vollständigste mit den Quincke'schen Beobachtungen in Uebereinstimmung; nur in dem Falle, daß die beiden die dünne, total reflectirende Schicht einschliefsenden Medien verschieden sind, bleibt ein vereinzelter Widerspruch bestehen, zu dessen vollständiger Aufklärung neue Beobachtungen nöthig sein würden.

Zunächst seien kurz die gewöhnlichen Gleichungen für die totale Reflexion abgeleitet. Die XY-Ebene sei die Grenze der beiden Medien, die XZ die Einfallsebene, die Z-Axe in das zweite hineingerichtet. Dann sind nach den bezüglichen Erörterungen [1]) in meinem Aufsatz über »die Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Medien« die in der Grenze zu erfüllenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{1a} & u_e + u_r = u_d \\ \text{1b} & v_e + v_r = v_d \\ \text{1c} & M(w_e + w_r) = M_1 w_d \\ \text{dd} & A\left[\left(\frac{\partial(u_e+u_r)}{\partial z} + \frac{\partial(w_e+w_r)}{\partial x}\right)\frac{\partial(u_e+u_r)}{\partial t} + \frac{\partial(v_e+v_r)}{\partial z}\frac{\partial(v_e+v_r)}{\partial t} + \frac{2\partial(w_e+w_r)}{\partial z}\frac{\partial(w_e+w_r)}{\partial t}\right] \\ & = A_1\left[\left(\frac{\partial u_d}{\partial z} + \frac{\partial w_d}{\partial x}\right)\frac{\partial u_d}{\partial t} + \frac{\partial v_d}{\partial z}\frac{\partial v_d}{\partial t} + 2\frac{\partial w_d}{\partial z}\frac{\partial w_d}{\partial t}\right]. \end{array}$$

Die letzte Gleichung ist der Ausdruck des Kirchhoff'schen Princips.

Hierin sind

$$A = e + a - \frac{a'}{\tau^2}, \quad M = m + r - n\tau^2,$$

$$A_1 = e_1 + a_1 - \frac{a_1'}{\tau^2}, \quad M_1 = m_1 + r_1 - n_1\tau^2$$

die bezüglichen Aggregate von Elasticitätsconstanten für das obere und untere Medium, τ abgekürzt für $\frac{T}{2\pi}$ und T dabei die Schwingungsdauer. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Medien gelten die Formeln [2])

$$2 \quad \omega^2 = \frac{A}{M} \qquad \omega_1^2 = \frac{A_1}{M_1}$$

Da die Beobachtungen die M in allen Medien von nahe constanter Größe ergeben haben, soll hier ihre Gleichheit angenommen werden.

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. XIX, p. 90^. 1883.
2) W. Voigt, l. c. p. 884.

Da nach der Symmetrie einfallende Schwingungen **parallel** oder **senkrecht** zur Einfallsebene nur **ebensolche** in der reflectirten und gebrochenen Welle erregen können, so zerfällt die Grenzbedingung (1d) in zwei für diese beiden Arten von Bewegungen.

Wir betrachten zunächst die v-Componente.

Die Voraussetzung der totalen Reflexion ist, daß zu dem Einfallswinkel kein reeller Brechungswinkel möglich ist. Es sei daher gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} v_e &= E_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right), \\ v_r &= R_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} + \delta_s\right), \\ v_d &= D_s e^{-\frac{\gamma_1' z}{\omega_1 \tau}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x}{\omega_1} + \gamma_{1s}\right), \end{aligned}\right| \qquad 3.$$

wo $\alpha_2 + \gamma_2 = 1$, aber $\alpha_1^2 - \gamma_1'^2 = 1$ ist,

und $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha_1}{\omega_1}$; dabei ist $\alpha_1 > 1$.

Setzt man noch kurz:

$$\left.\begin{aligned} R_s \cos\frac{\delta_s}{\tau} &= R_s' \qquad & R_s \sin\frac{\delta_s}{\tau} &= R_s'' \\ D_s \cos\frac{\gamma_{1s}}{\tau} &= D_s' \qquad & D_s \sin\frac{\gamma_{1s}}{\tau} &= D_s'', \end{aligned}\right| \qquad 4.$$

so werden die Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} E_s + R_s' &= D_s', \qquad & R_s'' &= D_s'' \\ \alpha\gamma(E_s - R_s') &= \alpha_1 \gamma_1' D_s'', \qquad & \alpha\gamma R_s'' &= \alpha_1 \gamma_1' D_1', \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} D_s' &= E_s \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2} \qquad & R_s' &= E_s \frac{\alpha_1^2\gamma_1'^2 - \alpha^2\gamma^2}{\alpha_1^2\gamma_1'^2 + \alpha^2\gamma^2} \\ D_s'' &= E_s \frac{2\alpha\gamma\,\alpha_1\gamma_1'}{\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2} \qquad & R_s'' &= E_s \frac{2\alpha\gamma\,\alpha_1\gamma_1'}{\alpha_1^2\gamma_1'^2 + \alpha^2\gamma^2}. \end{aligned}\right| \qquad 5.$$

Für die u und w Componente sind, um der Bedingung der Incompressibilität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

zu genügen, folgende Formen zu setzen:

$$\text{6}\quad\left|\begin{array}{ll} u_e = \gamma r_e & w_e = -\alpha r_e \\ u_r = \gamma r_r & w_r = -\alpha r_r \\ u_d = \gamma_1' r_d & w_d = -\alpha_1 \tau \dfrac{\partial r_d}{\partial t} \end{array}\right.$$

und darin:

$$r_e = E_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right)$$

$$r_r = R_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} + \delta_p\right)$$

$$r_d = D_p e^{-\frac{\gamma_1' z}{\omega_1 \tau}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x}{\omega_1} + \eta_{1p}\right)$$

Die Grenzbedingungen (1a) und (1c) werden dann, wenn man wieder abkürzt:

$$\text{7}\quad\left|\begin{array}{ll} R_p \cos\dfrac{\delta_p}{\tau} = R_p' & R_p \sin\dfrac{\delta_p}{\tau} = R_p'' \\ D_p \cos\dfrac{\eta_{1p}}{\tau} = D_p' & D_p \sin\dfrac{\eta_{1p}}{\tau} = D_p'' \end{array}\right.$$

zu folgenden:

$$\begin{aligned} \gamma(E_p - R_p') &= \gamma_1' D_p' \\ -\gamma R_p'' &= \gamma_1' D_p'' \\ \alpha(E_p + R_p') &= -\alpha_1 D_p'' \\ \alpha R_p'' &= +\alpha_1 D_p'. \end{aligned}$$

Die aus Gleichung (1c) folgende Bedingung wird durch die vorstehenden vier Relationen identisch erfüllt.

Aus diesen vier Gleichungen bestimmt sich

$$\text{8}\quad\left|\begin{array}{ll} D_p' = E_p \dfrac{2\alpha^2 \gamma \gamma_1'}{\alpha_1^2 \gamma^2 + \alpha^2 \gamma_1'^2} & R_p' = E_p \dfrac{\alpha_1^2 \gamma^2 - \alpha^2 \gamma_1'^2}{\alpha_1^2 \gamma^2 + \alpha^2 \gamma_1'^2} \\ D_p'' = -E_p \dfrac{2\alpha\alpha_1 \gamma^2}{\alpha_1^2 \gamma^2 + \alpha^2 \gamma_1'^2} & R_p'' = E_p \dfrac{2\alpha\alpha_1 \gamma \gamma_1'}{\alpha_1 \gamma^2 + \alpha^2 \gamma_1'^2}\,. \end{array}\right.$$

Diese Formeln (5.) und (8.) sind mit den Fresnelschen (bis auf den bekannten Unterschied in der Festsetzung über die Dichtigkeit des Aethers in verschiedenen Medien und der Definition der Polarisationsebene) identisch.

Es ist dabei zu bedenken, daß

$$\alpha : \alpha_1 = \omega : \omega_1 = n_1 : n$$

d. h. gleich dem umgekehrten Verhältniß der Brechungscoefficienten ist. Daraus folgt dann

$$\gamma = \sqrt{1-\alpha^2} \qquad \gamma_1' = \sqrt{\alpha_1^2-1} = \sqrt{\alpha^2\left(\frac{n}{n_1}\right)^2-1}.$$

Es sei nun ein System von 3 Medien betrachtet. Das erste (0) erstrecke sich von $z = -\infty$ bis $z = 0$, das zweite (1), optisch dünnere, von $z = 0$ bis $z = l$, das dritte (2), optisch dichter oder dünner als (1), von $z = l$ bis $z = \infty$. Es soll in (0) eine Welle unter einem solchen Winkel auf die Grenze (0,1) fallen, daß sie daselbst die sogenannte totale Reflexion erleidet.

Wiederum lassen sich die Componenten senkrecht und parallel der Einfallsebene gesondert betrachten.

Für die v-Componente sind die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{für } z = 0 & v_e + v_r &= v_1 \\ & A\dfrac{\partial(v_e+v_r)}{\partial z} &= A_1\dfrac{\partial v_1}{\partial z} \\ \text{für } z = l & v_1 &= v_d \\ & A_1\dfrac{\partial v_1}{\partial z} &= A_2\dfrac{\partial v_d}{\partial z} \end{array}\right| \qquad 9.$$

Da diese Formeln in acht zerfallen so erkennt man, daß man für v_1 nicht nur eine Lösung, wie in (3) einführen darf, sondern noch eine zweite, die eine an der Grenze (1, 2) reflectirte Welle darstellt, hinzufügen muß, also setzen:

$$\left.\begin{aligned} v_e &= E_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right) \\ v_r &= R_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} + \delta_s\right) \\ v_1 &= \Delta_s e^{-\frac{\gamma_1' z}{\omega_1 \tau}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t + \frac{\alpha_1 x}{\omega_1} + \gamma_{1s}\right) \\ &\quad + P_s e^{+\frac{\gamma_1' z}{\omega_1 \tau}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x}{\omega_1} + \vartheta_s\right) \\ v_2 &= D_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t + \frac{\alpha_2 x + \gamma_2 z}{\omega^2} + \zeta_s\right), \end{aligned}\right| \qquad 10.$$

wo nun wieder $\alpha^2+\gamma^2 = 1$, $\alpha_2^2+\gamma_2^2 = 1$, aber $\alpha_1^2 - \gamma_1'^2 = 1$ ist und gilt:

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha_1}{\omega_1} = \frac{\alpha_2}{\omega_2}, \text{ sowie } \omega^2 = \frac{A}{M}, \quad \omega_1^2 = \frac{A_1}{M}, \quad \omega_2^2 = \frac{A_2}{M}.$$

Zur Abkürzung sei wieder:

$$11. \quad \left| \begin{array}{ll} R_s \cos\frac{\delta_s}{\tau} = R_s' & R_s \sin\frac{\delta_s}{\tau} = R_s'' \\ \Delta_s \cos\frac{\eta_s}{\tau} = \Delta_s' & \Delta_s \sin\frac{\eta_s}{\tau} = \Delta_s'' \\ P_s \cos\frac{\vartheta_s}{\tau} = P_s' & P_s \sin\frac{\vartheta_s}{\tau} = P_s'' \\ D_s \cos\frac{\zeta_s}{\tau} = D_s' & D_s \sin\frac{\zeta_s}{\tau} = D_s'', \end{array} \right.$$

und

$$\frac{\gamma_1'}{\omega_1 \tau} = c.$$

Die Grenzbedingungen werden dann:

$$12. \quad \left| \begin{array}{rl} E_s + R_s' &= \Delta_s' + P_s' \\ R_s'' &= \Delta_s'' + P_s'' \\ \alpha\gamma(E_s - R_s') &= \alpha_1\gamma_1'(\Delta_s'' - P_s'') \\ \alpha\gamma R_s'' &= \alpha_1\gamma_1'(\Delta_s' - P_s') \\ \Delta_s' e^{-d} + P_s' e^{+d} &= D_s' \\ \Delta_s'' e^{-d} + P_s'' e^{+d} &= D_s'' \\ \alpha_1\gamma_1'(\Delta_s'' e^{-d} - P_s'' e^{+d}) &= \alpha_2\gamma_2 D_s' \\ \alpha_1\gamma_1'(\Delta_s' e^{-d} - P_s' e^{+d}) &= -\alpha_2\gamma_2 D_s'' \end{array} \right.$$

oder nach Elimination von R_s', R_s'', D_s', D_s'':

$$12\text{a.} \quad \left| \begin{array}{l} 2\alpha\gamma E_s = \Delta_s'\alpha\gamma + \Delta_s''\alpha_1\gamma_1' + P_s'\alpha\gamma - P_s''\alpha_1\gamma_1' \\ 0 = -\Delta_s'\alpha_1\gamma_1' + \Delta_s''\alpha\gamma + P_s'\alpha_1\gamma_1' + P_s''\alpha\gamma \\ 0 = \Delta_s'\alpha_2\gamma_2 e^{-d} - \Delta_s''\alpha_1\gamma_1' e^{-d} + P_s'\alpha_2\gamma_2 e^{+d} + P_s''\alpha_1\gamma_1' e^{+d} \\ 0 = \Delta_s'\alpha_1\gamma_1' e^{-d} + \Delta_s''\alpha_2\gamma_2 e^{-d} - P_s'\alpha_1\gamma_1' e^{+d} + P_s''\alpha_2\gamma_2 e^{+d} \end{array} \right.$$

während zugleich:

$$12\text{b.} \quad \left| \begin{array}{l} 2\alpha\gamma R_s' = \Delta_s'\alpha\gamma - \Delta_s''\alpha_1\gamma_1' + P_s'\alpha\gamma + P_s''\alpha_1\gamma_1' \\ 2\alpha\gamma R_s'' = \Delta_s'\alpha_1\gamma_1' + \Delta_s''\alpha\gamma - P_s'\alpha_1\gamma_1' + P_s''\alpha\gamma. \end{array} \right.$$

Die Determinante des Systems Gleichungen (12a), welche Π_s genannt werden möge, fällt nach einem früher von mir gegebenen

Satze[1]) unter diejenigen, welche sich in eine Summe von zwei Quadraten zerlegen lassen. Ihr Werth bestimmt sich demgemäß

$$T_s = \alpha_1^2\gamma_1'^2(\alpha\gamma + \alpha_2\gamma_2)^2(e^{+d} + e^{-d})^2 + (\alpha_1^2\gamma_1'^2 - \alpha\gamma\alpha_2\gamma_2)^2(e^{+d} - e^{-d})^2$$

und es gilt, wenn man noch die Abkürzungen einführt:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1^2\gamma_1'^2 + \alpha_2^2\gamma_2^2 = \sigma_2 & \alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2 = \sigma_1 \\ \alpha_1^2\gamma_1'^2 - \alpha_2^2\gamma_2^2 = \delta_2 & \alpha^2\gamma^2 - \alpha_1^2\gamma_1'^2 = \delta_1 \\ 2\alpha_1\gamma_1'\alpha_2\gamma_2 = \pi_2 & 2\alpha_1\gamma_1'\alpha\gamma = \pi_1, \end{array}$$

für die Componenten der Schwingungen im 2. Medium folgendes System von Werthen:

$$\left.\begin{array}{rl} \Delta_s'\Pi_s = & 2\alpha\gamma E_s[\alpha\gamma(\sigma_2 e^{+2d} + \delta_2) + \alpha_1\gamma_1'\pi_2] \\ \Delta_s''\Pi_s = & 2\alpha\gamma E_s[\alpha_1\gamma_1'(\sigma_2 e^{+2d} - \delta_2) + \alpha\gamma\pi_2] \\ P_s'\Pi_s = & 2\alpha\gamma E_s[\alpha\gamma(\sigma_2 e^{-2d} + \delta_2) + \alpha_1\gamma_1'\pi_2] \\ P_s''\Pi_s = & -2\alpha\gamma E_s[\alpha_1\gamma_1'(\sigma_2 e^{-2d} - \delta_2) + \alpha\gamma\pi_2] \\ \Pi_s = & (e^{+2d} + e^{-2d})\sigma_1\sigma_2 + 2(\pi_1\pi_2 + \delta_1\delta_2) \end{array}\right| \quad 13.$$

Hieraus folgt dann gemäß (12b):

$$\left.\begin{array}{l} R_s'\Pi_s = E_s[(e^{2d} + e^{-2d})\sigma_2\delta_1 + 2\delta_2\sigma_1] \\ R_s''\Pi_s = E_s(e^{2d} - e^{-2d})\sigma_2\pi_1 \end{array}\right| \quad 14.$$

und nach (12) weiter:

$$D_s'\Pi_s = 2\alpha\gamma E_s(e^{+d} + e^{-d})[\alpha\gamma(\sigma_2 + \delta_2) + \alpha_1\gamma_1'\pi_2]$$
$$D_s''\Pi_s = 2\alpha\gamma E_s(e^{+d} - e^{-d})[\alpha_1\gamma_1'(\sigma_2 + \delta_2) - \alpha\gamma\pi_2].$$

Letzteres schreibt sich auch:

$$\left.\begin{array}{l} D_s'\Pi_s = E_s(e^{+d} + e^{-d})\pi_1(\pi_1 + \pi_2) \\ D_s''\Pi_s = E_s(e^{+d} - e^{-d})2\pi_1(\alpha_1^2\gamma_1'^2 - \alpha\gamma\alpha_2\gamma_2). \end{array}\right| \quad 15.$$

Ich setze die Werthe der Abkürzungen nur für den Fall ein, daß das dritte Medium mit dem ersten identisch ist, und auch da nur für die wirklich beobachtbaren Größen, nicht für die Δ und P. Man erhält so, da hier $\sigma_1 = \sigma_2 = \alpha_1^2\gamma_1'^2 + \alpha^2\gamma^2$, $\delta_1 = -\delta_2 = \alpha_2\gamma_2 - \alpha_1^2\gamma_1'^2$, $\pi_1 = \pi_2 = 2\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1'$ wird:

---

1) Wied. Ann. Bd. XVI, p. 314. 1882. Es ist z. B. nach demselben:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ g & e & f & h \\ -e & g & -h & f \end{vmatrix}$$
$$= (ag + df - bh - ec)^2 + (bg + ah - fc - ed)^2.$$

$$R_s' = E_s \frac{(e^{cl} - e^{-cl})^2 (\alpha^4\gamma^4 - \alpha_1^4\gamma_1'^4)}{(e^{+cl} - e^{-cl})^2 (\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2}$$

$$R_s'' = 2E_s \frac{(e^{+2cl} - e^{-2cl})\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1'(\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2)}{(e^{+cl} - e^{-cl})^2 (\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2}$$

$$D_s' = 8E_s \frac{(e^{+cl} + e^{-cl})\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2}{(e^{+cl} - e^{-cl})^2 (\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2}$$

$$D_s'' = 4E_s \frac{(e^{+cl} - e^{-cl})\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1'(\alpha_1^2\gamma_1'^2 - \alpha^2\gamma^2)}{(e^{+cl} - e^{-cl})^2 (\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2}$$

Eine Probe für diese Formeln liegt darin, daß für $l = \infty$ die $D_s' D_s''$ verschwinden, die $R_s' R_s''$ aber die früheren Formeln geben müssen. Man erhält auch

$$R_s' = E_s \frac{\alpha^2\gamma^2 - \alpha_1^2\gamma_1'^2}{\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2}$$

$$R_s'' = 2E_s \frac{\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1'}{\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2}$$

in Uebereinstimmung mit (5).

Ich nehme nun die Componenten in der Einfallsebene vor.

Die Bedingungen lauten:

$$16. \quad \left| \begin{array}{l} \text{für } z = 0, \qquad u_e + u_r = u_1 \\ \qquad\qquad\qquad w_e + w_r = w_1 \\ A\left[\left(\frac{\partial(u_e+u_r)}{\partial z} + \frac{\partial(w_e+w_r)}{\partial x}\right)\frac{\partial(u_e+u_r)}{\partial t} + 2\frac{\partial(w_e+w_r)}{\partial z}\frac{\partial(w_e+w_r)}{\partial t}\right] \\ \qquad = A_1\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t} + 2\frac{\partial w_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right]; \\ \text{für } z = l, \qquad u_1 = u_d, \\ \qquad\qquad\qquad w_1 = w_d \\ A_1\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t} + 2\frac{\partial w_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right] \\ \qquad = A_2\left[\left(\frac{\partial u_d}{\partial z} + \frac{\partial w_d}{\partial x}\right)\frac{\partial u_d}{\partial t} + 2\frac{\partial w_d}{\partial z}\frac{\partial w_d}{\partial t}\right] \end{array} \right.$$

Von jedem dieser zwei Tripel-Gleichungen giebt die letzte keine andere Bedingung als die beiden ersten, ist also nicht zu berücksichtigen.

Es sei nun:

$$
\left.\begin{array}{llll}
u_e = \gamma r_e & & w_e = -\alpha r_e \\
u_r = -\gamma r_r & & w_r = -\alpha r_r \\
u_1 = \gamma_1'(r_1+\rho_1) & & w_1 = -\alpha_1 \tau \dfrac{\partial (r_1+\rho_1)}{\partial t} \\
u_d = \gamma_2 r_d & & w_d = -\alpha_2 r_d
\end{array}\right.
$$

und darin

$$
\left.\begin{array}{l}
r_e = E_p \sin \dfrac{1}{\tau}\left(t - \dfrac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right) \\
r_r = R_p \sin \dfrac{1}{\tau}\left(t - \dfrac{\alpha x - \gamma z}{\omega} + \delta_p\right) \\
r_1 = \Delta_p e^{-\frac{\gamma_1' z}{\omega_1 \tau}} \sin \dfrac{1}{\tau}\left(t - \dfrac{\alpha_1 x}{\omega_1} + \eta_p\right) \\
\rho_1 = P_p e^{+\frac{\gamma_1' z}{\omega_1 \tau}} \sin \dfrac{1}{\tau}\left(t - \dfrac{\alpha_1 x}{\omega_1} + \vartheta_p\right) \\
r_d = D_p \sin \dfrac{1}{\tau}\left(t - \dfrac{\alpha_2 x + \gamma_2 z}{\omega_2} + \zeta_p\right)
\end{array}\right\} \quad 17.
$$

worin wieder $\alpha^2+\gamma^2 = 1$, $\alpha_2^2+\gamma_2^2 = 1$ aber $\alpha_1^2-\gamma_1'^2 = 1$ ist, und gilt:

$$
\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha_1}{\omega_1} = \frac{\alpha_2}{\omega_2}, \text{ und } \omega^2 = \frac{A}{M}, \quad \omega_1^2 = \frac{A_1}{M}, \quad \omega_2^2 = \frac{A_2}{M}.
$$

Zur Abkürzung sei analog wie früher:

$$
\left.\begin{array}{ll}
R_p \cos \dfrac{\delta_p}{\tau} = R_p', & R_p \sin \dfrac{\delta_p}{\tau} = R_p'', \\
\Delta_p \cos \dfrac{\eta_p}{\tau} = \Delta_p', & \Delta_p \sin \dfrac{\eta_p}{\tau} = \Delta_p'', \\
P_p \cos \dfrac{\vartheta_p}{\tau} = P_p', & P_p \sin \dfrac{\vartheta_p}{\tau} = P_p'', \\
D_p \cos \dfrac{\zeta_p}{\tau} = D_p', & D_p \sin \dfrac{\zeta_p}{\tau} = D_p''
\end{array}\right\} \quad 18.
$$

und

$$
\frac{\gamma_1'}{\omega_1 \tau} = c.
$$

Dann werden die Grenzbedingungen:

$$
\left.\begin{array}{rl}
\gamma(E_p - R_p') &= \gamma_1'(\Delta_p' - P_p') \\
-\gamma R_p'' &= \gamma_1'(\Delta_p'' - P_p'') \\
\alpha(E_p + R_p') &= -\alpha_1(\Delta_p'' + P_p'') \\
\alpha R_p'' &= \alpha_1(\Delta_p'' + P_p')
\end{array}\right\} \quad 19.
$$

$$
19.\quad
\begin{array}{|rl}
\gamma'_1(\Delta'_p e^{-cl} + P'_p e^{+cl}) & = \gamma_2 D'_p \\
\gamma'_1(\Delta''_p e^{-cl} - P''_p e^{+cl}) & = \gamma_2 D''_p \\
-\alpha_1(\Delta''_p e^{-cl} + P''_p e^{+cl}) & = \alpha_2 D'_p \\
\alpha_1(\Delta'_p e^{-cl} + P'_p e^{+cl}) & = \alpha_2 D''_p.
\end{array}
$$

Oder nach Elimination von R'_p, R''_p, D'_p, D''_p:

$$
19\mathrm{a}.\quad
\begin{array}{|rl}
2\alpha\gamma E_p & = \Delta'_p \alpha\gamma'_1 - \Delta''_p \alpha_1\gamma - P'_p \alpha\gamma'_1 - P''_p \alpha_1\gamma \\
0 & = \Delta'_p \alpha_1\gamma + \Delta''_p \alpha\gamma'_1 + P'_p \alpha_1\gamma - P''_p \alpha\gamma'_1 \\
0 & = \Delta'_p \alpha_2\gamma'_1 e^{-cl} + \Delta''_p \alpha_1\gamma_2 e^{-cl} - P'_p \alpha_2\gamma'_1 e^{+cl} + P''_p \alpha_1\gamma_2 e^{+cl} \\
0 & = -\Delta'_p \alpha_1\gamma_2 e^{-cl} + \Delta''_p \alpha_2\gamma'_1 e^{-cl} - P'_p \alpha_1\gamma_2 e^{+cl} - P''_1 \alpha_2\gamma'_1 e^{+cl},
\end{array}
$$

wo dann zugleich gilt:

$$
19\mathrm{b}.\quad
\begin{array}{|rl}
-2\alpha\gamma R'_p & = \Delta'_p \alpha\gamma'_1 + \Delta''_p \alpha_1\gamma - P'_p \alpha\gamma'_1 + P''_p \alpha_1\gamma \\
+2\alpha\gamma R''_p & = \Delta'_p \alpha_1\gamma - \Delta''_p \alpha\gamma_1 + P'_p \alpha_1\gamma + P''_p \alpha\gamma_1.
\end{array}
$$

Auch hier ist die Determinante Π_p des Systems Gleichungen (19a.) eine Summe von zwei Quadraten, nämlich

$$
\begin{aligned}
\Pi_p = {} & \alpha_1^2\gamma_1'^2(\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma)^2(e^{+cl} + e^{-cl})^2 \\
& + (\alpha_1^2\gamma\gamma_2 - \alpha\alpha_2\gamma_1'^2)^2(e^{+cl} - e^{-cl})^2,
\end{aligned}
$$

und es wird, wenn man abkürzt:

$$
\begin{array}{llll}
\mu_2 = \alpha_1^2\gamma_2^2 + \alpha_2^2\gamma_1'^2 & & \mu_1 = \alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2 \\
\nu_1 = \alpha_1^2\gamma_2^2 - \alpha_2^2\gamma_1'^2 & & \nu_1 = \alpha^2\gamma_1'^2 - \alpha_1^2\gamma^2 \\
\pi_2 = 2\alpha_1\gamma'_1\alpha_2\gamma_2 & & \pi_1 = 2\alpha\gamma\alpha_1\gamma'_1:
\end{array}
$$

$$
20.\quad
\begin{array}{|rl}
\Delta'_p\Pi_p & = 2\alpha\gamma E_p[\alpha\gamma'_1(\mu_2 e^{+2cl} + \nu_2) + \alpha_1\gamma\pi_2] \\
\Delta''_p\Pi_p & = -2\alpha\gamma E_p[\alpha_1\gamma(\mu_2 e^{+2cl} - \nu_2) + \alpha\gamma'_1\pi_2] \\
P'_p\Pi_p & = -2\alpha\gamma E_p[\alpha\gamma'_1(\mu_2 e^{-2cl} + \nu_2) + \alpha_1\gamma\pi_2] \\
P''_p\Pi_p & = -2\alpha\gamma E_p[\alpha_1\gamma(\mu_2 e^{-2cl} - \nu_2) + \alpha\gamma'_1\pi_2] \\
\Pi_p & = (e^{+2cl} + e^{-2cl})\mu_1\mu_2 + 2(\pi_1\pi_2 + \nu_1\nu_2).
\end{array}
$$

Es folgt nach (19b.):

$$
21.\quad
\begin{array}{|rl}
-R'_p\Pi_p & = E_p[(e^{+2cl} + e^{-2cl})\mu_2\nu_1 + 2\nu_2\mu_1] \\
R''_p\Pi_p & = E_p(e^{+2cl} - e^{-2cl})\mu_2\nu_2
\end{array}
$$

und nach (19.):

$$
\begin{aligned}
D'_p\Pi_p & = 2\alpha\gamma\frac{\gamma'_1}{\gamma_2}E_p(e^{+cl} + e^{-cl})[\alpha\gamma'_1(\mu_2 + \nu_2) + \alpha_1\gamma\pi_2] \\
D''_p\Pi_p & = -2\alpha\gamma\frac{\gamma'_1}{\gamma_2}E_p(e^{+cl} - e^{-cl})[\alpha_1\gamma(\mu_2 + \nu_2) - \alpha\gamma'_1\pi_2]
\end{aligned}
$$

was sich auch schreibt:

$$\left.\begin{aligned} D'_p \Pi_p &= \quad 2\pi_1 E_p (e^{+cl} + e^{-cl})(\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma)\alpha_1\gamma'_1 \\ D''_p \Pi_p &= -2\pi_1 E_p (e^{+cl} - e^{-cl})(\alpha_1^2\gamma\gamma_2 - \gamma_1'^2 \alpha\alpha_2). \end{aligned}\right| \qquad 22.$$

In die Ausdrücke für die beobachtbaren Größen $R'_p R''_p$ und $D'_p D''_p$ die Annahme eingeführt, daß das 1. und 3. Medium identisch ist, läßt

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \quad \mu_2 = \alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2 \\ \nu_1 &= -\nu_2 = \alpha_1^2\gamma^2 - \alpha^2\gamma_1'^2 \\ \pi_1 &= \quad \pi_2 = 2\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1'^2 \end{aligned}$$

werden, und daher

$$\begin{aligned} -R'_p &= E_p \frac{(e^{+cl} - e^{-cl})^2(\alpha^4\gamma_1'^4 - \alpha_1^4\gamma^4)}{(e^{+cl} - e^{-cl})^2(\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2} \\ R''_p &= 2E_p \frac{(e^{2cl} - e^{-2cl})\alpha\gamma\alpha_1\gamma'_1(\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2)}{(e^{+cl} - e^{-cl})^2(\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2} \\ D'_p &= 8E_p \frac{(e^{+cl} + e^{-cl})\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2}{(e^{+cl} - e^{-cl})^2(\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2} \\ -D''_p &= 4E_p \frac{(e^{+cl} - e^{-cl})\alpha\gamma\alpha_1\gamma'_1(\alpha_1^2\gamma^2 - \alpha^2\gamma_1'^2)}{(e^{+cl} - e^{-cl})^2(\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2)^2 + 16\alpha^2\gamma^2\alpha^2\gamma_1'^2} \end{aligned}$$

Auch hier kann man die Prüfung vornehmen, daß für $l = \infty$ $D'_p = D''_p = 0$ werden muß und nach (8.):

$$\begin{aligned} R'_p &= -E_p \frac{\alpha^2\gamma_1'^2 - \alpha_1^2\gamma^2}{\alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma_1'^2} \\ R''_p &= \quad 2E_p \frac{\alpha\gamma\alpha\gamma'_1}{\alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma_1'^2}, \end{aligned}$$

ferner für $l = 0: R'_p = R''_p = D''_p = 0$, aber $D'_p = E_p$.

Eine erste Reihe der Beobachtungen von Herrn Quincke bezieht sich auf die Intensitäten der gebrochenen und reflectirten Wellen, falls das einfallende Licht senkrecht oder parallel zur Einfallsebene polarisirt ist. Werden die auf die totalreflectirende Schicht einfallenden Intensitäten $\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{E}_p$ durch $\alpha\gamma E_s^2$ und $\alpha\gamma E_p^2$ gemessen, so sind die des reflectirten Lichtes, nämlich $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$, gemessen durch $\alpha\gamma R_s^2$ und $\alpha\gamma R_p^2$, aber die des durchgegangenen, nämlich $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_p$, durch $\alpha_2\gamma_2 D_s^2$ und $\alpha_2\gamma_2 D_p^2$. Dabei ist:

$$D_s^2 = D_s'^2 + D_s''^2 \qquad R_s^2 = R_s'^2 + R_s''^2$$
$$D_p^2 = D_p'^2 + D_p''^2 \qquad R_p^2 = R_p'^2 + R_p''^2.$$

Diese Intensitäten nehmen bemerkenswerth einfache Werthe an, da — ebenso wie bei dem analogen Problem der gewöhnlichen Reflexion an einer Platte — ein Factor im Zähler und Nenner sich hinweghebt.

Man erhält:

$$23. \quad \left| \begin{aligned} \mathfrak{D}_s &= \mathfrak{E}_s \frac{4\pi_1\pi_2}{\sigma_1\sigma_2(e^{+2cl}+e^{-2cl})+2(\delta_1\delta_2+\pi_1\pi_2)} \\ \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{4\pi_1\pi_2}{\mu_1\mu_2(e^{+2cl}+e^{-2cl})+2(\nu_1\nu_2+\pi_1\pi_2)} \\ \mathfrak{R}_s &= \mathfrak{E}_s \frac{\sigma_1\sigma_2(e^{+2cl}+e^{-2cl})+2(\delta_1\delta_2-\pi_1\pi_2)}{\sigma_1\sigma_2(e^{+2cl}+e^{-2cl})+2(\delta_1\delta_2+\pi_1\pi_2)} \\ \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{\mu_1\mu_2(e^{+2cl}+e^{-2cl})+2(\nu_1\nu_2-\pi_1\pi_2)}{\mu_1\mu_2(e^{+2cl}+e^{-2cl})+2(\nu_1\nu_2+\pi_1\pi_2)} \end{aligned} \right.$$

Hiernach ist also:

$$\mathfrak{R}_s + \mathfrak{D}_s = \mathfrak{E}_s$$
$$\mathfrak{R}_p + \mathfrak{D}_p = \mathfrak{E}_p,$$

entsprechend dem Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Aber diese Intensitäten sind noch nicht völlig die beobachtbaren, weil weder das erste, noch das dritte Medium die atmosphärische Luft sein kann. Es sind also noch zwei Uebergänge aus Luft ins erste, und aus dem dritten Medium in Luft zu berücksichtigen. Es mögen dabei die Componenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene im Verhältniß s und p resp. s_2 und p_2 geschwächt werden, dann wird, wenn $(\mathfrak{E}_s)$, $(\mathfrak{E}_p)$, $(\mathfrak{R}_s)$, $(\mathfrak{R}_p)$, $(\mathfrak{D}_s)$, $(\mathfrak{D}_p')$ die Intensitäten vor dem ersten Eintritt und nach dem letzten Austritt bedeuten, sein:

$$24. \quad \left| \begin{aligned} \frac{(\mathfrak{D}_s)}{(\mathfrak{E}_s)} &= \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{E}_s} \cdot ss_2 \qquad & \frac{(\mathfrak{D}_p)}{(\mathfrak{E}_p)} &= \frac{\mathfrak{D}_p}{\mathfrak{E}_p} \cdot pp_2 \\ \frac{(\mathfrak{R}_s)}{(\mathfrak{E}_s)} &= \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{E}_s} \cdot s^2 \qquad & \frac{(\mathfrak{R}_p)}{(\mathfrak{E}_p)} &= \frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{E}_p} \cdot p^2. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist, wenn e, e_2 an den beiden Grenzen der Winkel der Wellennormale gegen das Einfallsloth in der Luft i, i_2 in dem betr. Medium ist:

$$\left.\begin{aligned}
s &= \frac{\sin 2i \sin 2e}{\sin^2(i+e)\cos^2(i-e)}\\
s_2 &= \frac{\sin 2i_2 \sin 2e_2}{\sin^2(i_2+e_2)\cos^2(i_2-e_2)}\\
p &= \frac{\sin 2i \sin 2e}{\sin^2(i+e)}\\
p_2 &= \frac{\sin 2i_2 \sin 2e_2}{\sin^2(i_2+e_2)}\,.
\end{aligned}\right| \quad 25.$$

Die s und p sind also vom Winkel abhängig, unter welchem die betreffenden Grenzen passirt werden; die Formeln für $(\mathfrak{R}_s)$ und $(\mathfrak{R}_p)$ setzen voraus, daß dies beim reflectirten Licht unter demselben Winkel geschieht, wie beim einfallenden. Dies war bei den Quinckeschen Beobachtungen sehr nahe der Fall.

Ist das erste und dritte Medium identisch, also

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad \pi_1 = \pi_2 = \pi$$
$$\delta_1 = -\delta_2 = \delta, \quad \nu_1 = -\nu_2 = \nu$$

so wird noch einfacher:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}_s &= \mathfrak{E}_s \frac{4\pi^2}{\sigma^2(e^{+cl}-e^{-cl})^2+4\pi^2}, & \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{4\pi^2}{\mu^2(e^{+cl}-e^{-cl})^2+4\pi^2},\\
\mathfrak{R}_s &= \mathfrak{E}_s \frac{\sigma^2(e^{+cl}-e^{-cl})^2}{\sigma^2(e^{+cl}-e^{-cl})^2+4\pi^2}, & \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{\mu^2(e^{+cl}-e^{-cl})^2}{\sigma^2(e^{+cl}-e^{-cl})^2+4\pi^2}.
\end{aligned}\right| \quad 26.$$

Die Formeln (23.) und (26.) ergeben sogleich in Uebereinstimmung mit der Beobachtung, daß eine dünne Schicht bei »totaler« Reflexion an der Vorderfläche nicht die Farben dünner Blättchen zeigen kann.

Herr Quincke hat aus seinen Beobachtungen eine Anzahl Sätze über die Umstände geschlossen, unter welchen die durchgegangene Intensität bei wachsender Dicke l der Zwischenschicht unmerklich wird. Damit $\mathfrak{D}_s$ und $\mathfrak{D}_p$ klein wird muß e^{+cl} groß sein und man wird daher für den Fall das erste und dritte Medium identisch ist, die Discussion an die noch einfacheren Ausdrücke anknüpfen können:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}_s &= 4\mathfrak{E}_s\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2 e^{-2cl} = \mathfrak{E}_s\left(\frac{4\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1'}{\alpha^2\gamma^2+\alpha_1^2\gamma_1'^2}\right)^2 e^{-2cl}\\
\mathfrak{D}_p &= 4\mathfrak{E}_p\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2 e^{-2cl} = \mathfrak{E}_p\left(\frac{4\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1'}{\alpha\gamma_1'^2+\alpha_1\gamma^2}\right)^2 e^{-2cl}.
\end{aligned}\right| \quad 27.$$

Wann die Größe von $(\mathfrak{D}_s)$ und $(\mathfrak{D}_p)$ für die Beobachtung unmerklich wird, ist in erster Linie durch die Exponentialgröße be-

stimmt. l wird dabei um so größer sein, je kleiner c d. h. je kleiner $\frac{\gamma_1'}{\omega_1 \tau}$ ist; da aber $\gamma_1'^2 = \left(\frac{n\alpha}{n_1}\right)^2 - 1$ ist, so ist der kleinste Werth für γ_1', nämlich $= 0$, der beim Beginn der totaler Reflexion eintretende; bei größerem α wächst auch γ_1' und man erhält den ersten Quincke'schen Satz [1]):

»1. Die Tiefe, bis zu welcher das Licht in das dünnere Medium eindringt, ist an der Grenze der totalen Reflexion ein Maximum und nimmt mit wachsendem Einfallswinkel ab.«

Daß man an der Grenze der totalen Reflexion selbst nicht beobachten kann, zeigen übrigens die Formeln für $\mathfrak{D}_s$ und $\mathfrak{D}_p$, welche dort den Factor der Exponentialgröße gleich Null ergeben.

Ein zweiter Quincke'scher Satz vergleicht Wellen, die parallel und senkrecht der Einfallsebene schwingen, und welche durch die gleichen einfallenden Intensitäten $(\mathfrak{E}_s) = (\mathfrak{E}_p)$ erregt sind; da $(\mathfrak{D}_s)$ und $(\mathfrak{D}_p)$ sich nur durch den Factor der Exponentialgröße unterscheiden so ist dieser jetzt zu betrachten.

Es gilt

$$(\mathfrak{D}_p) : (\mathfrak{D}_s) = \left(\frac{\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2}{\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2}\right)^2 \cdot \frac{pp_2}{ss_2}.$$

Der Factor $\frac{pp_2}{ss_2}$ ist bei mäßigen Einfallswinkeln nicht stark von 1 verschieden, darum mag die Discussion an das Verhältniß

$$\mathfrak{D}_p : \mathfrak{D}_s = \left(\frac{\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2}{\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2}\right)^2$$

anknüpfen. Dies wird, wenn man die Berechnungsindices n, n_1 der beiden Medien einführt:

$$= \left(\alpha^2 \frac{n^2 + n_1^2}{n_1^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2 n^2 - \gamma^2 n_1^2}{n_1^2}\right)^2$$

Für die Grenze der totalen Reflexion ist $\alpha = \frac{n_1}{n}$ und daher:

$$\mathfrak{D}_p : \mathfrak{D}_s = \left(\frac{n_1}{n}\right)^4$$

also, da $n_1 < n$ die Vorbedingung der totalen Reflexion ist:

$$\mathfrak{D}_p < \mathfrak{D}_s.$$

Für streifenden Einfall ist $\alpha = 1$ und

1) G. Quincke l. c. p. 7.



$$\mathfrak{D}_p : \mathfrak{D}_s = \left(\frac{n}{n_1}\right)^1 \quad \text{also}$$

$$\mathfrak{D}_s < \mathfrak{D}_p,$$

dazwischen für $\qquad \alpha^2 = \dfrac{2n_1^2}{n^2 + n_1^2}$

$$\mathfrak{D}_s = \mathfrak{D}_p.$$

Hiernach bestätigt sich der zweite Quincke'sche Satz[1]):

»2. Beim Beginn der totalen Reflexion dringt das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht, später bei größeren Einfallswinkeln das parallel der Einfallsebene polarisirte Licht tiefer« — will sagen in merklicher Intensität — »in die Luftschicht[2]) ein.«

Der dritte Satz[3]) lautet:

»3. Mit der Wellenlänge des einfallenden Lichts nimmt die Tiefe, bis zu der das Licht in das dünnere Medium eindringt zu« — »nahe, aber nicht genau proportional mit der Wellenlänge[4]).«

Er ist gleichfalls durch unsere Formeln völlig bestätigt, denn $2\pi\omega_1\tau$ ist die Wellenlänge, die meine Theorie von der Farbe nach Formel (2) abhängig ergeben hat, und sie kömmt nicht nur im Exponenten $cl = \dfrac{\gamma_1' l}{\omega_1 \tau}$ sondern auch im Factor der Exponentialgröße (nämlich durch das Brechungsverhältniß) vor.

Dagegen finden sich unsere Formeln nicht in Uebereinstimmung mit den Quincke'schen Beobachtungen[5]), welche zu zeigen scheinen, daß falls das erste und dritte Medium verschieden sind, beim Uebergang einer Welle in der Richtung vom ersten zum zweiten zum dritten Medium und in der umgekehrten Richtung die durchgelassene Welle bei verschiedener Dicke der Zwischenschicht unmerklich wird. Vertauscht man nämlich in (23) und (24) α mit α_2, α_2 mit α (also die Natur des ersten und dritten Mediums) so bleiben die Ausdrücke für $(\mathfrak{D}_s)$ und $(\mathfrak{D}_p)$ ungeändert, denn auch die Factoren s, s_2, p, p_2 werden dabei einfach vertauscht, ohne ihre Größe zu ändern, weil eine Welle bei der gewöhnlichen Brechung in einer und der entgegengesetzten Richtung die gleiche Schwächung erfährt. Und dies kann auch nach den Grundlagen der ganzen Theorie nicht anders sein.

Dieser Punkt bleibt also vorläufig noch unaufgeklärt, und wären neue Beobachtungen erwünscht[6]).

---

1) l. c. p. 8. 2) allgemein »das dünnere Medium«.
3) l. c. p. 8. 4) dies hinzugefügt nach p. 20.
5) l. c. p. 17.
6) Uebrigens sind die durch die Beobachtungen erhaltenen Unterschiede

Schließlich will ich wenigstens noch einige beobachtete Zahlenwerthe mit der Theorie vergleichen.

Herr Quincke hat gefunden, daß bei der Combination Flintglas-Luft-Flintglas die Dicke l_p und l_s, bei welcher für die parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Wellen die durchgegangene Intensität unmerklich wurde, für die Einfallswinkel φ durch folgende Werthe gegeben waren:

φ	$\frac{l_p}{\omega_1 T}$	$\frac{l_s}{\omega_1 T}$
38° 24′	2,492	3,378
38° 50′	1,840	2,610
39° 27′	1,455	1,979
40° 3′	1,180	1,529
40° 40′	1,074	1,368
41° 18′	0,994	1,169
41° 55′	1,039	1,097
43° 8′	0,835	0,891
45°	0,709	0,729
46° 52′	0,656	0,676
47° 28′	0,614	0,632
48° 5′	0,622	0,608
48° 42′	0,595	0,591
51° 10′	0,462	0,427
57° 13′	0,295	0,263
63° 1′	0,235	0,184
68° 26′	0,166	0,129.

Der Brechungscoefficient des Flintglases gegen Luft d. h. $\frac{n}{n_1}$ war 1,616, also der Grenzwinkel 38° 14′.

Eine Formel zur Vergleichung mit diesen Zahlenwerthen liefert die Ueberlegung, daß, gleichviel wie groß absolut die Intensität des Lichtes gewesen ist, die Herr Quincke als verschwindend betrachtet hat, sie jedenfalls für parallel und senkrecht der Einfallsebene polarisirtes Licht gleich gewesen ist, d. h. also $(\mathfrak{D}_s) = (\mathfrak{D}_p)$ zu setzen ist, oder

$$se^{cl_p}(\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2) = pe^{cl_s}(\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2)$$

woraus unter Rücksicht auf

nur wenig größer als die bei unter denselben Umständen zu verschiedenen Zeiten beobachteten Zahlen stattfindenden. Vergl. l. c. p. 12 u. 20—21.



$$c = \frac{\gamma_1'}{\omega_1 \tau} = \frac{2\pi\gamma_1'}{\omega_1 T}$$

folgt:

$$\frac{l_s - l_p}{\omega_1 T} = \frac{\log \mathrm{nat}\left[\left(\alpha^2 \frac{n^2 + n_1^2}{n_1^2} - 1\right) \frac{p}{s}\right]}{2\pi \sqrt{\frac{\alpha^2 n^2}{n_1^2} - 1}}.$$

Berechnet man die linke Seite aus den Beobachtungen und die rechte aus den Werthen $\sin\varphi = \alpha$ und $\frac{n}{n_1}$, wobei zu bedenken, daß nach der Versuchsanordnung des Herrn Quincke in den Werthen (25) für p und s zu setzen ist $i = 45 - \varphi$ und $\sin e = n \sin i$, so erhält man die folgende Zusammenstellung:

beob.	0,886	0,770	0,524	0,349	0,294	0,175	0,058
ber.	1,74	0,85	0,54	0,39	0,303	0,24	0,193

beob.	0,056	0,020	0,020	0,018	0,014	—0,004	—0,035	—0,032
ber.	0,126	0,063	0,020	0,010	0	—0,009	—0,036	—0,075

beob.	—0,051	—0,037
ber.	—0,091	—0,097

Die Uebereinstimmung ist auf den ersten Blick nicht glänzend; indeß bemerkt man leicht aus dem Verlaufe der unter »beob.« gegebenen Werthe, daß denselben keine große Genauigkeit innewohnen kann, daß vielmehr einige sogar um mehrere Einheiten in der ersten Stelle falsch sein müssen. Dies erklärt sich einerseits dadurch, daß die hier unter »beob.« angegebenen Zahlen die Differenzen zweier nahe gleichen Beobachtungswerthe, die Beobachtungen selbst aber sehr schwierig sind [1]). Herr Quincke hat mit Sonnenlicht operirt, also einer Lichtquelle, welche durch leichte Nebelzüge in ihrer Intensität sehr merklich alterirt worden sein kann; jeder Wechsel der absoluten Intensität der Lichtquelle giebt aber einen bedeutenden Einfluß auf die Beobachtung. Nimmt man hinzu, daß die größte Abweichung in der Nähe des Grenzwinkels stattfindet, wo eine Aenderung des Einfallswinkels um wenige (26) Minuten den resultirenden Werth um die Hälfte ändert während Herr Quincke selbst die Genauigkeit der Einstellung seines Apparates auf 10 Minuten schätzt [2]), und

1) Wie groß die Unsicherheit der Resultate ist, ersieht man besonders deutlich aus der erheblichen Abweichung, welche die mit denselben Substanzen zu verschiedenen Zeiten erhaltenen Zahlen zeigen. Vergl. Flintglas-Luft l. c. p. 12 und p. 20, Flintglas-Wasser p. 12 und p. 21.

2) l. c. p. 10.

bei sehr schiefem Einfall, wo der absolute Werth der direct gemessenen Größen klein (nämlich etwa 2^{mm}) ist, — daß aber der Verlauf der beobachteten und berechneten Werthe namentlich darin übereinstimmt, daß sie fast bei genau demselben Einfallswinkel ihr Zeichen wechseln, so wird man die Beobachtungen als in Uebereinstimmung mit der Theorie bezeichnen müssen.

Eine zweite Reihe von Beobachtungen des Herrn Quincke betrifft die Phasendifferenz der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Componenten der reflectirten und durchgehenden Wellen.

Diese folgen nach (11) und (18) aus den Formeln:

$$\sin\frac{\zeta_p-\zeta_s}{\tau}=\frac{D_s'D_p''-D_p'D_s''}{D_pD_s}$$
$$\sin\frac{\delta_p-\delta_s}{\tau}=\frac{R_s'R_p''-R_p'R_s''}{R_pR_s}$$

Hier hinein sind die Werthe der einzelnen Glieder aus den Formeln (14.), (15.), (21.), (22.) und (23.) zu setzen. Man erhält, wenn wie bisher:

$$\Pi_s=\sigma_1\sigma_2(e^{+2d}+e^{-2d})+2(\pi_1\pi_2+\delta_1\delta_2)$$
$$\Pi_p=\mu_1\mu_2(e^{+2d}+e^{-2d})+2(\pi_1\pi_2+\nu_1\nu_2) \quad \text{ist:}$$

$$28. \quad \sin\frac{\zeta_p-\zeta_s}{\tau}=-\frac{(e^{+2d}-e^{-2d})}{\sqrt{\Pi_p\Pi_s}}\alpha_1\gamma_2$$
$$[(\alpha\gamma+\alpha_2\gamma_2)(\alpha_1^2\gamma\gamma_2-\gamma_1^2\alpha\alpha_2)+(\alpha\gamma_2+\alpha_2\gamma)(\alpha_1^2\gamma_1^2-\alpha\gamma\alpha_2\gamma_2)]$$
$$\sin\frac{\delta_p-\delta_s}{\tau}=\frac{(e^{+2d}-e^{-2d})}{\sqrt{\Pi_p\Pi_s}}\pi_1$$
$$\frac{[\mu_2\sigma_2(\delta_1+\nu_1)(e^{+2d}+e^{-2d})+2(\mu_2\delta_2\sigma_1+\sigma_2\nu_2\mu_1)]}{\sqrt{[\sigma_1\sigma_2(e^{+2d}+e^{-2d})+2(\delta_1\delta_2-\pi_1\pi_2)][\mu_1\mu_2(e^{+2d}+e^{-2d})+2(\nu_1\nu_2-\pi_1\pi_2)]}}$$

Beide Ausdrücke sind für $l=0$ selbst Null und wechseln bei constantem α ihr Vorzeichen nicht. Es folgt daher sogleich der Quincke'sche Satz[1]):

»Die Phasendifferenz nimmt mit der Dicke der Schicht unter der Grenzfläche zu und nähert sich mit wachsender Dicke einem Maximum, das durch die Fresnel'sche Gleichung gegeben ist.«

In der That, setzt man $l=\infty$ so wird

$$\sin\frac{\delta_p-\delta_s}{\tau}=\frac{\pi_1(\delta_1+\nu_1)}{\mu_1\sigma_1}, \quad \text{also da}$$

$$\mu_1^2=\nu_1^2+\pi_1^2, \qquad \sigma_1^2=\delta_1^2+\pi_1^2 \quad \text{ist:}$$

---

1) l. c. p. 220.

$$\cos\frac{\delta_p - \delta_s}{\tau} = \frac{\pi_1^2 - \delta_1 \nu_1}{\mu_1 \sigma_1},$$

und das ist unter Einführung der Werthe:

$$= \frac{4\alpha^2\gamma^2\alpha_1^2\gamma_1'^2 - (\alpha^2\gamma^2 - \alpha_1^2\gamma_1'^2)(\alpha^2\gamma_1'^2 - \alpha_1^2\gamma^2)}{(\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1'^2)(\alpha^2\gamma_1'^2 + \alpha_1^2\gamma^2)}$$

oder da $\gamma^2 = 1 - \alpha^2$, $\gamma_1'^2 = \alpha_1^2 - 1$ und daher $\gamma^2 + \gamma_1'^2 = \alpha_1^2 - \alpha^2$ ist, und sich $(\alpha_1^2 - \alpha^2)^2$ im Zähler und Nenner forthebt:

$$\cos\frac{\delta_p - \delta_s}{\tau} = \frac{\alpha^2\alpha_1^2 - \gamma^2\gamma_1'^2}{\alpha_1^2 + \alpha^2 - 1} = \frac{2\alpha^2\alpha_1^2 - (\alpha_1^2 + \alpha^2) + 1}{\alpha_1^2 + \alpha^2 - 1},$$

und dies ist die bekannte Fresnel'sche Formel [1]).

Die Formel für $\sin\frac{\zeta_p - \zeta_s}{\tau}$ ändert sich nicht, wenn man α mit α_2, γ mit γ_2 vertauscht und umgekehrt. Dasselbe gilt von dem Verhältniß $(\mathfrak{D}_p):(\mathfrak{D}_s)$ in (23.) und (24.). Dies giebt den Quincke'schen Satz [2]):

»Die Phasendifferenz und das Verhältniß der Amplituden bleibt ungeändert, mag das Licht denselben Weg in der Richtung vom ersten zum dritten oder vom dritten zum ersten Medium zurücklegen.«

Da die Formeln (28.) die Amplituden des Lichts nicht enthalten gilt auch noch der (an sich einleuchtende) Satz [3]), »daß der Phasenunterschied im reflectirten und durchgegangenen Licht von der Intensität unabhängig ist.«

Ist das erste Medium mit dem dritten gleichartig, so erhält man:

$$\sin\frac{\zeta_p - \zeta_s}{\tau} = \frac{(e^{+2d} - e^{-2d})}{\sqrt{\Pi_p \Pi_s}} \pi_1(\nu_1 + \delta_1)$$

$$\sin\frac{\delta_p - \delta_s}{\tau} = \frac{(e^{+2d} - e^{-2d})}{\sqrt{\Pi_p \Pi_s}} \pi_1(\nu_1 + \delta_1)$$

also

$$\sin\frac{\zeta_p - \zeta_s}{\tau} = \sin\frac{\delta_p - \delta_s}{\tau}.$$

Darin liegt der Quincke'sche Satz [4]):

»Die Phasendifferenz der Componenten des total reflectirten Lichtes ist für alle Einfallswinkel dieselbe, wie die des bei der to-

1) Vergl. auch l. c. p. 217.
2) l. c. p. 232.
3) l. c. p. 235..
4) l. c. p. 218 in Verbindung mit p. 222.

talen Reflexion durch das dünnere Medium hindurchgegangenen Lichtes.«

Nicht allgemein bestätigt die Theorie den weiteren Schluß Herrn Quincke's »daß durch die Anwendung einer stärker als die erste brechenden Substanz als dritter die Phasendifferenz des durchgegangenen Lichtes vergrößert wird[1]);« dies findet vielmehr nur unter bestimmten Voraussetzungen über die Größe des Einfallswinkels statt; welche wahrscheinlich überall bei den Quincke'schen Beobachtungen erfüllt waren. Ein Widerspruch bleibt hinsichtlich der Phase aber nicht übrig.

Es ist also bis auf den einen hervorgehobenen unsichern Punkt die Theorie mit Herrn Quincke's Beobachtungen in vollkommener Uebereinstimmung. Sie ergiebt überdies eine klare Vorstellung von dem Vorgang der Fortpflanzung der Schwingungen durch das dünnere Medium hindurch.

Göttingen, Dec. 1883.

Zur Kenntniß des Baus der Schleimdrüsen.

Von

Dr. **P. Schiefferdecker.**

(Vorgelegt von J. Henle).

I. Einzellige Drüsen in der Blase der Amphibien.

a) *Das Blasenepithel.* Das Epithel der Blase von Rana esculenta und Bufo vulgaris, ist ein Uebergangsepithel ganz ähnlich dem der Blase der Säugethiere. Bei der Ausdehnung der Blase zeigen die Epithelzellen dieselben Veränderungen, welche London von denjenigen der Hundeblase beschrieben hat. Wenn ich mich mit den Beobachtungen Londons im Ganzen also einverstanden erklären kann, so muß ich mich doch gegen den Schlußsatz seiner Arbeit wenden. Derselbe lautet[2]): »Wie in einer elastischen Membran, welche durch einen Druck gedehnt wird, rücken in dem Blasenepithel bei der Ausdehnung die einzelnen Theile auseinander; behalten aber ihren Zusammenhang und ihre relative Anordnung und es ist leicht erklärlich wie alles wieder in die alte Ordnung zurückkehrt, wenn der Druck nachläßt. Aber in einer Beziehung ist das Verhältniß hier ein ganz anderes.

---

1) l. c. p. 232.

2) Arch. f. Anat. u. Physiol. 1881. Phys. Abthlg. p. 330.

Der Druck, welcher auf die Innenfläche des Epithels der sich füllenden Blase wirkt, der es also nach dieser Vorstellungsweise dehnt, ist viel geringer als der in der sich contrahirenden Blase, bei dem es in seine Ruhelage zurückkekrt. Diese Rückkehr kann durch die Compression der sich contrahirenden Musculatur nicht bewirkt werden, diese würde nur eine Faltung oder Wulstung herbeiführen. Wir können uns auch nicht mit der Erklärung helfen, daß erst nachdem durch Muskelkräfte zuerst die Blase entleert und damit der auf die Innenfläche des Epithels lastende Druck beseitigt sei, das Epithel in die Ruhelage übergehe. Denn thatsächlich ist es nicht so. In demselben Maaße wie die Blase sich entleert, während der Druck in ihr also noch hoch ist, wird das Epithel dicker. Es ist daher die Vermuthung gerechtfertigt, daß das Epithel während der Contraction der Blase mit einer höheren Elasticität begabt ist als während der Ausdehnung derselben. Dann würden sich die Erscheinungen der Formveränderungen des ganzen Epithels wie der einzelnen Zellen am ungezwungensten erklären.« Der Fehler dieser Erklärung liegt darin, daß London die Ausdehnung und Abplattung des Blasenepithels auf den direkten Druck der Inhaltsflüssigkeit zurückführt. Dieses ist nicht richtig. Der Druck wirkt auf das elastische muskelhaltige Stroma der Blase, dehnt dieses aus und die Epithelien, welche mit demselben fest verbunden sind, werden durch den entstehenden seitlichen Zug mit ausgedehnt. Sobald die Muskeln der Blase sich contrahiren und die Flüssigkeit auszutreiben beginnen, läßt die Ausdehnung des Stroma und in gleichem Maaße der auf die Epithelien wirkende seitliche Zug nach, und die Epithelien nehmen daher wieder mehr und mehr ihre ursprüngliche Form an. Selbstverständlich ist dabei die Annahme, daß die Blasenepithelien dem in einer Blase unter normalen Verhältnissen höchst möglichen Druck gegenüber incompressibel sind, denn wären sie dieses nicht, so würden sie nicht etwa in der bekannten Weise abgeplattet und ausgedehnt, sondern zerstört werden. Die sehr künstliche Hypothese London's, daß die Epithelzellen bei der Contraction der Blase mit einer höheren Elasticität begabt seien als bei der Ausdehnung, ist also durchaus überflüssig und daher zu verwerfen.

b) *Die Schleimdrüsen.* Behandelt man eine ziemlich stark ausgedehnte und in Alcohol erhärtete Blase mit meiner vor einigen Jahren veröffentlichten Methode der Doppelfärbung: Eosin-Dahlia oder Eosin-Methylviolett, so treten in dem Epithel sehr deutlich zwei Arten von Zellen hervor: gekörnte, rosa Zellen und homogen erscheinende blaue. Behandelt man eine ziemlich stark ausgedehnte Blase mit Osmium, so treten dieselben Zellen deutlich hervor. Ueber jeder liegt ein deutlich umgrenzter kleiner Fleck, zu dem die Grenzlinien der Epi-

thelien hinlaufen. Dieser Fleck wird gebildet durch einen kurzen stumpfen Fortsatz der betreffenden darunter liegenden Zelle und ist umgrenzt von der Zellmembran. Bei Anwendung der Doppelfärbung: Eosin-Anilingrün tritt in den Zellen eine eigenthümliche Netzstructur auf, und man kann durch zahlreiche Uebergangsstufen nachweisen, daß die rosa körnigen Zellen und die homogen blauen nur extreme Formen in der Reihe der Umwandlungen einer Zellenart darstellen, daß diese Zellen Schleimdrüsen sind und die Umwandlungsformen verschiedene Stadien ihrer Thätigheit bezeichnen.

II. Die Schleimdrüsen der Säugethiere.

Untersucht man auf dieselbe Weise die zusammengesetzten Drüsen der Säugethiere, so findet man, daß die Zellen in ihren Acinis völlig übereinstimmen mit den in der Amphibienblase gefundenen. Es wurden von Drüsen untersucht: die Gl. sublingual., submaxill. und Munddrüsen vom Menschen, die Gl. submaxill. vom Hunde im normalen Zustande und nach Chorda- resp. Sympathicus-Reizung, ferner die Gl. orbitalis und Gll. linguales vom selben Thiere, alle diese Drüsen nach Alcoholhärtung.

Die Resultate waren für die sämmtlichen Schleimdrüsen kurz folgende:

1) In der Blase der Amphibien giebt es einzellige Schleimdrüsen, welche eine bestimmte Metamorphose durchmachen während ihrer Drüsenthätigkeit.

2) Diese Zellen sind wahrscheinlich specifische Drüsenzellen und entstehen nicht jedesmal aus den indifferenten Epithelzellen ihrer Umgebung.

3) In den zusammengesetzten Schleimdrüsen der Säugethiere zeigen die Acinuszellen ganz dieselben Veränderungsstadien wie die einzelligen Drüsen der Amphibienblase und ebenso ganz ähnliche Formen. Jede Drüsenzelle ist selbstständig thätig, die Drüse also eine Zellcolonie.

4) Die Veränderungen in den Zellen beziehen sich auf den ganzen Zellkörper und den Kern. Im ersteren bildet sich ein mit Anilingrün sich stark färbendes Netzwerk und eine sich schwächer färbende Substanz in den Maschen desselben, Reticulum und intrareticuläre Substanz. Beide sind mucigen, die intrareticuläre Substanz enthält wahrscheinlich schon in der Zelle Mucin. Das Netzwerk besteht aus einem gegen Pepsin recht resistenten Stoff, der von concentrirtem kohlensaurem Kali nicht gelöst wird. Der Kern der Zelle zeigt während der Metamorphose Lage-, Form- und Färbungsveränderungen, welche letztere darauf hindeuten, daß auch er in seiner chemischen Zusammensetzung verändert wird.



5) Netzwerk sowohl wie intrareticuläre Substanz treten auf dem Gipfel der Thätigkeit der Zelle durch einen Porus aus, welcher entweder schon in der protoplasmatischen Zelle vorgebildet ist (Zellen der Amphibienblase) oder während der Metamorphose sich bildet (Drüsen der Säuger). Der übrigbleibende Theil der Zelle bildet sich zu dem protoplasmatischen Ruhezustande zurück, um die Metamorphose von Neuem zu beginnen. Wahrscheinlich bleibt, wenigstens bei manchen Drüsen ein Theil des Protoplasmas um den Kern unverändert und betheiligt sich bei dem Rückbildungsproceß. Eine Anzahl von Zellen wird wahrscheinlich auf dem Gipfel der Thätigkeit ganz ausgestoßen.

6) Reticulum und intrareticuläre Substanz fließen bei Berührung mit bestimmten salzhaltigen Flüssigkeiten zu mucinhaltigem Secret zusammen. Dieser Vorgang geschieht bei denjenigen Drüsen, welche in ihren Ausführungsgängen Drüsenepithel besitzen (wasserabsonderndes Epithel der Schaltstücke und Wasser-Salz absonderndes Stäbchenepithel in den Speicheldrüsen) in den Ausführungsgängen selbst, bei denjenigen, deren Ausführungsgänge ein indifferentes Cylinderepithel führen (Drüsen der Mundhöhle), wahrscheinlich bei dem Austritt des Secrets aus dem Hauptausführungsgang auf die Oberfläche der Schleimhaut durch Berührung mit dem von anderen Drüsen gelieferten wasserhaltigen Secrete.

7) Die Menge des Mucins in einem Secrete ist proportional der Entwicklung des Reticulum.

8) Die verschiedene Menge des Mucins in dem Secret der Gl. submaxill. des Hundes bei Chorda-Reizung und bei Sympathicus-Reizung ist ebenfalls nur durch die verschieden starke Ausbildung des Reticulum bei beiden Processen bedingt. Es sind also, wie Heidenhain schon ganz richtig vermuthete, nur graduelle Unterschiede bei den beiden Reizungsarten zu constatiren, nicht principielle.

9) Wie aus den Untersuchungen von Merkel über die Speichelröhren und den vorliegenden meinigen hervorgeht, findet die Abscheidung von organischen und unorganischen Stoffen an verschiedenen Stellen der Drüse, aber jedesmal durch besondere Drüsenzellen statt. Daraus folgt, daß wir nicht nöthig haben, zwei verschiedene Arten von Drüsennerven anzunehmen, secretorische und trophische, wie es Heidenhain thut, sondern nur eine Art, deren Fasern nach verschiedenen Stellen der Drüse hinlaufen.

10) Auch die nach Verstärkung resp. Abschwächung des Reizes beim physiologischen Versuch auftretenden eigenthümlichen Aenderungen des Secrets lassen sich nach dieser einfacheren Annahme genügend erklären.

11) Die Zellen der Halbmonde sind junge Zellen, welche als

Ersatzzellen dienen, wie das ja auch schon lange angenommen wurde. Dafür daß es junge Zellen sind, spricht auch ihr Gehalt an Nucleïn. In welcher Weise der Ersatz der ausgestossenen Zellen vor sich geht bei den Drüsen, welche keine Halbmonde besitzen, ist unbekannt.

12) Wenn man bei den Zellen der Schleimdrüsen überhaupt von Thätigkeit und Unthätigkeit sprechen will (richtiger wäre es wohl von einem »secretleeren« und »secretgefüllten« Zustande zu reden), so muß man als den relativen Zustand der Ruhe den protoplasmatischen bezeichnen, als den der höchsten Thätigkeit, denjenigem, in welchem das Netzwerk seine höchste Ausbildung erreicht hat. Die gerade im entgegengesetzten Sinne angewendeten Bezeichnungen Heidenhains sind also nicht richtig.

13) In einer nicht künstlich gereizten normalen Drüse findet man ebenso wie in der Amphibienblase, alle Stadien der Thätigkeit nebeneinander. Solche Drüsen eignen sich also auch am besten zur Untersuchung.

Universität.

Sechster Bericht über die Poliklinik für Ohrenkranke

des

Dr. K. Bürkner.

Im verflossenen Jahre ist die Poliklinik für Ohrenkranke insofern einen wesentlichen Schritt vorwärts-gekommen, als sie in die Lage versetzt worden ist, den meisten bedürftigen Patienten freie Arznei und freies Verbandmaterial zu gewähren. Es wurde dieser Vortheil dadurch ermöglicht, daß auf Anregung des Königl. Universitäts-Curatoriums die Vertretung der Stadt Göttingen bis auf weiteres einen jährlichen Beitrag bewilligte und daß auch die Provinzialverwaltung auf mein Ansuchen eine Summe zur Verfügung stellte. Durch dieses geneigte Entgegenkommen, für welches ich den betreffenden Behörden zu Danke verpflichtet bin, ist mein Institut, was die den Patienten gewährten Vortheile betrifft, mit den vom Staate unterhaltenen Polikliniken ziemlich gleich gestellt und in den Stand versetzt worden, seiner Bestimmung weit besser zu genügen, als bisher

In der Zeit vom 1. Januar bis 31. December 1883 wurden in der Poliklinik im Ganzen an 868 Personen mit 1093 verschiedenen Krankheitsformen 5025 Consultationen ertheilt.

Zur Frequenz der früheren Jahre verhalten sich diese Zahlen folgendermaßen:

1878. 217 Patienten; 1271 Consultationen.

1879. 328 Patienten; 2449 Consultationen; 111 Pat. und 1178 Consult. mehr als im Vorjahre.

1880. 428 Patienten; 2179 Consultationen; 100 Pat. mehr, 270 Consult. weniger als im Vorjahre.

1881. 516 Patienten; 2852 Consultationen; 88 Pat. und 473 Consult. mehr als im Vorjahre.

1882. 753 Patienten; 4564 Consultationen; 237 Pat. und 2112 Consult. mehr als im Vorjahre.

1883. 868 Patienten; 5025 Consultationen; 115 Pat. und 416 Consult. mehr als im Vorjahre.

Die Frequenz der Poliklinik hat sich mithin gegen das erste Jahr genau, die Zahl der Consultationen fast genau vervierfacht.

812 Patienten wurden in regelmäßige Behandlung genommen, 56 dagegen theils wegen völliger Unheilbarkeit oder wegen fehlender Ohrenkrankheit abgewiesen, theils andren Instituten zugeführt.

Geheilt wurden	537 =	61,9%.
Wesentlich gebessert	110 =	12,7%.
Ungeheilt blieben	27 =	3,1%.
Ohne Behandlung entlassen wurden	56 =	6,3%.
Vor beendigter Kur blieben aus	102 =	11,8%.
In Behandlung verblieben	29 =	3,4%.
Gestorben sind	7 =	0,8%.

Es war somit bei den zur Untersuchung gekommenen Patienten Heilung zu verzeichnen in 61,9%, Besserung in 12,7%; von den überhaupt in Behandlung gekommenen 812 Patienten wurden, nach Abrechnung der noch in der Kur befindlichen, 82,6% geheilt oder wesentlich gebessert.

Von den 868 Patienten waren

wohnhaft in Göttingen	286 =	32,9%.
wohnhaft außerhalb Göttingen, aber in der Provinz Hannover	418 =	48,2%.
Mithin in der Prov. Hannover überhaupt	704 =	81,1%.
Außerdem kamen auf		
Prov. Hessen-Nassau	72 =	8,3%.
» Sachsen	53 =	6,4%.
» Westfalen	9 =	0,9%.
Rheinprovinz	2 =	0,3%.
Herzogthum Braunschweig	24 =	2,8%.
Großherzogthum Oldenburg	1 =	0,1%.
Fürstenthum Lippe-Detmold	1 =	0,1%.
Mithin außerhalb der Prov. Hannover	164 =	18,9%.
	868 =	100,0.

Unter den 868 Kranken sind eine Anzahl von Patienten andrer Institute mit inbegriffen, welche ich theils in den betreffenden Kliniken, theils in meiner Poliklinik behandelt habe; nämlich

Patienten	der Augenklinik	34.
»	der Medic. Klinik	35.
»	der Chirurg. Klinik	2.
»	der Irrenanstalt	2.
		73.

Männlichen Geschlechts waren . . .	545	=	62,8%.
Weiblichen Geschlechts	323	=	37,2%.
Im Kindesalter (incl. 15. Lebensjahr) standen	375	=	43,2%.
Erwachsene waren	493	=	56,8%.

Die Thätigkeit der Poliklinik vertheilte sich auf die einzelnen Monate in folgender Weise:

Januar:	59	Patienten;	430	Consultationen.
Februar:	72	»	396	»
März:	49	»	313	»
April:	77	»	367	»
Mai:	101	»	441	»
Juni:	93	»	506	»
Juli:	82	»	457	»
August:	81	»	459	»
September:	60	»	412	»
October:	74	»	451	»
November:	70	»	428	»
December:	50	»	365	»
Summa	868	Patienten	5025	Consultationen.

Folgende Krankheiten kamen zur Beobachtung:

A. Krankheiten des äußeren Ohres.

223 Fälle.

1. *Ekzem des äußeren Ohres und Gehörganges.* 21 Fälle.
   Einseitig: 14 mal. Acut: 15 mal.
   Doppelseitig: 7 mal. Chronisch: 6 mal.

19 geheilt; 1 vor beendigter Kur ausgeblieben; 1 noch in Behandlung.

2. *Erysipel des äußeren Ohres.* 1 Fall.
   Einseitig; geheilt.
3. *Phlegmonöse Entzündung des äußeren Ohres.* 1 Fall.
   Einseitig; geheilt.
4. *Absceß am äußeren Ohre.* 1 Fall.
   Einseitig; durch Incision geheilt.

5. *Atresie des äußeren Gehörganges.* 1 Fall.
   Einseitig; wegen Aussichtslosigkeit der Behandlung abgewiesen.
6. *Exostosen im äußeren Gehörgange.* 1 Fall.
   Doppelseitig; Erfolg der Behandlung unbekannt geblieben.
7. *Fractur des äußeren Gehörganges.* 1 Fall.
   Doppelseitig. Geheilt.
8. *Diffuse Entzündung des äußeren Gehörganges.* 6 Fälle.
   Einseitig 5. Acut 5.
   Doppelseitig 1. Chronisch 1.
   Sämmtlich geheilt.
9. *Pilzwucherung (Aspergillus) im Gehörgange.* 2 Fälle.
   Beide einseitig. Geheilt.
10. *Furunkel des Gehörganges.* 28 Fälle.
    Sämmtlich einseitig und geheilt.
11. *Granulationen im äußeren Gehörgange.* 1 Fall.
    Einseitig; geheilt.
12. *Cholesteatom des äußeren Gehörganges.* 2 Fälle.
    Einseitig 1.
    Doppelseitig 1. Beide geheilt.
13. *Cerumenpfropf.* 139 Fälle.
    Einseitig 86.
    Doppelseitig 53.
    Geheilt 131 mal, gebessert 8 mal.
14. *Fremdkörper.* 17 Fälle.
    Einseitig 16 mal.
    Doppelseitig 1 mal.
    Als Fremdkörper fanden sich vor: Wattepfröpfe 4 mal, ein Baumwollkern, eine Erbse, ein Stein, ein Strohhalm, eine Haferrispe, ein Kirschkern, ein Papierklumpen 2 mal, Canariensamen, eine Perlzwiebel, eine lebende Fliege 2 mal, ein lebender Floh.
15. *Sarkom des Schläfenbeins.* 1 Fall.
    Einseitig. Nicht behandelt.

B. Krankheiten des Trommelfells.
31 Fälle.

16. *Acute Entzündung des Trommelfelles.* 3 Fälle.
    Sämmtlich einseitig. Sämmtlich geheilt.
17. *Chronische Entzündung des Trommelfelles.* 1 Fall.
    Einseitig; geheilt.
18. *Zerreißung des Trommelfelles.* 6 Fälle.
    Sämmtlich einseitig; geheilt.

19. *Abgelaufene Processe (Narben, Verkalkungen, trockene Perforationen).* 21 Fälle.
    Einseitig 6 mal.
    Doppelseitig 15 mal.
    3 geheilt, 7 gebessert, 3 ungeheilt, 4 nicht behandelt, 4 ausgeblieben.

C. Krankheiten des Mittelohres.
559 Fälle.

20. *Acuter Catarrh der Eustachischen Röhre.* 25 Fälle.
    Einseitig 13 mal.
    Doppelseitig 12 mal.
    24 geheilt, 1 gebessert.
21. *Chronischer Catarrh der Eustachischen Röhre.* 4 Fälle.
    Einseitig 2.
    Doppelseitig 2.
    2 geheilt, 1 gebessert, 1 ungeheilt.
22. *Acuter einfacher Mittelohrcatarrh.* 114 Fälle.
    Einseitig 53 mal.
    Doppelseitig 61 mal.
    Exsudat war in 21 Fällen nachweisbar.
    91 geheilt, 9 gebessert, 1 ungeheilt, 13 ausgeblieben.
23. *Chronischer einfacher Mittelohrcatarrh.* 188 Fälle.
    Einseitig 33 mal.
    Doppelseitig 155 mal.
    Mit vorwiegender Hyperämie 57 mal, mit vorwiegender Sklerose 66 mal, mit Exsudation 19 mal, mit Anchylose 3 mal, mit Labyrinthaffection 13 mal, Syphilis 6 mal.
    43 geheilt, 64 gebessert, 11 ungeheilt, 11 nicht behandelt, 39 ausgeblieben, 19 noch in Behandlung, 1 gestorben (Phthise).
24. *Acute eiterige Mittelohrentzündung.* 103 Fälle.
    Einseitig 85 mal.
    Doppelseitig 18 mal.
    88 geheilt, 1 gebessert, 10 ausgeblieben, 2 noch in Behandlung, 2 gestorben. (1 Nephritis, 1 Meningo-encephalitis).
25. *Chronische eiterige Mittelohrentzündung.* 118 Fälle.
    Einseitig 66 mal. Mit Caries 10 mal.
    Doppelseitig 52 mal. Mit Polypen 26 mal.
    55 geheilt, 16 gebessert, 5 ungeheilt, 2 nicht behandelt, 29 ausgeblieben, 7 noch in Behandlung, 4 gestorben (2 Phthise, 1 Hirnabsceß, 1 Lebercarcinom).

26. *Bluterguß in die Paukenhöhle.* 1 Fall.
Einseitig; geheilt.
27. *Periostitis des Warzenfortsatzes.* 3 Fälle.
Sämmtlich einseitig; geheilt. (2 mal Absceßbildung).
28. *Neuralgie des Plexus tympanicus.* 3 Fälle.
Sämmtlich einseitig; geheilt.

D. Krankheiten des inneren Ohres.

47 Fälle.

29. *Ménière'sche Krankheit. (Otitis intima acuta).* 1 Fall.
Doppelseitig; ungeheilt.
30. *Nerventaubheit,* 24 Fälle.
Einseitig 6 mal. Acut 4 mal.
Doppelseitig 18 mal. Chronisch 20 mal.
31. *Nervöse Taubheit nach Gebrauch von Salicylsäure.* 3 Fälle.
Einseitig 1 mal.
Doppelseitig 2 mal.
Sämmtlich geheilt.
32. *Taubstummheit.* 12 Fälle.
Angeboren 2 mal; erworben 10 mal.
Nicht in Behandlung genommen.
33. *Brausen ohne Befund und ohne Gehörsverminderung.* 7 mal.
Einseitig 5 mal.
Doppelseitig 2 mal.
1 geheilt, 2 gebessert, 2 ungeheilt, 1 nicht behandelt, 1 ausgeblieben.

E. Verschiedenes.

8 Fälle.

Normal wurden 7 Fälle befunden; die Diagnose blieb unbestimmt in 1 Falle.

An Operationen wurden ausgeführt:

Eröffnung von Abscessen a) am äußeren Ohre 1 mal.
b) im Gehörgange *(Furunkel)* 8 mal.
c) am Warzenfortsatze 2 mal,
Fremdkörper-Extraction (Pincette) 4 mal.
Paracentese der Paukenhöhle 47 mal.
Plicotomie 4 mal.
Polypen-Extraction 22 mal.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

October.

(Fortsetzung.)

Mitgliederverzeichniß der roy. society. Novbr. 1882.
Proceedings of the roy. society. Nr. 221—226.
Catalogue of the scientific books in the library of the royal society. General catalogue. 1882.
Nouveaux mémoires de la société impér. des naturalistes de Moscou. T. XIV. Livr. 1.
Politische Correspondenz Friedrichs des Großen. Bd. X. Berl. 1883. (Von der preuß. Academie).
The united states coast and geodetic Survey report. 1881.
Memoirs of the geological Survey of India. Vol. XXII.
Bulletin of the american geograph. society. 1882. Nr. 5. 1883. Nr. 2.
Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- u. Völkerkunde Ostasiens. 1883 Juni.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XV. Entr. 6. T. XVI. Entr. 1. 2.
A. B. Meyer, ein neuer Fundort von Nephrit in Asien. S. A.
Bibliothèque universelle. Arch. des sciences physiques et mathémat. 3e pér. T. X. Nr. 7. 9.
Bulletin des travaux de la société murithienne du Valais. Fasc. II.
Hildebrand Hildebrandson, samling af bermärkelse dagar, tecken, märken, ordsprak etc. S. A.
The transactions of the roy. irish academy. Vol. XXIII. P. 5. Vol. XXVIII. P. 11—13.
Proceedings of the roy. irish academy. science Nr. 9. 10. Polite literature and antiquities. Nr. 4.
A. Moritz (Tiflis), Materialien zu einer Klimatologie des Kaukasus. Abth. I. meteorol. Beob. Bd. I. Bd. II, Lief. 1—4.
Mielberg, meteorol. Beobachtungen des tifliser physikal. Observatoriums im J. 1880. 1881.
Ders., magnetische Beobachtungen. Ebendas. im J. 1879. 1880.
Ders., Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens. Ebend. im J. 1880.
Mittheilungen des histor. Vereins für Steiermark. Hft. 31.
Beiträge zur Kunde der steiermärkischen Geschichtsquellen, herausgegeben vom histor. Verein. Jahrg. 19.
Krones, Ritter v. Marchland, Festrede aus Anlaß der 600jährigen Habsburgfeier der Steiermark. 1883.
Flora batava, Afl. 261. 262.
19th Annual report of the alumni association. Philadelphia. 1883.
L. Netto, apperçu sur la théorie de l'évolution. Rio de Janeiro. 1883. 8.
Jahrbuch des sächs. meteorologischen Instituts 1882. Lief. 1.
Bulletin de l'academie roy. des sciences de Belgique. 3e Sér. T. VI. Nr. 7.
Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellsch. 18. Jahrg. Hft. 3.
Proceedings of the scientific meetings of the zoological society of London. 1883. P. II.
Ztschr. für Naturwissenschaften, herausgegeben vom naturwissensch. Verein für Sachsen u. Thüringen in Halle. Bd. LV. Bd. LVI, Hft. 1. 2.
Sitzungsberichte der k. preuß. Academie der Wissenschaften 1883. XXII—XXXVII.

Von der belgischen Academie.

Mémoires couronnés et mém. des savans étrangers publiés par l'académie royale. T. XLIV.
— de l'académie roy. des sciences etc. T. XLIII 2e partie. T. XLIV.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'acad. royale. Collection in 8o. T. XXXI. XXXIII—XXXV.
Collection de chroniques belges inédites, publiée par ordre du gouvernement.
Pouillet, Correspondance du cardinal de Granvelle. T. III.
Kervyn de Lettenhove, rélations politiques des pays-bas et de l'Angleterre. T. 1—3.
Devillers, cartulaire du comte de Hainault. T. I.
Gachard et Piot, collection des voyages des souverains des pays-bas. T. III. IV.
Alph. Wauters, table chronologique des chartes et diplômes imprimés concernant l'histoire de la Belgique. T. VI.

November.

Nature No. 731—734.
R. Wolff, astronomische Mittheilungen LIX.
Abhandlungen der historischen Classe der k. bair. Akademie der Wissensch. Bd. XVII. Abth. 1.
Monumenta boica. Vol. XLIV.
E. Kuhn, Festrede über Herkunft und Sprache der transgangetischen Völker. München 1883.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVI. Entr. 4.
Boncompagni, bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matemat. e fisiche. T. XV. Decbre. T. XVI. Gennaio (für die Gauss-Bibl.).
G. Massaroli, Phul e Turklatpalasar II, Salmanasar IV e Sargon, Questione biblico-assire. Roma 1882. 8. (2 Exempl.).
Zeitschr. der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XVIII. Novbr.
Mittag-Leffler, Acta mathematica 2. 3. 4.
Zeitschr. für Naturwissenschaften im Auftrag des naturwissenschaftl. Vereins von Sachsen und Thüringen. Bd. LVI. Hft 4.
Proceedings of the academy of natural science of Philadelphia. 1882. P. 1—3.
Annual report of the chief signal officer to the secretary of war for the year ending 30 June 1880. P. 1. 2.
Smithsonian miscellaneous collections. Catalogue of publications (478) 1846—1882. (490) Additions and corrections to the list of foreign correspondents to Jan. 1883.
Proceedings of the canadian Institute. Toronto. Vol. I. No. 4.
Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft in Nürnberg 1882.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XIII. Hft 2.
Bulletin de l'académie roy. des sciences etc. de Belgique. T. VI. No. 8.
Revista Euskara. Ano VI. No. 62. 63.
Annales de la société linéenne de Lyon. T. XXIX.
Mémoires de la section des sciences de l'académie de Montpellier. T. X. fasc. 2.
Annales du musée Guimet. T. V.
Revue de l'histoire des réligions. 3e année. T. VI. No. 4. 5. T. VII. No. 1.
Catalogue du musée Guimet. 1e partie. Inde, Chine et Japan.
Verhandlungen der physicalisch-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. XVII.
Leopoldina. Hft 19. No. 19. 20.
Atti della societa toscana di scienze naturali. Proc. verbali. T. III. (Adunanza 1 Juglio 1883).
Monthly notices of the royal astronomical society. Vol. XLIII. No 9 (in dupl.).
Bulletin de la société mathematique de France. T. XI. No. 4.
Bulletin astronomique et météorologique de l'observatoire impér. de Rio Janeiro. 1883. No. 8.
Irmischia 1883. No. 6—10.
Mémoires de l'académie impér. des sciences de St. Petersbourg. T. XXXI. No. 5—8.
Transactions of the zoological society of London. Vol. XI. P. 9.
Proceedings of the scientifie meetings of the zoological society of London. 1883. P. 3.
List of the vertebrated animals now or lately living in the gardens of the zool. society of London. 8th edit. 1883.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch laboratorium der utrechtsche hoogschool 3e Reeks. VIII.
Proceedings of the london mathemat. society, No. 207. 208.

Von der Academie in Krakau.

Starodawne prawa polskiego Pomniki. T. VII. Zesz 2.
Editionum collegii historici academiae literarum cracoviensis. No. 24. Monumenta medii aevi historica. T. VIII.
Pamniętruk akademii umdyętności w Krakowie. Wydział matematyczno-przyrodniczy. T. VIII.
Sprawozdanii komisyi do Badania historyi sztuki w polscze. T. III. Zesz 3. 4.
Sprawozdanie komisyi fizyzograficznéi obeimujące pogląd na czynnósci dokanane w ciągu roku. 1882. T. XVII.
Rozprawy i Sprawozdania z posiedzeń wyzdiatu matematyczno-przyrodniczego. T. X.
Rozprawy i Sprawozdania z posiedzén wyzdiatu historycznofilosoficznego. T. XVI.
Zbiór wiadomósci do antropologii Krakowéj wydawany staraniem Komisyi antropologicznéi Akademii umiejetnósci w Krakowie. T. VII.
Tadeus Korzona wewaętazne dzieje polski pa Stanislawa Augusta. T. II.
Teofila zebrawskiego Słownik wyrazów techniecznych tyeza chych sie Budowniktua 1883.
Rocznik zarzadu akademii umiejetnósci w Krakowie. Rok 1882.

December.

Bulletin de l'academie roy. des sciences etc. de Belgique. 3e Sér. T. VI. Nr. 9. 10.
60ster Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.
Transactions and proceedings of the roy. society of Victoria. Vol. XIX.
Wolf, astronomische Mittheilungen. LX.
Bulletin astronomique et metéorologique de l'observatoire imp. de Rio Janeiro. 1883. Nr. 9.
Zeitschr. der österr. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XVIII. Decbr.
Nature, Nr. 736—739.
Commentaria in Aristotelem graeca edita consilio et autoritate academiae literarum regiae borussicae. Vol. VI. P. 1.
Oversigt over det kongelige danske Videnskabernes Selskabs forhandlingar. 1883.
Mémoires de l'academie roy. de Copenhague. Ser. 6. Classe des sciences. Vol. II. Nr. 4. 5.
Observations météorologiques publiées par la sociéte des sciences de Finlande. Vol. VIII.
Boncompagni, bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matemat. e fisiche. Febrajo (für die Gauss-Bibliothek).
Leopoldina. Hft XIX. Nr. 21. 22.
Johns Hopkins University circulars. Vol. III. Nr. 27.
Memoirs of the museum of comparative zoology at Harvards College. Vol. VIII. Nr. 2. Vol. IX. Nr. 2.
Mittlere Oerter von 83 südl. Sternen für 1875. Publication der astronom. Gesellsch. XVII.
Zeitschr. der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. XXXVII. Hft 3.
Revista Euskara. Año VI. Nr. 64.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVI. Entr. 5. 6.
Journal of the linnean society. Botany. Nr. 122—129. Zoology Nr. 95—100.
Transactions of the linnean society. 2d ser. Botany Vol. II. P. 2—5. Zool. Vol. II. P. 6—8.
List of the linnean society of London. 1881. 1882.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.





2. März. **№ 3.** 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 2. Februar.

Wüstenfeld, Die Gelehrten-Familie Muhibbi in Damascus und ihre Zeitgenossen im XI. (XVII.) Jahrhundert. Zweite Abtheilung. (Erscheint in den Abhandlungen).

Wieseler, Zwei Gemmen und zwei Intaglien mit der Darstellung römischer Herrscher aus dem 4ten Jahrhundert nach Chr.

K. Schering, über die Beobachtung der sogenannten Erdströme. (Vorgelegt von E. Schering).

Ueber die Beobachtung der sogenannten Erdströme.

Von

Karl Schering.

Ein constanter galvanischer Strom, welcher mit Hülfe eines Galvanometers in einem Drahte beobachtet wird, dessen beide an Metallplatten angelöthete Enden mit zwei Punkten (1) und (2) der Erde verbunden sind, kann entweder von einer Potentialdifferenz in den Punkten (1) und (2) der Erde herrühren (»Erdstrom«) oder von einer Differenz der electromotorischen Kräfte, die bei der Berührung der Metallplatten mit dem feuchten Erdreich wirksam werden, (»Erdplattenstrom«), oder schließlich von beiden Ursachen zusammen. Momentane oder kurzdauernde Schwankungen dieses Stromes können die Folge sein einer Aenderung jener Potentialdifferenz, oder sie sind unmittelbar Inductionsströme hervorgerufen durch die Schwankungen der magnetischen Kraft der Erde; dagegen werden die electromotorischen Kräfte zwischen den Metallplatten und der Erde keine momentanen Schwankungen erleiden, vorausgesetzt, daß die Platten, und



zur Vermeidung von Thermoströmen, auch die Kabel so tief gelegt sind, daß sie nicht den veränderlichen Witterungseinflüssen ausgesetzt sind.

Um zunächst über die Ursache jener constanten Ströme vollständige Klarheit zu erhalten, würde also die Aufgabe zu lösen sein, die Beobachtungen so anzuordnen, daß sowohl die Potentialdifferenz der Punkte (1) und (2) der Erde, wie auch die Differenz der electromotorischen Kraft der Erdplatten berechnet werden kann.

Herr Wild spricht in einer kürzlich erschienenen Abhandlung die Ansicht aus, diese Aufgabe sei lösbar, wenn an vier Punkten der Erde Metallplatten versenkt werden und von jeder ein isolirtes Kabel zum Observatorium geführt wird, so daß je zwei derselben bei geeigneter Commutator-Vorrichtung mit den beiden Draht-Enden eines Galvanometers verbunden werden können. (H. Wild: »Die Beobachtung der electrischen Ströme der Erde in kürzeren Linien.« Mémoires de l'Académie Imp. d. sc. de St. Pétersbourg. VII Série Tome XXXI. 1883. Nr. 12. Seite 10 von oben bis zu den Worten: »Es sind also in der That nur so viele Unbekannte als Gleichungen und somit die Aufgabe lösbar.«)

Diese Ansicht ist aber nicht zutreffend, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Wenn P_1 resp. P_2 der Werth des electrischen Potentials der Erde an dem Punkte (1) resp. (2) ist, wenn ferner e_1 resp. e_2 die electromotorische Kraft zwischen den Metallplatten und der Erde an denselben Punkten (1) und (2) bezeichnet, so besteht die Gleichung:

$$P_1 - P_2 - (e_1 - e_2) = I.W$$

Die Intensität I des galvanischen Stromes kann mit dem Galvanometer gemessen und auf eine absolute Einheit reducirt werden; die Größe W, welche sich zusammensetzt aus dem Leitungswiderstande des Kabels und dem Uebergangswiderstande an den Berührungsstellen der Metallplatten mit der Erde, ist ebenfalls nach bekannten Methoden zu bestimmen, z. B. durch Hinzufügen eines neuen bekannten Drahtwiderstandes und Bestimmung der dadurch eintretenden Schwächung des Stromes. Das Product $I.W = A$ ist daher als bekannte Größe anzusehen.

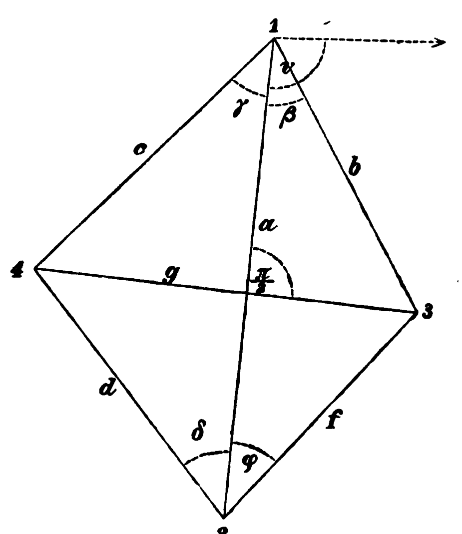
Es wird ferner, wenn die Punkte (1) und (2) nicht allzuweit (bei den Beobachtungen von Hrn. Wild nur 0,6 bis 1,0 Kilometer) von einander entfernt sind, die Annahme gestattet sein, daß die beiden Flächen constanten Potentials, von denen die eine durch den Punkt (1), die andere durch den Punkt (2) geht, einander parallele Ebenen sind. Bezeichnet υ den Winkel, welchen die Verbindungslinie von

(1) und (2) mit der Normale jener Ebenen bildet, so werden wir (mit Herrn **Wild**) setzen können:

$$P_1 - P_2 = \varepsilon . a \cos v$$

worin a den Abstand der Orte (1) und (2) bedeutet, und ε die Potentialdifferenz zweier Punkte, welche auf ein und derselben Strömungslinie liegen und um die Einheit der Länge von einander entfernt sind.

Ist jetzt von vier Punkten je eine Kabelleitung zum Observatorium geführt, so sind im Ganzen sechs Combinationen je zweier Leitungen möglich, wie die nebenstehende Figur andeutet. Diesen entsprechen die sechs Gleichungen:



$$(1.)\quad \begin{aligned} A_1 &= P_1 - P_2 - (e_1 - e_2) \\ A_2 &= P_1 - P_3 - (e_1 - e_3) \\ A_3 &= P_1 - P_4 - (e_1 - e_4) \\ A_4 &= P_4 - P_2 - (e_4 - e_2) \\ A_5 &= P_3 - P_2 - (e_3 - e_2) \\ A_6 &= P_4 - P_3 - (e_4 - e_3) \end{aligned}$$

Jede der hier vorkommenden Potentialdifferenzen kann in entsprechender Weise wie $P_1 - P_2$ umgeformt werden. Wir erhalten:

$$(2.)\quad \begin{aligned} &P_1 - P_2 = \varepsilon a \cos\upsilon; \quad P_1 - P_3 = \varepsilon b \cos(\beta - \upsilon); \quad P_1 - P_4 = \varepsilon c \cos(\gamma + \upsilon) \\ &P_4 - P_2 = \varepsilon d \cos(\delta - \upsilon); \quad P_3 - P_2 = \varepsilon f \cos(\varphi + \upsilon); \quad P_4 - P_3 = \varepsilon g \sin\upsilon \end{aligned}$$

Hierin ist, wie bei Hrn. **Wild**, die Annahme gemacht, daß die Orte der vier Metallplatten in einer zur Ebene constanten Potentials senkrechten Ebene liegen, und daß die beiden Diagonalen a und g auf einander senkrecht stehen. Da die Entfernung der Metallplatten und ihre gegenseitige Lage bestimmt werden kann, so enthalten die sechs Gleichungen (1), mit Berücksichtigung von (2), nur sechs Unbekannte: ε, v, e_1, e_2, e_3, e_4. Der Schluß jedoch, der jetzt von Herrn **Wild** gezogen wird, man könne daher diese Unbekannten berechnen, ist nicht gestattet, da von den Gleichungen (1) nur drei z. B. die drei ersten von einander unabhängig sind. Es ist nämlich:

$$A_1 - A_2 = P_3 - P_2 - (e_3 - e_2)$$
$$A_1 - A_3 = P_4 - P_2 - (e_4 - e_2)$$
$$A_2 - A_3 = P_4 - P_3 - (e_4 - e_3)$$

und es muß daher:

$$(3.)\quad A_1 - A_2 - A_5 = 0; \quad A_1 - A_3 - A_4 = 0; \quad A_2 - A_3 - A_6 = 0$$

sein. Um nach der Einsetzung von (2) in die Gleichungen (1) die gegenseitige Abhängigkeit der letzteren erkennen zu können, hat man die folgenden Relationen zwischen den Winkeln im Viereck zu berücksichtigen

$$a\cos\upsilon - b\cos(\beta - \upsilon) - f\cos(\varphi + \upsilon) = 0$$
$$a\cos\upsilon - c\cos(\gamma + \upsilon) - d\cos(\delta - \upsilon) = 0$$
$$d\cos(\delta - \upsilon) - f\cos(\varphi + \upsilon) - g\sin\upsilon = 0$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Gleichungen (15′) resp. (15″) (p. 11) des Herrn Wild, welche der Berechnung von ε und $\tan\upsilon$ zu Grunde gelegt werden, diese Größen in der Form: Null dividirt durch Null, ergeben.

In Folge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wird man die Größen unter (3), wenn man sämmtliche A durch Beobachtung ermittelt, nicht genau gleich Null erhalten. So ist bei Herrn Wild:

$$A_1 - A_2 - A_5 = -5; \quad A_1 - A_3 - A_4 = +8; \quad A_2 - A_3 - A_6 = +2$$

wenn die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes gleich 10000 gesetzt wird. Der geringe Betrag dieser Größen gibt Zeugniß für die große Genauigkeit der ausgeführten Beobachtungen, aber man kann keinen Schluß daraus ziehen über die Größe von ε und υ.

Es ist leicht zu zeigen, daß überhaupt durch die Vermehrung der Zahl der Erdplatten die fragliche Aufgabe nicht gelöst werden kann: Wenn man nämlich n Metallplatten an n Punkten der Erde einsenkt, von jeder isolirt eine Kabelleitung zum Beobachtungsraum führt und je zwei derselben mit dem Galvanometer verbindet, so kann man $\frac{1}{2}n(n-1)$ Größen $A_{\nu,\lambda}$ ermitteln, welche durch die Gleichungen

$$(4)\qquad A_{\nu,\lambda} = P_\nu - P_\lambda - (e_\nu - e_\lambda)$$

bestimmt sind. Da jede Differenz $P_\nu - P_\lambda$, wie oben, durch ε und υ und durch bekannte, von der Entfernung und der gegenseitigen Lage der Platten abhängige Größen, ausgedrückt werden kann, so enthält das System der Gleichungen (4). $n+2$ Unbekannte. Es sind aber nur $(n-1)$ Gleichungen z. B. die folgenden:



(5) $A_{1,\lambda} = P_1 - P_\lambda - (e_1 - e_\lambda); \quad \lambda = |2, 3, \ldots, n|$

von einander unabhängig; denn aus der Differenz zweier Gleichungen (5) folgt eine des Systems (4). —

Es sei gestattet hier auch die Frage zu erledigen, ob es zweckdienlich sei, Platten verschiedenen Metalls zu benutzen: Wenn an n von einander entfernten Punkten je zwei Platten aus verschiedenem Metalle neben einander, ohne sich jedoch zu berühren, versenkt sind, und von jeder dieser $2n$ Platten isolirte Kabel zum Observatorium geführt werden, so kann man den Werth der folgenden Größen A und B durch Beobachtung ermitteln.

$$\begin{aligned} B_\nu &= e_\nu - e'_\nu \\ A_{\nu,\lambda} &= P_\nu - P_\lambda - (e_\nu - e_\lambda) \\ A'_{\nu,\lambda} &= P_\nu - P_\lambda - (e'_\nu - e_\lambda) \\ A''_{\nu,\lambda} &= P_\nu - P_\lambda - (e_\nu - e'_\lambda) \\ A'''_{\nu,\lambda} &= P_\nu - P_\lambda - (e'_\nu - e'_\lambda) \end{aligned}$$

Hierin bedeuten e_ν, e'_ν für einen bestimmten Werth von ν die beiden electromotorischen Kräfte, die bei der Berührung der beiden an demselben Orte versenkten Metallplatten mit dem feuchten Erdreich wirksam werden.

Von diesen Gleichungen, welche $2n+2$ Unbekannte enthalten, nachdem $P_\nu - P_\lambda$, wie oben, durch ε und υ ausgedrückt ist, sind jedoch nur $2n-1$ von einander unabhängig, z. B. die folgenden:

$$A_{1,\lambda} = P_1 - P_\lambda - (e_1 - e_\lambda); \qquad B_\nu = e_\nu - e'_\nu.$$

Mit Rücksicht auf das Obige ist meine Behauptung gerechtfertigt, daß man eine Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten der Erde nicht mit Sicherheit bestimmen, nicht einmal ihre Existenz nachweisen kann, wenn man Platten verwendet, welche bei der Berührung mit der Erde auf unbekannte Weise electromotorisch wirksam werden.

Zur Untersuchung der durch die Aenderungen der magnetischen Kraft der Erde in geschlossenen Leitungen hervorgerufenen Inductionsströme ist diejenige Methode anzuwenden, welche Herr Werner Siemens bei den Arbeiten der Deutschen Nordpolar-Expedition im Jahre 1882—83 eingeführt hat.

Straßburg 1884 Januar 30.

Universität.

Am 16. December 1883 starb der Custos der hiesigen Universitätsbibliothek Dr. Gustav Löwe an den Folgen eines unglücklichen Sturzes in dem neuerbauten Flügel des Gebäudes. Das Unglück geschah am 14. Vormittags dadurch, daß er vom ersten Stockwerke in den Schacht des Fahrstuhles hinabstürzte. Er war so schwer verletzt, daß er nicht wieder zum Bewußtsein gekommen ist. Sein Tod reißt eine schwer ausfüllbare Lücke in den Kreis seiner Berufsgenossen und die allgemeine Theilnahme beklagt das jähe Ende des trefflichen Mannes und hochbegabten Gelehrten.

Die beiden Hauptaufgaben, denen er sich gewidmet hatte, waren die vollständige Sammlung und Bearbeitung der lateinischen Glossare und die Fortführung der kritischen Ausgabe des Plautus, die Friedrich Ritschl unvollendet lassen mußte. Für die Sammlung der Glossare hatte er mit vieljährigem Fleiße umfassende und sorgfältige Vorarbeiten gemacht, was ihm von dem weitzerstreuten und ungleichartigen Materiale erreichbar war, gesammelt und gesichtet und in dem 1876 erschienenen Prodromus corporis glossariorum latinorum zum ersten Male nicht blos gezeigt, wie diese außerordentlich verderbten und durch Umarbeitungen Verkürzungen Mißverständnisse aller Art entstellten Lexika in Gruppen zu ordnen seien, welche Stellung und Bedeutung einem jeden zukomme, wie es um die Entstehungszeit und die Abhängigkeit der einzelnen von einander stehe, sondern auch mit großem Scharfsinn eine Menge schwieriger Einzelfragen gelöst, eine nicht geringe Anzahl anscheinend unrettbar corrumpirter Stellen auf das glänzendste hergestellt und die Bedeutung der Glossen für die Worterklärung und kritische Behandlung der älteren römischen Dichter namentlich an dem Beispiel des Plautus und Lucilius einleuchtend dargelegt. Sein Buch bewies, wie sehr er der rechte Mann für dies weitaussehende Unternehmen war, an dem er in den folgenden Jahren mit Energie fortarbeitete, indem er seine Reisen in Italien und Spanien benutzte, seine Sammlungen möglichst zu erweitern und zu ergänzen und, wo sich Gelegenheit und Veranlassung bot, einzelne Glossen zur Erklärung und Verbesserung der Autoren herbeizog oder den römischen Sprachschatz durch neue Wörter und Wortformen bereicherte, die er in den Glossaren entdeckt hatte.

Mit seinen beiden Freunden Georg Goetz und Friedrich Schoell von Ritschl zur Vollendung seines Plautus erkoren, übernahm Löwe zunächst die erneute Vergleichung der Handschriften, vor allem die des ambrosianischen Palimpsestes in Mailand, der durch fehlerhafte Behandlung mit Chemikalien so durchlöchert und

fragmentirt ist, daß seine Lesung zu den schlimmsten Prüfungen palaeographischer Entzifferung gehört und nur unter der Voraussetzung vollständiger Vertrautheit mit der römischen Sprache des sechsten Jahrhunderts und der Auffassung und Ausdrucksweise des Dichters Erfolg verspricht, weil der Entziffernde alle Möglichkeiten der Wortfügung positiv wie negativ ermessen und erwägen muß, um den Thatbestand der erkennbaren Buchstaben festzustellen. In diesen Beziehungen trefflich ausgerüstet und durch seine guten Augen unterstützt, ging Löwe mit der ihm eigenen Hingebung und unermüdlichen Arbeitskraft an die schwere Arbeit. Er erkannte sehr bald, wie wichtig und nothwendig sie war, wie viele Ergebnisse sie auch nach den Vergleichungen Ritschls und Studemunds, anderer zu geschweigen, lieferte, und erörterte dieses, so anerkennend gegen seine Vorgänger, wie bestimmt in der Sache, in den Coniectanea Plautina, seinem Antheile an den mit Goetz und Schoell 1878 herausgegebenen Analecta Plautina, indem er es an einer großen Zahl von Versen aus dem Trinummus Pseudolus Stichus und Truculentus nachwies; außerdem gab er eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen und Erläuterungen, deren Material zum Theil seinen glossographischen Studien entnommen war. Mit gleicher Gründlichkeit wie den alten Mailänder Codex, zu dem er, so oft es sich ermöglichen ließ, zurückkehrte, und einen keineswegs unwichtigen Plautus des dreizehnten Jahrhunderts, den er und Goetz in der Ambrosiana aufgefunden hatten, verglich er die Plautushandschriften der Vaticana, so weit es die ihm zugemessene Zeit gestattete. Zum guten Theile auf diese Vergleichungen gegründet, erschien in rascher Folge fast die Hälfte der Comoedien in der neuen Ausgabe, darunter Asinaria Amphitruo und der in diesen Tagen ausgegebene Poenulus in gemeinsamer Bearbeitung von Löwe und Goetz.

Neben diesen anstrengenden Arbeiten fand Löwe nicht blos Zeit, Aufzeichnungen aller Art aus Handschriften zu machen, die ihn oder andere Gelehrte interessirten, und stets bereitwilligst Auskunft über derartige Fragen, die ihm in Menge zugingen, zu ertheilen, sondern er schrieb außerdem auch eine beträchtliche Anzahl kleinerer Aufsätze und Beiträge in Ritschls Acta societatis philologae Lipsiensis, in den Leipziger Studien zur classischen Philologie, im Rheinischen Museum, in den Jahrbüchern für classische Philologie und andern Zeitschriften, die einzeln aufgeführt sind in dem ihm von seinem Collegen K. Boysen gewidmeten Nachrufe in der Wochenschrift für klassische Philologie 1884 Sp. 93 fgd. Ueberall war er vermöge seiner genauen Kenntniß der Glossare und des vielen Neuen und Interessanten, das er daraus mitzutheilen und mit geistvollen Be-

merkungen zu begleiten wußte, ein erwünschter Mitarbeiter. Noch kurz vor seinem Tode erhielt er die Abdrücke eines Beitrages zu dem ersten Bande des neugegründeten Archivs für lateinische Lexikographie, in dem er als erste Spende hundert neue, d. h. in dem besten lateinischen Wörterbuch fehlende, Artikel brachte, und erst nach seinem Tode trafen die Bogen einer »Glossematica« überschriebenen Artikelreihe aus dem siebenten Bande der Revue de philologie ein. Diese kleinen Aufsätze beschränken sich aber keineswegs auf die Glossographie, sie behandeln einzelnes aus dem ganzen Gebiete der römischen Litteratur und alle sind ausgezeichnet durch die sichere Methode, durch die überzeugende Sachlichkeit der Ausführungen, und durch die bescheidene und besonnene Darstellung.

Im Jahre 1878 gewann die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien Löwe dafür, die pyrenäische Halbinsel zu bereisen und die in den spanischen und portugiesischen Bibliotheken bewahrten Handschriften der lateinischen Kirchenväter für die von der Akademie ins Leben gerufene neue kritische Ausgabe zu verzeichnen und zu beschreiben. Trotz seines seltenen Fleißes war er, vollauf in Anspruch genommen durch andere Arbeiten, genöthigt, die Ausarbeitung und Drucklegung des von ihm zusammengebrachten reichen Materials hinauszuschieben. Seine Sammlungen befinden sich in den Händen der Akademie, die gewiß Sorge tragen wird, daß seine Mittheilungen über die verhältnißmäßig wenig bekannten spanischen und portugiesischen Bibliotheken der gelehrten Welt nicht vorenthalten bleiben.

Eine andere Frucht dieser Reise waren die mit seinem Freunde und Reisegenossen P. Ewald herausgegebenen Exempla scripturae Visigoticae XL tabulis expressa, die mit der Unterstützung des Königlich Preußischen Unterrichtsministeriums 1883 zu Heidelberg erschienen sind und einen werthvollen Beitrag zur genaueren Kenntniß der westgothischen Schriftentwickelung und ihrer bedeutendsten Denkmäler geben. E. Steindorff hat in einer sachkundigen Recension des Werkes in unsern Göttinger Gelehrten Anzeigen 1884 S. 84 fgd. die instructive Auswahl der durch Photographie und Lichtdruck meisterhaft wiedergegebenen Schriftproben und die hohe Sorgfalt der palaeographischen und historischen Erläuterungen auf das anerkennendste besprochen.

Löwe's Reisen fielen in die Jahre 1875—1879. Wissenschaftlich dazu vorbereitet und ausgerüstet hatte er sich, nachdem er auf dem Gymnasium seiner Vaterstadt Grimma, wo er am 18. Februar 1852 geboren war, unter der unmittelbaren Leitung seines Vaters Carl Hermann Löwe, der daselbst zweiter Professor war, vorgebildet worden, durch seine Studien an der Universität Leipzig 1870—74.

Mit kindlicher Liebe und Verehrung schloß er sich an Fr. Ritschl an, der seine große Begabung bald erkannte und ihn für die sprachlichen und kritischen Studien, die einen wesentlichen Theil seiner eigenen Interessen bildeten, begeisterte. Wie Ritschl Löwe bei dem Plautus als Arbeitsgenossen heranzog, so war auch das Glossen-Corpus ein lange von ihm mit Vorliebe gehegter Gedanke, und es machte ihm große Freude die beiden Aufgaben, die sich so vielfach berühren und ergänzen, in den Händen seines Schülers gedeihen und fortschreiten zu sehen. Auch für die praktische Ausführbarkeit der Arbeitspläne trat er ein, indem er dafür sorgte, dass Löwe, nachdem er den Winter 1874—75 hier im Wachsmuthschen Hause verlebt, für seine Reise von der sächsischen Regierung mit Stipendien unterstützt wurde.

Im Herbste 1879 nach Deutschland zurückgekehrt, fand Löwe eine Anstellung als Adjunkt des Russischen philologischen Seminars zu Leipzig. Diese Thätigkeit sagte ihm nicht besonders zu und er ging daher gern auf den Vorschlag des Unterzeichneten, der ihn in Rom kennen gelernt hatte, ein, im Frühjahre 1880 an unserer Bibliothek als Custos einzutreten. Er sah damit einen lange gehegten Wunsch in Erfüllung gehen, da er durch sein vieljähriges Arbeiten auf den Bibliotheken ein lebhaftes Interesse an deren Organisation und Einrichtungen gefaßt hatte und den Vortheil, eine große Bibliothek mit völliger Freiheit benutzen zu können, nach Gebühr zu schätzen wußte. Er fühlte sich in dem neuen Berufe vollkommen befriedigt und widmete sich demselben mit so großem Eifer, daß er rasch in demselben heimisch wurde. Wie er Alles, was er that, mit ganzer Seele trieb, so wandte er auf große und kleine Geschäfte die gleiche Sorgfalt, für ihn gab es in dieser Hinsicht keinen Unterschied zwischen seiner wissenschaftlichen Thätigkeit und diesen in ihrem Detail nicht immer gleich anziehenden Verrichtungen. Wie ihn seine vielseitigen Interessen, seine ausgebreitete Gelehrsamkeit und sein vortreffliches Gedächtniß in den Stand setzten, vielfach Rath und Auskunft zu geben, wie er einmal aufgeworfenen Fragen mit beharrlicher Emsigkeit nachging, bis alle Mittel erschöpft waren, so ermüdete seine außerordentliche Liebenswürdigkeit und immer bereite Gefälligkeit niemals; Alle, die in die Lage kamen, sich an ihn zu wenden, werden sich dessen dankbar erinnern. Er war durchdrungen von der hohen Bedeutung der Bibliotheken für die Continuität alles geistigen Lebens und Fortschrittes, von der gewaltigen Aufgabe, die sie zu erfüllen haben als Sammelstätten alles dessen, was die auf einander folgenden Völker und Generationen forschend, denkend und dichtend versucht und entworfen, erkannt und errungen

haben, und suchte von dieser idealen Auffassung aus den einzelnen Fragen theoretisch und praktisch gerecht zu werden. Noch in den letzten Wochen seines Lebens beschäftigte ihn lebhaft ein Aufsatz, in dem er seinen Ideen über die Stellung der Bibliotheken im allgemeinen Organismus der Wissenschaft und der staatlichen Einrichtungen Ausdruck geben wollte. Die Freude an seinem Berufe und die Ueberzeugung, in diesem die ihm am meisten zusagende Lebensrichtung gefunden zu haben, war die Veranlassung, daß er im letzten Herbste eine sonst verlockende Berufung als Professor der classischen Philologie an die Universität Kiel ablehnte. Er blieb gewiß mit Recht dem erwählten Berufe treu; wie er in wenigen Jahren ein trefflicher Bibliothekar geworden war, so hätte er ohne Zweifel, wäre ihm ein längeres Leben vergönnt gewesen, reiche Gelegenheit gefunden, mit Erfolg und Befriedigung an der Hebung und Verbesserung des Bibliothekswesens mitzuarbeiten.

Das tragische Schicksal, das ihn im zwei und dreißigsten Lebensjahre dahinraffte, hat allen Hoffnungen, die auf seine Zukunft gesetzt waren, ein trauriges Ende gemacht. Was er war, wird fortleben in dem treuen Andenken seiner Angehörigen, seiner Freunde und Collegen und in den Werken, durch die er sich dauernde Verdienste um die Wissenschaft erworben hat.

Wilmanns.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

December.

(Fortsetzung.)

Proceedings of the linnean society of London. Novbr. 1880 — June 1882.
Bulletin of the museum of comparative zoology at Harvards College. Vol. XI. No 3. 4.
American Journal of mathematics. Vol. VI. No 2.
Journal of the royal microscop. society. Vol. III. P. 6.
Francis Bashforth, an attempt to test the theories of capillary action. Cambridge 1883.
Monthly notices of the royal astronom. society. Vol. XLIV. No 1.
Geological survey of Victoria. F. von Müller, observations of new vegetable fossils.
Scientific proceedings of the Ohio mechanics institute. Vol. II. No 3.
18—20ster Jahresbericht des Vereins für Erdkunde in Dresden.
Bulletin de l'academie impér. des sciences de St. Petersbourg. T. XXVIII. No 4.
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen u. historischen Classe der k. bair. Akademie der Wissensch. 1883. Hft 3.

Sitzungsberichte der kais. wiener Academie der Wissensch. Philosophisch-histor. Cl. Bd. CI. Hft 2. Bd. CII. Hft 1. 2. Bd. CIII. Hft 1. 2. Register X.
Sitzungsberichte derselben, mathematisch-naturwissensch. Classe. 1te Abthlg. Bd. LXXXVI. 1—5. Bd. LXXXVII. 1—5. 2te Abthlg. Bd. LXXXVI, 2—5 Bd. LXXXVII. 1—5. 3te Abthlg. Bd. LXXXVI. 3—5. Bd. LXXXVII. 1—3.
Denkschriften der wiener Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Cl. Bd. XXIII. Mathematisch-naturwissensch. Cl. Bd. XLV. XLVI.
Archiv für Kunde österr. Geschichtsquellen. Bd. LXIV. 2te Hälfte.
Almanach der kais. Akademie der Wissensch. 33ster Jahrg. 1883.
Annual report of the curator of the museum of comparative zoology at Harvard's college. 188²/₃.
Mielberg, meteorologische Beobachtungen des tifliser physical. Observatoriums im J. 1882.
Ders. magnetische Beobachtungen des tifliser physicalischen Laboratoriums in d. Jahren 1881—82.
Proceedings of the canadian institute Toronto. Vol. I. fasc. 5.

1884. Januar.

Bulletin de l'academie impér. des sciences de St. Petersbourg. T. XXIX. No 1.
F. von Müller, the plants indigenous around Sharksbay and its vicinity. Perth. 1883.
Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba. T. V. Entr. 4.
Nature No 740. 741. 742. 743.
Atti della r. accademia dei Lincei Ser. 3. Transunti. Vol. VII. fasc. 16. Vol. VIII. fasc. 1.

Vom Foreign literary exchange of Norway.

Jahrbuch des norwegischen meteorologischen Instituts für 1879. 1880. 1881.
Guldberg und Mohn études sur les mouvemens de l'atmosphère. 2e partie. (progr. de l'université pour le 2e sem. 1880.
Hiortdahl, kristallographisk-chemiske undersoegelser. (Universit. Progr. for 1e sem. 1882.
Broegger, die sulurischen Etagen 2 u. 3 im Christianagebiet und auf Eker. (Univ. Progr. für 2. Sem. 1880).
Reusch, Silurfossiler og pressede Konglomerader i Bergensskifrene. (Univ. Progr. für 1. Sem. 1883).
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. V. Hft 1—4. Bd. VI. Hft 1—4. Bd. VII. Hft 1—4. Bd. VIII. Hft 1. 2.
Nyt magazin for naturvidenskaberne. Bd. XXV. Hft 4. Bd. XXVI. Hft 1—4. Bd. XXVII. Hft 1-4. Bd. XXVIII. Hft 1.
Forhandlingar i videnskabs-selskabet i Christiania. Aar 1880. 1881. 1882.
Beretning of bodsfaengslets virksomhed. Aaret 1879. 1880 1. Halvaar. 180⁰/₁. 180¹/₂.
Det kongelinge Norske Frederiks Universitet aarsberetning 1879. 1880. 1881. 1882.
Det kongelinge Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1880. 1881.
Norske Rigsregistranter tildeels i uddrag. Bd. VII. Hft 2. Bd. VIII. Hft 1.
Index scholarum in universitate regia fridericiana anno 1883 ab Augusto mense habendarum.

Boekwerken, ter tafel gebracht in de Vergaderingen van de directie der kon. natuurk. vereeniging. Jan.— Juni.
Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Januar.
Rhenus. 1884. No 1.
Boncompagni, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matem. e fisiche. T. XVI. Marzo. (für die Gauss-Bibliothek.)
Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution for 1881.
Oppert, deux textes très-anciens de la Chaldée. S. A. aus den Comptes rendus de l'acad. des inscript.
Ders., un acte de vente conservé en deux exemplaires. S. A. aus der Ztschr. für Keilschriftenforschung.

Mittag-Loeffler, acta mathematica. 3:1.
Bulletin de l'academie roy. des sciences etc. de Belgique. 3e sér. T. VI. No 11.
J. von Lenhossek die Ausgrabungen zu Szeged-Öthalom in Ungarn. Budapest 1884. 4.
Monthly notices of the roy. astronomical society. Vol. XLIV. No 2.
Rhenus. Jahrgg. 1. No 2. 4–10.
Revista Euskara Año VI. No 65.
Leopoldina Hft XIX. No 23. 24. Titel.
Neues Lausitzisches Magazin. Bd. LIX. Hft 2.
Bulletin de la Société impér. des naturalistes de Moscou. T. LVIII. No 2.
G. G. Stokes, mathematical and physical papers. Vol. II. Cambridge 1883. (V. d. Syndics der Cambridge univers. press.)
Proceedings of the london mathematical society. No 209. 210.
Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures. T. II.
Annalen des physicalischen Central-Observatoriums. Jahrg. 1882. Thl. I. (russisch).
Repertorium für Meteorologie, herausgegeben von der kaiserl. (russischen) Acad. d. Wissensch. Bd. VIII.
Ohrtmann, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XIII. Hft 3.
Memoirs of the geological Survey of India. Vol. XIX. P. 2–4.
Records of the geological Survey of India. Vol. XV. P. 4. Vol. XVI. P. 1–3.
Memoirs of the geological Survey of India. Palaeontologia indica. Ser. X. Vol. II. Pt. 4. Ser. XII. Vol. IV. Pt. 1. Ser. XIII. I. IV. fasc. 1. 2. Ser. XIV. Vol. 1. Pt. 4.
Transactions of the american philosoph. society. Vol. XVI. New Series. P. I.
Proceedings of the boston society of natural history. Vol. XXI. P. 4. Vol. XXII. P. 1.
Memoirs of the boston society of natural history. Vol. III. No 6. 7.
Proceedings of the american academy of arts and sciences. New Series. Vol. X.
Astronomical and meteorological observations at the U. S. naval observatory. 1879.
Perley Poore, congressional directory. 2d edition. Washington 1883. (3 Exemplare).
Professional papers of the signal service. No VIII–XII.
Bulletin of the united states geological survey No 1.
12th annual report of the United States geological and geographical survey of the territories Wysming and Idaho for the year 1878. P. I. II. Ein Band Maps and Panoramas.
2d annual report of the united states geological survey. 1880–81.
Monographs of the united states geological society. Vol. II. mit Atlas.
Anales estadisticos de la Republica de Guatemala. 1882. T. I.
Johns Hopkins University circulars. Vol. III. No 28.
Sistema de medidas y pesas de la Republica Argentina. Buenos Aires. 1881. 1883.
Atti della societa toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. IV.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche der ungarischen geolog. Anstalt. Bd. VI. Hft 7. 8.
Zeitschrift der ungarischen Geologischen Gesellschaft. Jahrgg. XIII. Hft 7–10. (ungarisch).
Jahresbericht der königl. ungarischen geologischen Anstalt. 1882.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. Henle, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

12. März. **№ 4.** 1884.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1884.

Die Vorlesungen beginnen den 15. April und enden den 15. August.

Theologie.

Erklärung der Psalmen: Prof. *Bertheau* fünfstündig um 10 Uhr; Prof. *de Lagarde* fünfstündig um 11 Uhr.

Erklärung des Buches des Propheten Jesaia: Prof. *Duhm* fünfstündig um 10 Uhr.

Alttestamentliche Theologie: *Derselbe* vierstündig um 4 Uhr.

Neutestamentliche Einleitung: Prof. *Wiesinger* viermal (Mont. Dienst. Donnerst. Freit.) um 12 Uhr.

Biblische Theologie des Neuen Testaments: Prof. *Ritschl* fünfmal um 12 Uhr.

Synoptische Erklärung der drei ersten Evangelien: Prof. *Lünemann* sechsmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums und der Briefe Johannis: Prof. *Wiesinger* fünfstündig um 9 Uhr.

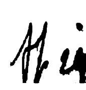
Erklärung der Pastoralbriefe: Prof. *Knoke* vierstündig um 9 Uhr.

Kirchengeschichte Theil I: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte des Mittelalters seit Karl dem Grossen: Prof. *Reuter* sechsstündig um 8 Uhr.

Geschichte der Kirche und Theologie seit der Mitte des XVIII. Jahrh. vornemlich im XIX. Jahrhundert: *Derselbe* fünfmal um 11 Uhr.

Patrologie oder altkirchliche Literaturgeschichte: Prof. *Wagenmann* dreistündig um 7 Uhr.



Dogmatik II. Theil: Prof. *Schultz* fünf bis sechsmal um 11 Uhr.

Praktische Theologie Theil I: Prof. *Knoke* fünfstündig um 7 Uhr.
Kirchenrecht s. unter Rechtswissenschaft.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Bertheau* Montags um 6; die neutestamentlichen (über 1. Petr. und Jacob.) Prof. *Wiesinger* Dienstags um 6; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Wagenmann* Freitags um 6; die dogmatischen Prof. *Schultz* Mittwochs um 6 Uhr.

Die homiletischen Uebungen der praktischen Abtheilung des theologischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Wiesinger* und Prof. *Schultz* Sonnabends 9—11 Uhr öffentlich; die katechetischen Uebungen Prof. *Knoke* Mittwochs und Sonnabends 2—3 Uhr öffentlich; die liturgischen Uebungen *Derselbe* Sonnabends 9—10 und 11—12 öffentlich.

Kirchenhistorische Uebungen leitet Prof. *Reuter* Montags um 5 Uhr.

Rechtswissenschaft.

Römische Rechtsgeschichte: Prof. *v. Ihering* fünfmal von 11—12 Uhr.

Institutionen des Römischen Rechts: Prof. *Hartmann* fünfmal von 9—10 Uhr.

Pandekten: Prof. *Leonhard* zehnstündig von 8—10 Uhr.

Römisches Erbrecht: Prof. *Hartmann* viermal von 10—11 Uhr.

Römisches Familien- und Pfandrecht: Prof. *Leonhard* Sonnabend von 8—10 Uhr öffentlich.

Pandekten-Prakticum: Prof. *von Ihering* Montag, Mittwoch und Freitag von 12—1 Uhr.

Pandekten-Exegeticum: Prof. *Leonhard* Dienstag und Donnerstag von 12—1 Uhr.

Deutsche Rechtsgeschichte: Prof. *Dove* fünfmal von 8—9 Uhr.

Deutsches Privatrecht u. Lehnrecht: Prof. *Wolff* täglich v. 9—10 Uhr.

Deutsches Privatrecht: Prof. *Sickel* täglich von 9—10 Uhr.

Handelsrecht mit Wechselrecht und Seerecht: Prof. *Frensdorff* fünfmal von 8—9 Uhr.

Seerecht: Prof. *Sickel* ein bis zwei Stunden Donnerstag, 4 Uhr öffentlich.

Landwirthschaftsrecht: Prof. *Ziebarth* Montag, Mittwoch, Freitag von 7—8 Uhr.

Grundbuchrecht: Prof. *Ziebarth* Sonnabend von 7—9 Uhr.

Strafrecht: Prof. *John* fünfmal von 10—11 Uhr.

Deutsches Staatsrecht (Reichs- und Landesstaatsrecht): Prof. *Frensdorff* fünfmal von 7—8 Uhr.

Evangelisches und katholisches Kirchenrecht: Prof. *Mejer* fünfmal von 10—11 Uhr.

Civilprocess, einschliesslich des Konkurs- und der summarischen Processe: Prof. *John* fünfmal von 9—10 Uhr.

Strafprocess: Prof. *Ziebarth* fünfmal von 11—12 Uhr.

Civilprocesspracticum: Prof. *v. Bar* Donnerstag von 4—6 Uhr.

Strafrechtliche Uebungen: Prof. *v. Bar* Dienstag von 3—5 Uhr.

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter Naturwissenschaften.

Knochen- und Bänderlehre: Dr. *Schiefferdecker* in wöchentlich drei Stunden.

Die Mechanik der Gelenke: Prof. *Krause* Donnerstag von 2—3 Uhr öffentlich.

Systematische Anatomie II. Theil (Gefäss- und Nervenlehre): Prof. *Henle* täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie: Prof. *Henle* Montag, Mittwoch, Freitag von 11—12 Uhr.

Specielle Gewebelehre trägt Prof. *Krause* Dienstag und Donnerstag von 11—12 Uhr vor.

Mikroskopische Curse hält Dr. *Schiefferdecker* für Anfänger vier Stunden und ebenso für Geübtere vier Stunden wöchentlich.

Mikroskopische Curse in normaler Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich um 2 Uhr oder zu anderen passenden Stunden.

Anthropologie trägt Dr. *Schiefferdecker* zwei Stunden wöchentlich vor.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* sechsmal wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie I. Theil (Physiologie der Ernährung): Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Physiologie der Zeugung nebst allgemeiner und specieller Entwicklungsgeschichte: Prof. *Meissner* Freitag von 5—7 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Medicinisch-chemisches Prakticum hält Prof. *Flügge* sechsstündig in zwei Abtheilungen für Anfänger und für Geübtere täglich in zu verabredenden Stunden.

Arbeiten im Institut für medicinische Chemie und Hygiene leitet Prof. *Flügge* täglich in passenden Stunden.

Specielle pathologische Anatomie lehrt Prof. *Orth* täglich ausser Sonnabend von 12—1 Uhr.

Pathologische Anatomie der Knochen und Muskeln lehrt Prof. *Orth* Mittwoch um 2 Uhr öffentlich.

Seetions- und diagnostischen Cursus hält Prof. *Orth* in passenden Stunden.

Mikroskopische Uebungen in der pathologischen Histologie hält Prof. *Orth* Dienstag und Freitag von 2—4 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit praktischen Uebungen lehrt Dr. *Damsch* Montag, Mittwoch und Donnerstag von 4—5 Uhr; Dasselbe trägt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bestimmenden Stunden vor.

Ueber physikalische Heilmethoden, mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotherapie, mit praktischen Uebungen, trägt Dr. *Damsch* drei Mal wöchentlich in passenden Stunden vor.

Uebungen im Gebrauch des Kehlkopfspiegels hält Dr. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Diagnostik des Harns lehrt Prof. *Ebstein* in Verbindung mit Dr. *Deichmüller* Mittwoch von 3—4 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Montag, Dienstag, Donnerstag von 5—6 Uhr.

Die gesammte Arzneimittellehre trägt Prof. *Husemann* fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr vor.

Specielle Toxikologie I. Theil mit Experimenten verbunden trägt Prof. *Marmé* für ältere Mediciner Montag und Dienstag von 3—4 Uhr vor.

Ausgewählte Gifte demonstrirt Prof. *Marmé* Donnerstag von 6—7 Uhr öffentlich.

Ueber essbare und schädliche Pilze trägt Prof. *Husemann* Montag von 5—6 Uhr öffentlich vor.

Pharmacie lehrt Prof. *von Uslar* vier Mal wöchentlich um 3 Uhr.

Mikroskopisch-pharmakognostische Uebungen hält Prof. *Marmé* für Vorgeschrittenere Freitag von 4—7 Uhr.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich in passenden Stunden.

Specielle Pathologie und Therapie I. Hälfte: Prof. *Ebstein* täglich, ausser Montag, von 7—8 Uhr.

Ueber Kinderkrankheiten trägt Dr. *Damsch* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr vor.

Die medicinische Klinik und Poliklinik hält Prof. *Ebstein* täglich, und zwar fünfmal von 10½—12 Uhr, Sonnabend von 9¼—10¾ Uhr.

Poliklinische Referatstunde hält Dr. *Damsch* in gewohnter Weise.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Rosenbach* fünf Mal wöchentlich von 8—9 Uhr; Dasselbe: Prof. *Lohmeyer* fünf Mal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr.

Die chirurgische Klinik hält Prof. *König* fünf Mal wöchentlich von 9½ bis 10¾ Uhr.

Chirurgische Poliklinik hält Prof. *König* in Verbindung mit Prof. *Rosenbach* Sonnabend von 10½—12 Uhr öffentlich.

Uebungen in chirurgischen Operationen an Leichen leitet Prof. *König* von 5—7 Uhr Nachmittags.

Ueber die Anomalien der Refraction und Accommodation verbunden mit praktischen Uebungen trägt Prof. *Deutschmann* zwei Mal wöchentlich Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr vor.

Augenspiegelcursus hält Prof. *Deutschmann* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Augenoperations-Cursus hält Prof. *Leber* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr.

Ueber die praktisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Einschluss der Anatomie des Ohrs und verbunden mit Uebungen im Ohrenspiegeln trägt Dr. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr (oder zu besser passender Zeit) vor.

Ueber die häufigsten Ursachen der Schwerhörigkeit trägt Dr. *Bürkner* ein Mal wöchentlich öffentlich vor.

Otiatrische Poliklinik für Geübtere hält Dr. *Bürkner* an zwei zu bestimmenden Tagen von 12—1 Uhr.

Ueber Frauenkrankheiten wird Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag um 3 Uhr vortragen.

Ueber die Krankheiten der Wöchnerinnen wird Dr. *Droysen* ein Mal wöchentlich öffentlich vortragen.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Dr. *Droysen* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 8 Uhr.

Psychiatrische Klinik in Verbindung mit den Vorlesungen über Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 3—5 Uhr.

Hygiene verbunden mit Experimenten und Excursionen trägt Prof. *Flügge* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 4—5 Uhr vor.

Forensische Psychiatrie in Verbindung mit casuistischen Demonstrationen an Geisteskranken lehrt Prof. *Meyer* in wöchentlich zwei zu verabredenden Stunden.

Ueber die äusserlichen Krankheiten der Hausthiere trägt Prof. *Esser* wöchentlich fünf Mal von 8—9 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospital wird *Derselbe* in zu verabredenden Stunden halten.

Philosophie.

Geschichte der Philosophie: Prof. *Rehnisch*, 6 Stunden, 9 Uhr.

Geschichte der alten Philosophie: Prof. *Baumann*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 5 Uhr.

Aristoteles Psychologie: Prof. *Bruns*, eine Stunde, öffentlich.

Ueber Hume's Philosophie: Prof. *G. E. Müller*, Mittwoch 10 Uhr, öffentlich.

Ueber Kants kritische Philosophie: Prof. *Peipers*, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich.

Logik nebst Einleitung in die Philosophie: Prof. *Peipers*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr.

Naturphilosophie: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr.

Moralphilosophie mit der Lehre von der Willens- und Charakterbildung: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 4 Uhr.

Die Uebungen des K. paedagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag, 11 Uhr, öffentlich.

Mathematik und Astronomie.

Differential- und Integralrechnung: Prof. *Stern*, 5 Stunden, 7 Uhr.

Synthetische Geometrie: Dr. *von Mangoldt*, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, 12 Uhr.

Theorie der bestimmten Integrale: Prof. *Enneper*, Montag bis Freitag, 10 Uhr.

Theorie der algebraischen Gleichungen: Dr. *Hurwitz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr.

Die Lehre von den Determinanten: Prof. *Enneper*, Dienstag und Donnerstag, öffentlich.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate: Dr. *v. Mangoldt*, Montag, Dienstag und Mittwoch, 12 Uhr.

Analytische Mechanik: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 bis 10 Uhr.

Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag, 9 Uhr.

Variationsrechnung: Prof. *Schwarz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 11 Uhr.

Theorie des Lichtes: Prof. *Voigt*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr.

Elektrodynamik: Dr. *H. Meyer*, Dienst. und Donnerst. 12 Uhr.

Allgemeine Astronomie: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr.

Astronomische Beobachtungen in der Sternwarte: Prof. *Schering*.

Magnetische Beobachtungen in Gauss' Observatorium leitet Prof. *Schering*.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* wie bisher privatissime, unentgeltlich, einmal zweiwöchentlich leiten.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet Prof. *Schering* mathematisch-astronomische Uebungen, Donnerstag 5 Uhr;

leitet Prof. *Schwarz* mathematische Uebungen, Mittwoch 11 Uhr; trägt Prof. *Stern* vor über die Anziehung eines Ellipsoids, Mittw. 8 Uhr. Vgl. *Naturwissenschaften* S. 100.

Naturwissenschaften.

Allgemeine Zoologie: Prof. *Ehlers*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, 8 Uhr.

Ausgewählte Kapitel aus der Biologie der Thiere: Dr. *Hamann*, Donnerstag, 6 Uhr.

Specielle Zoologie I. Theil: Prof. *Ehlers*, Freit. u. Sonnab., 8 Uhr.

Zootomischer Kurs: Prof. *Ehlers*, Dienst. u. Mittw. 9—11 Uhr.

Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane: Dr. *Hamann*, Dienstag und Freitag, 5 Uhr.

Osteologie und Palaeontologie der Vertebraten: Dr. *Brock*, Montag und Donnerstag, 4 Uhr.

Die Protozoen: Dr. *Hamann*, Montag, 5 Uhr.

Zoologische Uebungen: Prof. *Ehlers*, wie bisher, täglich (mit Ausnahme des Sonnabends) von 9—1 Uhr.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Pflanzen: Prof. *Graf zu Solms*, Dienstag 3 bis 5 Uhr.

Demonstrationen im botanischen Garten: *Derselbe*, einmal wöchentlich, öffentlich.

Ueber technisch und medicinisch wichtige Gewächse: *Derselbe*, einmal öffentlich.

Anleitung zu täglichen Arbeiten im Laboratorium des botanischen Gartens, wesentlich für Vorgeschrittenere: *Derselbe*, privatissime.

Grundzüge der gesammten Botanik: Prof. *Reinke*, Dienstag bis Sonnabend, 7 Uhr Morgens. — Mikroskopisch-botanischer Cursus: *Derselbe*, Sonnabend, 9—1 Uhr (für Pharmaceuten zweistündig). — Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: *Derselbe*. — Botanische Excursionen: *Derselbe*, öffentlich.

Ueber Archegoniaten und Gymnospermen (Moose, Farne und Nadelhölzer): Prof. *Falkenberg*, Dienstag und Freitag 6 Uhr.

Ueber die Meeres-Vegetation, *Derselbe*, Donnerst. 6 Uhr öffentl.

Systematik der Phanerogamen mit besonderer Berücksichtigung der einheimischen Familien: Dr. *Berthold*, Montag u. Mittwoch, 6 Uhr.

Mineralogie: Prof. *Klein*, 5 Stunden, 11 Uhr.

Petrographie: Prof. *Klein*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 9 Uhr.

Palaeontologie: Prof. *von Koenen*, 5 Stunden, Mont. bis Freit., 7 Uhr.

Ueber die geologische Beschaffenheit Norddeutschlands: Prof. *von Koenen*, 1 Stunde, öffentlich, Sonnabends, 12 Uhr.

Mineralogische Uebungen: Prof. *Klein*, Sonnabend 10—12 Uhr, öffentlich.

Krystallographische Uebungen: Prof. *Klein*, privatissime, aber unentgeltlich, in zu bestimmenden Stunden.

Uebungen im Bestimmen : Prof. *von Koenen*, 2 Stunden, öffentlich.

Palaeontologische Uebungen: Prof. *von Koenen*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, erster Theil (Mechanik, Akustik, Optik): Prof. *Riecke*, Montag, 5—6 Uhr, Dienstag, Mittwoch 5—6½ Uhr.

Einleitung in die praktische Physik für Pharmaceuten: Prof. *Riecke*, Sonnabend, 11—1 Uhr.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Institute leiten die Proff. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Meyer* und Kand. *Krüger*, Dienstag, Donnerstag, Freitag 2—4 Uhr Sonnabend 9—1 Uhr.

Theorie des Lichts und Elektrodynamik: s. *Mathematik* S. 99.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar behandelt Prof. *Riecke* ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik, Montag 2 Uhr, behandelt ausgewählte Kapitel der mathematischen Physik Prof. *Voigt*. — Vgl. *Mathematik* S. 99.

Allgemeine Chemie (s. g. unorganische Chemie): Prof. *Hübner*, 6 Stunden, 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Prof. *Hübner*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Organische Chemie, für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 St., 9 Uhr.

Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie: Dr. *Leuckart*, Dienstag und Donnerstag, 9 Uhr.

Analytische Chemie: Dr. *Buchka*, Mittw. u. Sonnab. 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (anorgan. Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 4 Uhr.

Chemie der Theerfarbstoffe: Dr. *Leuckart*, Mittwoch 9 Uhr.

Chemie der seltneren Metalle: Dr. *Jannasch*, zweimal wöchentl.

Ueber die Verunreinigungen und Verfälschungen der Nahrungs- und Genussmittel und deren Erkennung: Prof. *Polstorff*, Dienstag und Freitag, 8 Uhr.

Pflanzenernährungslehre (Agriculturchemie): Prof. *Tollens*, Montag, Dienstag, Mittwoch, 10 Uhr.

Die Vorlesungen über Pharmacie und Pharmacognosie s. unter *Medicin* S. 95.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Hübner*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *Polstorff*, Dr. *Jannasch*, Dr. *Buchka* und Dr. *Leuckart*, täglich (mit Ausschluss des Sonnabends) von 8 bis 12 und von 2½ bis 5 Uhr.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium täglich (ausser Sonnabend), 8—12 und 2—4 Uhr.

Praktische Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium leitet Prof. *Tollens*, in Gemeinschaft mit dem Assistenten Dr. *Hölzer*, Montag—Freitag, 8—12 und 2—4 Uhr.

Medicinisch-chemisches Practicum s. S. 96.

Historische Wissenschaften.

Praktische Diplomatik: Prof. *Steindorff*, Mittwoch, 9—11 Uhr.

Cursus in der griechischen Palaeographie: Prof. *Steindorff*, 2 Stunden, Sonnabend, 9—11 Uhr.

Römische Geschichte bis zur Zeit der Bürgerkriege: Prof. *Volquardsen*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr.

Quellenkunde der römischen Geschichte: Dr. *Gilbert*, Dienstag und Freitag, 4 Uhr.

Deutsche Geschichte bis zur Reformation: Prof. *von Kluckhohn*, 3 Stunden, 5 Uhr.

Neueste Geschichte seit 1815: Prof. *von Kluckhohn*, 4 St., 4 Uhr.

Französische Geschichte von Hugo Capet bis zur grossen Revolution: Prof. *Weiland*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Geschichte Italiens seit dem Anfang des Mittelalters: Dr. *Th. Wüstenfeld*, Mont., Dienst., Donnerst. u. Freit, 11 Uhr, unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Weiland*, Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienst. 6 Uhr, öffentl.

Historische Uebungen leitet Prof. *von Kluckhohn*, Donnerstag, 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen: Prof. *Steindorff*, Mont., 6 Uhr, öffentlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 93.

Erd- und Völkerkunde.

Geographie von Europa: Prof. *Wagner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 11 Uhr.

Politische Geographie Europas im Mittelalter und in der Neuzeit: Prof. *Weiland*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 10 Uhr.

Geographische Uebungen für Vorgeschrittenere: Prof. *Wagner*, privatissime, aber unentgeltlich, Sonnabend, 9—12 Uhr.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Einleitung in die Nationalökonomie und Geschichte derselben: Dr. *Eggert*, 4 Stunden, Dienstag—Freitag 12—1 Uhr.

Volkswirthschaftslehre (Nationalökonomie): Prof. *Hanssen*, 5 Stunden, 4 Uhr.

Volkswirthschaftspolitik (praktische Nationalökonomie): Dr. *Eggert*, Dienstag und Freitag, 5—7 Uhr.

Finanzwissenschaft: Dr. *Sartorius von Waltershausen*, Montag und Donnerstag, 5—7 Uhr.

Volkswirthschaftliche Uebungen: Prof. *Soetbeer*, privatissime, aber unentgeltlich, in später zu bestimmenden Stunden.

Cameralistische Uebungen: Dr. *Eggert*, unentgeltlich, in später zu bestimmenden Stunden.

Landwirthschaftsrecht: s. *Rechtswissenschaft* S. 94.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 St.

Ackerbaulehre, specieller Theil: *Derselbe*, 4 Stunden, 12 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Lehre von den Nutzungen, der Züchtung, Ernährung und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes und Schweines): Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 5 Uhr.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerstag und Freitag 11 Uhr, öffentlich.

Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Die Lehre von der Futterverwerthung (II. Theil der landw. Fütterungslehre): Prof. *Henneberg*, Montag und Dienstag, 11 Uhr.

Uebungen in Futterberechnungen: Prof. *Henneberg*, Mittwoch, 11 Uhr, öffentlich.

Landwirthschaftliches Practicum, 1. Uebungen im landwirthschaftlichen Laboratorium, Freitag 2—6 Uhr, Sonnabend 9—1 Uhr, unter Leitung des Prof. *Drechsler* und Dr. *Edler*; 2. Uebungen in landwirthschaftlichen Berechnungen, Mont. u. Donn. 6 Uhr: Prof. *Drechsler*.

Landwirthschaftliche Excursionen und Demonstrationen im Versuchsfelde: Prof. *Drechsler*, Mittwoch Nachmittag.

Krankheiten der Hausthiere: s. *Medicin* S. 98.

Agriculturchemie, Agriculturchemisches Practicum: s. *Naturwissenschaften* S. 101.

Literatur- und Kunstgeschichte.

Römische Literaturgeschichte (Prosa): Prof. *Bruns*, 4 Stunden.

Geschichte der römischen Elegie: vgl. *Griech. u. lat. Sprache* S. 105.

Ueber Goethes Leben und Schriften: Prof. *Goedeke*, Montag, 5 Uhr, öffentlich.

Geschichte der französischen Literatur im 16. und 17. Jahrhundert: Prof. *Vollmöller*, Mont. Dienst. Donn. Freit. 12 Uhr.

Ueber Shakspere's Leben und Werke: vgl. *Neuere Sprachen* S. 106.

Ueber Raphael, als Einführung in die neue Kunstgeschichte: Prof. *Schmarsow*, 2 Stunden, öffentlich, Mittwoch, 11—1 Uhr.

Die Hauptmeister der italienischen Malerei des XV. Jahrhunderts, mit Uebungen und Demonstrationen: Prof. *Schmarsow*, 2 Stunden.

Deutsche Kunst im Mittelalter (mit besonderer Rücksicht auf den Kirchenbau): Prof. *Schmarsow*, 3 Stunden.

Kunsthistorische Uebungen nach Vasari und Crowe-Cavalcaselli: Prof. *Schmarsow*, 2 Stunden, privatissime, aber unentgeltlich.

Geschichte der Philosophie: vgl. *Philosophie* S. 98.

Alterthumskunde.

Die Porträts berühmter Griechen und Römer in der akademischen Sammlung von Gypsabgüssen wird Prof. *Wieseler* erörtern, Mittwoch, 4 Uhr, öffentlich.

Die bildliche Darstellung der griechischen Götter und deren Mythologie wird nach Kunstwerken erläutern Prof. *Wieseler*, 3 St., 4 Uhr.

Akropolis von Athen: vgl. *Griech. u. lat. Sprache* S. 105.

Die Abhandlungen der Mitglieder des K. archäol. Seminars wird Prof. *Wieseler* privatissime beurtheilen, wie bisher.

Das altdeutsche Haus: Prof. *Heyne*, 1 Stunde, öffentlich.

Vergleichende Sprachlehre.

Entwicklungsgeschichte der indogermanischen Sprachen und Völker: Prof. *Fick*, 2 Stunden, 8 Uhr.

Vergleichende Grammatik der indogermanischen Sprachen: Dr. *Bechtel*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. u. *Theologie* S. 94.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Unterricht in der syrischen Sprache ertheilt Prof. *Bertheau*, Dienstag und Freitag, 2 Uhr.

Persisch lehrt Prof. *de Lagarde*, privatissime, aber unentgeltlich.

Erklärung der äthiopischen Chrestomathie von Dillmann: Prof. *Haupt*, Montag und Donnerstag um 5 Uhr, unentgeltlich.

Anfangsgründe der assyrischen Sprache und Erklärung der Annalen Sardanapals: Prof. *Haupt*, Mont. und Donnerst., 6 Uhr.

Assyriologische Uebungen: Prof. *Haupt*, Freitag, 5 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Grammatik der Sanskritsprache für Anfänger: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch, Sonnabend, 12 Uhr.

Erklärung von Kâlidâsa's Kumârasambhava mit Mallinâtha's Kommentar: Prof. *Kielhorn*, 2 Stunden.

Erklärung der Laghukaumudî oder des Tarkasamgraha: Prof. *Kielhorn*, 2 Stunden, öffentlich.

Griechische und lateinische Sprache.

Ueber die griechischen Dialekte: Prof. *von Wilamowitz-Möllendorff*, vier Stunden, 10 Uhr.

Homers Odyssee: Prof. *Fick*, vier Stunden, 8 Uhr.

Aristophanes Frösche: Prof. *von Leutsch*, Mittwoch und Sonnabend, 12 Uhr, öffentlich.

Aristophanes Acharner: Prof. *von Wilamowitz-Möllendorff*, vier Stunden, 4 Uhr.

Platons Symposion: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 9 Uhr.

Aristoteles Psychologie: vgl. *Philosophie* S. 98.

Pausanias Beschreibung der Akropolis von Athen lässt Prof. *Wieseler* im K. archäol. Seminar erklären, Sonnabends, 12 Uhr.

Griechische Palaeographie: vgl. *Historische Wissenschaften* S. 102.

Grammatik der lateinischen Sprache: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 7 Uhr Morgens.

Geschichte der römischen Elegie und Erklärung ausgewählter Elegien des Tibull, Properz, Ovid: Prof. *Dilthey*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *Dilthey*, Mittwoch 11 Uhr, lässt Aristoteles Politik 1. Buch erklären Prof. *Sauppe*, Montag und Donnerstag, 11 Uhr, lässt Apuleius Apologie erklären Prof. *Dilthey*, Dienstag und Freitag, 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminar lässt Euripides Medea erklären und leitet die Disputationen über die eingereichten schriftlichen Arbeiten Prof. *v. Wilamowitz-Möllendorff*, Mittw. u. Sonnab., 10 Uhr, alles öffentl.

Deutsche Sprache.

Einführung in die deutsche Philologie: Prof. *Heyne*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr früh.

Wolframs von Eschenbach Parzivâl erklärt Prof. *Wilh. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 3 Uhr.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *Wilh. Müller*, Dienstag, 6 Uhr.

Altdeutsche Uebungen für solche, die sich zu Specialisten ausbilden wollen: Prof. *Heyne*, 1 Stunde.

Neuere Sprachen.

Geschichte der französischen Literatur: vgl. *Literaturgesch.* S. 104.

Provenzalische Grammatik: Dr. *Andresen*, Dienst. u. Freit., 8 Uhr.

Nach einer Einleitung über Shakspere's Leben und Werke, Erklärung des Hamlet: Prof. *Napier*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 7 Uhr Morgens.

Im Seminar für neuere Sprachen leiten Uebungen Prof. *Vollmöller*, Mittwoch 6 Uhr und Prof. *Napier*, Mont. u. Donnerst. 8 Uhr; Dr. *Andresen* erklärt (Montag 6 Uhr) das altfranzösische Epos Jourdains de Blaivies.

L. Kœune: Zolling, Pariser Welt (suite), Version et explication, Montag 10 Uhr; Histoire de la littérature française au XIXe S. (Suite), Dienstag—Freitag 10 Uhr; Cours de littérature, Dienstag 5 Uhr; *a*) Méthode de style et de composition, *b*) Exercices de style et de composition, Mittwoch 5 Uhr; Lecture, récitation, conversation, Donnerstag 10 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Morgens von 7—11 und Nachm. (ausser Sonnabend) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 12—1 und von 2—3 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* ist Dienstag von 2—4 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist dem Publikum täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind während des Sommerhalbjahrs Sonnabends v. 1—2 Uhr dem Publikum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publikum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerstag von 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, der *Bibliothek des k. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Bartels* (Kleperweg 2), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

März 26. № 5. 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 1. März.

v. Koenen, Ueber prähistorische Funde dicht bei Göttingen.
L. Königsberger, Corresp., Ueber Integrale transcendenter Functionen.
Kiessling, Ueber Diffractionserscheinungen in feuchter Luft. (Vorgelegt von Riecke).

Ueber prähistorische Funde dicht bei Göttingen.

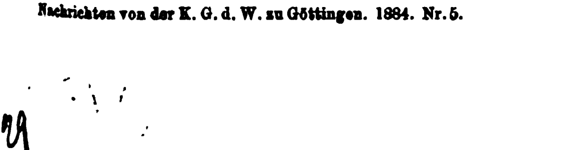
Von

A. von Koenen.

Im Neuen vaterländischen Archiv des Königreiches Hannover (III. Band S. 295—303) machte 1823 Hausmann Mittheilung über »Auffindung altdeutscher Begräbnisse aus heidnischer Zeit in der Gegend von Göttingen«.

Es waren früher schon bei Weende und am westlichen Fuße des Hainberges Aschenkrüge ausgegraben worden. Hausmann beschrieb nun einen am Ausgange der »langen Nacht« gemachten Fund von Kohlen, Knochenresten, Asche, Scherben von Aschenkrügen, (worunter einige »mit eingeschnittenen Verzierungen an der Außenseite«), einem »Stück eines sauber in Bronze gearbeiteten Armringes« und einem »aus kleinen unbehauenen Kalksteinen zusammengefügten Heerde«, welcher 2 Fuß breit und noch $4^1/_2$ Fuß lang, vorn defekt, hinten »kreissegmentförmig gebogen« und mit einigen größeren Steinen eingefaßt war. Dieser, vermuthete Hausmann, war zum Verbrennen von Leichen bestimmt, und darüber lagen 2 Fuß Thon und 8 Fuß Lehm.

Die Mächtigkeit dieses letzteren ist leichter erklärlich durch die



Lage am Ausgange einer Schlucht und am Fuße eines Abhanges, von dem er herabgerutscht sein könnte.

Ueber eine größere Anzahl von Funden von anderen Stellen hat J. H. Müller (die Reihengräber zu Rosdorf bei Göttingen, Hannover 1878) berichtet.

Vor etwa 1¼ Jahren wurde ich nun von Herrn Bürgermeister Merkel benachrichtigt, daß bei dem tiefen Umgraben des Terrains für die städtische Baumschule, unmittelbar westlich resp. südwestlich vom Reinsbrunnen, also etwas nördlich von der »langen Nacht«, der Hausmann'schen Fundstelle, alte Urnen gefunden würden, indem er mir anheim stellte, dieselben für das hiesige Museum in Besitz zu nehmen und die Ausgrabungen selbst zu überwachen.

Im Untergrunde der Baumschulen liegt fast überall ein Kalktuff-(Duckstein-)Lager mit Helix-Arten und dergl. mehr, welches von Lehm in einer Mächtigkeit von ca. 0,5 bis 1 Meter oder mehr bedeckt ist. In diesem Lehm, resp. über dem Kalktuff, sind alle zu erwähnenden Funde gemacht worden und zwar in einer Tiefe von höchstens ca. 0,75 Meter, da die Arbeiten eine größere Tiefe nicht erreichten. Zunächst waren schon gefunden ein Paar ziemlich unversehrte und eine Anzahl zerbrochene Urnen; bei größerer Vorsicht wurden dann noch mehr Urnen von den Arbeitern in gutem Zustande ausgegraben, so daß bis jetzt über 20 vollständige und noch weit mehr defekte resp. zertrümmerte Urnen dort gefunden sind. Dieselben sind durchweg mit der Hand roh geformt, schwarz oder, seltener, roth, fast sämmtlich ohne irgend welche Verzierung; nur drei derselben, von sehr verschiedener Gestalt und Größe tragen eine rohe Kerbung des oberen Randes. In Gestalt und Größe sind aber alle die Urnen so verschieden, daß nicht zwei derselben sich auch nur einigermaßen gleichen. Die kleineren, Thränenkrug-artigen sind meist hoch-napfförmig, zum Theil haben sie aber auch einen verengten Hals, also die Gestalt eines Kruges. Die kleinste von dieser Form hat 7 cm Durchmesser und 6,5 cm Höhe, die kleinste von ersterer Form hat 5 cm. Durchmesser und 3 cm Höhe. Diese kleinen Gefäße sind aber durch alle Uebergänge in Gestalt und Größe mit den größten verbunden, welche über 30 cm. Durchmesser und 25 cm. Höhe erreichen. In einer der größeren Urnen fand ich eine kleine. Die mittleren und größeren Urnen enthielten, soweit ich den Inhalt untersuchen konnte, sämmtlich zertrümmerte, anscheinend verbrannte, menschliche Knochen, in Lehm gehüllt. Selten lag als Deckel eine Steinplatte auf einer Urne; diese war dann nicht von oben her mit Lehm erfüllt, dafür aber zerdrückt. Die Urnen schienen ganz regellos zu stehen, zum Theil nur 1 bis 2 Meter von einander entfernt. Größtentheils sind

sie sehr schwach gebrannt, so daß die Kalkstückchen, welche z. Th. in Menge, bis zu 7 mm groß, in dem Material stecken, nicht oder nur wenig verändert worden waren.

Außer den Urnen fanden sich in dem Lehm resp. der Ackererde eine Menge Gegenstände, welche zum Theil unzweifelhaft mit Schutt und Dünger aus Göttingen dorthin gelangt waren. Von den Uebrigen sind einige wohl als gleichaltrig mit den Urnen zu betrachten, namentlich Stücke von Hirsch-Schädeln und Geweihen von beträchtlicher Größe (Vierzehn-Ender), welche an der Zunge kleben und z. Th. erkennen lassen, daß sie künstlich bearbeitet sind, namentlich durch Ansägen und Abbrechen der Augensprosse; das untere, 21 cm lange und ca. 6 cm Ende einer Hirsch-Stange ist mit einem 2,3 cm weiten Loch quer durchbohrt und hat wohl als Hacke gedient. Auf dem umgegrabenen Boden fand ich auch die Hälfte eines neuerdings (wohl beim Umgraben) durchgebrochenen Feuerstein-Spahn-Messers.

Knochen-Reste von Rind und Schwein gehörten schon ihrer Erhaltung nach einer weit späteren Epoche an. Während aber im vorigen Jahre nur einige zerfallene Menschen-Schädel ausgegraben wurden waren, deren einzelne Knochen beim Trocknen derartig windschief wurden, daß die ursprüngliche Kopf-Form auch nicht annähernd genau ermittelt werden konnte, hatten in diesem Winter (nur im Winter wird das für die Baumschulen bestimmte Terrain umgegraben), die Arbeiter so viel Vorsicht gelernt, daß sie 2 fast ganz vollständige Schädel mit dem sie umgebenden Lehm herausgehoben hatten. Von denselben glich der eine (I) in der Form und Erhaltung den sonst gefundenen Schädeln und Skeletten, welche nach Angabe der Arbeiter mit dem Kopf nach Westen gerichtet begraben waren.

Der andere Schädel (II) war dagegen weniger glatt, augenscheinlich viel älter und lag ca. 1,5 Meter von einer gut erhaltenen Urne entfernt. An demselben befanden sich nur die beiden obersten Halswirbel, der Rest des Skelettes fehlte; um den Hals resp. am Unterkiefer und den Warzenfortsätzen lag ein größtentheils in Kupfer-Carbonat etc. umgewandeltes Bronce-Halsband und an diesem auch der sechste Halbwirbel eines 8—10jährigen Kindes (sonstige Reste von diesem waren nicht erhalten oder aufgehoben). Die Knochen, welche mit dem Halsband in Berührung gewesen waren, sind grünlich gefärbt durch Kupferverbindungen, welche jedenfalls von dem Halsbande herrühren.

Das Halsband selbst ist oval, mit 12,7 cm größtem und 11 cm. kleinstem Durchmesser, und klaffte an einer breiten Seite um ca. 4 cm. Dasselbe ist ganz ohne Verzierungen, von ovalem Querschnitt und hat in der Mitte und an den Enden bis zu 5,5 mm Dicke, an den schmalen Seiten nur etwa 4 mm.

Um ein Windschiefwerden oder Aufplatzen an den Nähten möglichst zu verhüten, wurden die mit nassem Lehm erfüllten und bedeckten Schädel nicht gleich gereinigt, sondern so, wie sie waren, möglichst langsam in einem nicht geheizten Raume und mit Tüchern bedeckt getrocknet, wozu etwa 3 Wochen erforderlich waren.

Herrn Professor Krause, der über dergleichen das kompetenteste Urtheil abgeben kann, ersuchte ich, die beiden Schädel zu untersuchen und zu messen, und hat mir derselbe Folgendes mitgetheilt:

Der Schädel Nr. I. ist kräftig gebaut, unzweifelhaft männlich, von altgermanischem Typus. Er ist dolichocephal, orthocephal, mesognath, die Muskelinsertionslinien sind stark entwickelt. Die Sutura coronalis persistirt in einer Länge von ca. 2 cm. von ihrem unteren Ende an, die übrigen Nähte sind erhalten. Das Alter ist nach den Zähnen auf ca. 30 Jahre zu schätzen. Die Arcus superciliares ragen beträchtlich hervor, die Schläfengegend ist vorn schmal, das Hinterhaupt weit vorspringend. Die Zähne sind mäßig abgeschliffen, die Weisheitszähne weniger als die übrigen Molaren. Die Schädelknochen sind gut erhalten und fest.

Der Schädel Nr. II ist weit bröcklicher, seine Knochen dünner, die Form namentlich der Stirn entschieden weiblich. Derselbe ist brachycephal, hypsicephal; er gehört der *paragermanischen* Reihe an, welche Virchow als süddeutsche Brachycephalie, v. Hölder als sarmatischen Typus, J. Ranke als schmalgesichtige Kurzköpfe bezeichnete.

Die Weisheitszähne sind eben durchgebrochen, mit scharfen Höckern versehen und das Lebensalter auf 20—25 Jahre zu schätzen. Bei Horizontalstellung des Schädels verläuft die Profillinie der Hinterhauptsschuppe hinter dem Foramen magnum ein paar cm horizontal, um dann sanft nach oben umzubiegen. Die Differenz der Höhe des vorderen und hinteren Randes betrug 12 mm., beim Schädel Nr. I nur 8 mm. An der Schuppe des linken Schläfenbeines sowie am unteren vorderen Winkel des linken Scheitelbeines befinden sich unregelmäßige Perforationsöffnungen mit zugeschärften Rändern, die Diploë ist in größerer Ausdehnung freigelegt und die Oberfläche rauh. Diese Veränderungen sind wohl nicht auf eine irgendwie entstandene Caries und Nekrose, sondern auf posthume Zerstörungen, etwa durch Wurzeln lebender Pflanzen zu beziehen.

Bei dem Schädel fanden sich die zugehörigen beiden obersten Halswirbel, ferner ein Halswirbel eines Kindes von 45 mm. Breite. Derselbe war von Kupfercarbonat braungrünlich gefärbt, ebenso wie der Schädel Nr. II an dessen Partes mastoideae beider Schläfenbeine.

Die Messungen an den Schädeln wurden nach dem auf der all-

gemeinen Versammlung der deutschen Gesellschaft für Anthropologie zu Frankfurt a/M. im August 1882 vereinbarten Verfahren, der sog. Frankfurter Verständigung (Archiv f. Anthropologie. 1883. Correspondenzblatt. S. 1.) vorgenommen. Auf den Rath v. Koenen's wurde auch die Frage berücksichtigt, in wie weit sich die Dimensionen solcher Schädel durch das Trocknen ändern. Jeder Anatom weiß, daß der frische, der in Wasser macerirte und der schließlich trocken, wenn auch nicht lufttrocken im chemischen Sinne, aufgestellte Schädel keine Unterschiede darbieten, die bei den gewöhnlichen Messungen wahrnehmbar sind. Ob dies an den mürben Gräberschädeln sich ebenso verhält, ist wie es scheint bisher noch nicht untersucht. Es wurde daher 1) der frisch aus der Erde kommende, durch und durch feuchte, noch mit Lehm gefüllte Schädel gemessen und 2) derselbe nach vollständiger Reinigung und Austrocknung. Diejenigen Maaße, welche hierbei vor allen als entscheidend zu betrachten sind, hatten sich nur sehr wenig geändert. Bei Nr. I hatte sich die Höhe von 146 auf 145 mm vermindert, bei Nr. II die Länge von 168 auf 167 mm abgenommen. Der Verticalumfang war bei Nr. I von 323 auf 324 mm gestiegen, während bei Nr. II der Sagittalumfang von 368 auf 365 mm abgenommen hatte. Die Ohrhöhe hatte sich von 122 auf 120 mm vermindert, aber die äußeren Ohröffnungen waren bei diesem Schädel sehr lädirt. Da wie gesagt die Länge um 1 mm abgenommen hatte, so könnte man letzteres nebst der Differenz des Sagittalumfanges auf Rechnung des Eintrocknens bringen wollen. Aber es ist nicht ganz leicht, die beiden Endpunkte des zu messenden Bogens: den hinteren Rand des Foramen magnum und die Sutura nasofrontalis mit einem festen Meßbande genau zu treffen und deßhalb sind auch diese Differenzen als den Bereich der Messungsfehler nicht überschreitend anzusehen. Man kann also die Unterschiede, die zum Theil offenbar durch Verschiebungen in den Nähten zu Stande kommen, vernachlässigen, obgleich es aus mehreren Gründen wohl zu empfehlen wäre, die Hauptdimensionen von den feuchten Schädeln zu nehmen, mag mit den letzteren auch schlechter zu handtiren sein.

Dimensionen der Schädel in mm.

Nro. des Schädels	Geschlecht	Capacität	Gerade Länge	Größte Länge	Intertuberallänge	Größte Breite	Auricularbreite	Ganze Höhe	Hilfshöhe	Ohrhöhe	Hilfsohrhöhe	Länge der Schädelbasis	Länge der Pars basilaris	Länge des Foramen magnum
I	M.	—	196	197	189	145	136	98	145	145	107	109	33	38
II	W.	—	167	168	170	136	120	97	128	127	121	89	23	34

Nro. des Schädels	Breite des Foramen magnum	Breite der Schädelbasis (a)	Breite der Schädelbasis (b)	Horizontalumfang	Sagittalumfang	Verticalumfang	Gesichtsbreite (a)	Gesichtsbreite (b)	Gesichtsbreite (c)	Jochbreite	Interorbitalbreite	Gesichtshöhe	Obergesichtshöhe	Nasenhöhe
I	31	111	139	541	394	324	93	123	120	152	25	120	68	52
II	26	113	117	487	365	306	95	99	112	130	22	111	63	46

Nro. des Schädels	Nasenbreite	Größte Augenhöhlenbreite	Horizontale Augenhöhlenbreite	Winkel zwischen beiden	Größte Augenhöhlenhöhe	Verticale Augenhöhlenhöhe	Gaumenlänge	Gaumenmittelbreite	Gaumenendbreite	Gesichtsprofillänge	Profilwinkel	Längenbreitenindex	Längenhöhenindex	Breitenhöhenindex
I	27	41	42	9°	32	31	59	43	45	99	90°	74,0	74,0	100
II	28	39	38	18°	30,5	31,5	47	40	41	85	88°	81,0	76,6	94,1

Auch nach Hrn. Prof. Krause's Untersuchung ist also ohne Zweifel der Schädel II sehr viel älter. Daß er vom Körper getrennt begraben wurde, läßt vielleicht darauf schließen, daß er aus einer etwas späteren Zeit stammt als die Urnen, in welchen sich auch Fragmente von Schädeln vorfinden; es ist eine solche partielle Bestattung im nordwestlichen Deutschland jedenfalls sehr selten. Vielleicht fand sie, wie J. H. Müller meint, bei Beginn der Ausbreitung des Christenthums statt. Die rohe Arbeit der Urnen, das Feuersteinmesser, die Hirschgeweih-Hacke, ja selbst das schmucklose Bronce-Halsband deuten aber doch wohl auf eine Zeit vor Beginn unserer Zeitrechnung hin, wennschon ein solches Halsband sich durch mehrere Generationen vererbt haben mag.

Der Schädel I und die übrigen Schädel-Fragmente und Skelett-Theile fanden sich aber nie mit gut erhaltenen Urnen, sondern nur mit Scherben von solchen zusammen, sind also erheblich jünger, da augenscheinlich zur Zeit ihrer Bestattung das Andenken an die Urnen und jede Pietät gegen dieselben gänzlich in der Bevölkerung der Gegend verschwunden war. Dabei lagen aber auch Reste von Schwein, Rind etc. Ebenso waren nur Urnenscherben vorhanden in der Nähe von Fundament-ähnlichen Steinlagen, welche sich ungefähr in der Richtung von Norden nach Süden, aber mehrfach unterbrochen und mit zurückspringenden Ecken bis zu einer Tiefe von ca. 0,75 Meter vorfanden. Dieselben waren etwa 0,5 Meter breit, bestanden aus dem Trochiten-Kalk resp. der Terebratelbank des nahe gelegenen Hainberges, zeigten zum Theil rothe Färbung, wohl in Folge von Einwirkung von Feuer, waren wenig sorgfältig, lose (ohne Mörtel) neben einander gelegt, und reichten nur bis 30 cm von der Oberfläche, waren also wohl entfernt worden, soweit sie dem Beackern des Landes hinderlich waren. Auch in dem Erdreich zwischen den Steinblöcken dieses fraglichen Fundamentes fand ich Urnenscherben. Endlich wurden in der Nähe von Urnenscherben zwei eiserne Kanonenkugeln von 11 resp. 6,5 cm Durchmesser gefunden. Diese dürften von der Belagerung Göttingen's durch Tilly im dreißigjährigen Kriege herrühren, und es liegt dann die Möglichkeit nahe, daß auch die begrabenen ganzen Leichen, namentlich Schädel Nr. I aus dieser Zeit stammen.

Die Fundamente könnten von der 1387 abgebrochenen Mauer um den Reinsbrunnen oder von dem 1481 zerstörten Dorfe Omborn herrühren (Veldeck, Göttingen und Umgebungen 1824. Bd. I S. 137 u. 163, Bd. II S. 16.)

Es wäre demnach das oberflächlich ziemlich ebene Terrain zu zwei oder drei weit auseinander liegenden Zeiten Begräbniß-Stätte gewesen, zuerst vor ca. 2000? Jahren für die Urnen mit verbrannten Kno-

chenresten, gleichzeitig, oder doch vor über 1000 Jahren des anscheinend abgeschnittenen Kopfes, endlich für die begrabenen Leichen vor ca. 250 bis 450 Jahren.

Ueber Integrale transcendenter Functionen.

Von

Leo Koenigsberger in Wien.

In einer demnächst erscheinenden ausführlicheren Arbeit habe ich mir die Aufgabe gestellt, diejenigen transcendenten Functionen zu charakterisiren, deren Integral sich algebraisch durch eben diese Transcendente ausdrücken läßt, und ich mußte zu dem Zwecke die von Abel herrührenden Sätze über die Integrale algebraischer Functionen auf Quadraturen transcendenter Functionen und Integrale von linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten beliebige Transcendente sind, erweitern. Ich erlaube mir im Folgenden nur die wesentlichsten Sätze aus der Untersuchung hervorzuheben, deren Aufeinanderfolge und Inhalt den Gang und die Methode der Untersuchung hinlänglich charakterisiren werden.

I. Wenn für ein Integral einer algebraischen Differentialgleichung die Quadratur über eine algebraische Function dieses Integrales, dessen Ableitung und der unabhängigen Variabeln eine algebraische Function eben dieser Größen ist, so läßt sich diese als *rationale* Function des Integrales, dessen Ableitungen, der unabhängigen Variabeln und der Basis der Quadratur darstellen.

II. Ist die Quadratur einer algebraischen Function eines Integrales einer algebraischen Differentialgleichung und dessen Ableitungen in eben diesen Größen algebraisch, also auch rational in diesen Größen und der Basis der Quadratur ausdrückbar, so bleibt die Form des rationalen Ausdruckes der Quadratur bestehen, wenn anstatt der Basis irgend ein anderer Zweig dieser algebraischen Function gesetzt wird.

III. Wenn die Quadratur einer algebraischen Function eines Integrales einer algebraischen Differentialgleichung und dessen Ableitungen sich durch eben dieses Integral und dessen Ableitungen algebraisch ausdrücken läßt, so wird unter der Voraussetzung, daß die Differentialgleichung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist,

und das Integral nicht schon einer gleichartigen algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, eben diese Quadratur für jeden Zweig ihrer Basis und für jedes Integral der algebraischen Differentialgleichung durch dieselbe *rationale* Function des Integrales der Differentialgleichung, dessen Ableitungen bis zur Ordnung der Differentialgleichung und dem resp. Zweige der Basis der Quadratur ausgedrückt werden können.

Es ist unmittelbar zu sehen, wie sich diese Sätze specialisiren, wenn die Basis der Quadratur eine rationale Function der Transcendenten und ihrer Ableitung ist.

IV. Wenn die Quadratur einer algebraischen Function eines Integrales einer algebraischen Differentialgleichung und dessen Ableitungen sich durch eine Anzahl ρ von Integralen eben dieser Differentialgleichung und deren Ableitungen algebraisch ausdrücken läßt, so wird sich unter der Voraussetzung, daß die Differentialgleichung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist und das in der Basis vorkommende Integral nicht schon einer gleichartigen algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung angehört, eben diese Quadratur für *jeden Zweig* ihrer Basis und für *jedes Integral* der algebraischen Differentialgleichung durch dieselbe *rationale* Function von ρ Integralen der Differentialgleichung, deren Ableitungen und dem resp. Zweige der Basis der Quadratur ausdrücken lassen.

Diese Sätze gestatten aber eine Ausdehnung auf beliebige lineare Differentialgleichungen, deren einfachster Fall die Quadratur definirt.

V. Wenn eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten algebraische Functionen von Integralen algebraischer Differentialgleichungen sind, ein in diesen Integralen und deren Ableitungen algebraisches Integral besitzt, so existirt auch ein in diesen Integralen, deren Ableitungen und den Coefficienten der Differentialgleichung rationales Integral, also ein in den Integralen und deren Ableitungen selbst rationales Integral, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung rational aus diesen zusammengesetzt sind, und weitere Ausführungen dieser Sätze mit Hülfe derjenigen Trans-

cendenten, durch welche sich sämmtliche Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrücken lassen. Ferner

VI. Wenn eine nicht lineare homogene Differentialgleichung

$$z^{(\mu)}+f_1(x, Y_1, Y_1', .. Y_1^{(m)})z^{(\mu-1)}+\ldots+f_\mu(x, Y_1, Y_1', .. Y_1^{(m)})z$$
$$= f(x, Y_1, Y_1', .. Y_1^{(m)}),$$

in welcher $f_1, f_2, \ldots f_\mu$ rationale Functionen, f eine algebraische Function bedeuten, ferner Y_1 ein Integral einer in dem höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung

$$F(x, Y, Y', \ldots Y^{(m)}) = 0$$

vorstellt, ein in $x, Y_1, Y_1', \ldots$ algebraisch ausdrückbares Integral besitzt, so hat sie auch ein in $x, Y_1, Y_1', .. Y_1^{(m)}$ und $f(x, Y_1, Y_1', .. Y_1^{(m)})$ *rationales* Integral, und dieser letztere Ausdruck bleibt ein Integral, wenn man in der Differentialgleichung und im Integralausdrucke für f irgend einen anderen Zweig dieser Function und statt Y_1 irgend ein anderes Integral der Differentialgleichung $F = 0$ substituirt.

VII. Hat eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten algebraische Functionen von Integralen algebraischer Differentialgleichungen und deren Ableitungen sind, ein in diesen Integralen und deren Ableitungen algebraisches Integral, so muß sich dieses als rationale Function eben dieser Größen und der Coefficienten der Differentialgleichung darstellen lassen, vorausgesetzt, daß die reducirte Differentialgleichung gar kein algebraisches Integral der Art oder nur ein in den Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung rational ausdrückbares Integral besitzt.

Analoge Schlüsse führen zu dem allgemeineren Resultat, daß, wenn die oben bezeichnete Quadratur durch elliptische und Abel'sche Integrale ausdrückbar ist, deren Grenzen algebraische Functionen der Transcendenten y_1 und deren Ableitungen sind, eben solche Integrale mit in der Transcendenten, deren Ableitungen und der Basis der Quadratur rationalen Grenzen an die Stelle treten werden, und ähnliche Sätze wiederum für lineare nicht homogene Differentialgleichungen.

Von diesen nach zwei verschiedenen Seiten hin ausgeführten Erweiterungen der Abel'schen Sätze wird nun eine Anwendung auf die

Beantwortung der Frage gemacht, welche Transcendenten die Eigenschaft besitzen, daß ihre Quadratur wiederum algebraisch durch dieselbe Transcendente ausdrückbar ist. Es ergeben sich im Laufe dieser Untersuchung folgende Sätze:

VIII. Jede Transcendente der angegebenen Eigenschaft ist das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung.

IX. Wenn ein Integral einer algebraischen Differentialgleichung höherer Ordnung die Eigenschaft hat, daß die über dasselbe genommene Quadratur sich algebraisch durch eben dieses Integral ausdrücken läßt, so wird noch eine einfache Unendlichkeit anderer particulärer Integrale jener Differentialgleichung die Eigenschaft haben, daß ihre Quadratur durch *dieselbe* algebraische Function des resp. Integrales ausdrückbar ist, und zwar werden alle diese Integrale die Gesammtheit der Integrale einer in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung bilden.

X. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f_1 y + f_2$$

die Eigenschaft hat, daß die Quadratur eines also auch aller ihrer Integrale algebraisch durch eben dieses Integral ausdrückbar ist, sind die, daß die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$z' + f_1 z = 1$$

ein algebraisches Integral P_1 besitzt, und daß das *Abel*'sche Integral

$$\int P_1 f_2 dx$$

auf eine algebraische Function $-P_2$ von x reducirbar ist, und in diesem Falle ist die Quadratur selbst eine lineare Function des Integrals von der Form

$$\int y dx = P_1 y + P_2.$$

XI. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine aus der linearen Differentialgleichung

$$Y' = f_1 Y + f_2$$

durch die ganze algebraische Substitution in Y

$$(\alpha) \ldots. y = F_0 + F_1 Y + F_2 Y^2 + \ldots + F_k Y^k$$

abgeleitete, in y' algebraisch irreductible Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0$$

die Eigenschaft hat, daß die Quadratur über ein nicht algebraisches Integral derselben also auch über jedes ihrer Integrale genommen, durch eben dieses Integral algebraisch ausdrückbar ist, sind die, daß die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\omega_k' + kf_1\omega_k = F_k,\ \omega_{k-1}' + (k-1)f_1\omega_{k-1} = F_{k-1} - kf_2\omega_k,\ \omega_{k-2}' + (k-2)f_1\omega_{k-2}$$
$$= F_{k-2} - (k-1)f_2\omega_{k-1},\ \ldots\ldots.\omega_1' + f_1\omega_1 = F_1 - 2f_2\omega_2$$

algebraische Integrale besitzen und das *Abel*'sche Integral

$$\omega_0 = \int (F_0 - f_2\omega_1)\, dx$$

auf eine algebraische Function reducirbar sei; in diesem Falle ist die Quadratur selbst eine ganze Function $k$ten Grades in Y von der Form

$$\int y\, dx = \omega_0 + \omega_1 Y + \omega_2 Y^2 + \ldots + \omega_k Y^k,$$

die mit (α) zusammengestellt durch Elimination von Y den gesuchten algebraischen Ausdruck in x und y für die gegebene Quadratur liefert.

XII. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein aus der linearen homogenen Differentialgleichung

$$Y' = f_1 Y$$

durch die algebraische Substitution

$$(\beta) \ldots y = F_0 Y^{\alpha_0} + F_1 Y^{\alpha_1} + \ldots + F_k Y^{\alpha_k},$$

in welcher $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_k$ positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, abgeleitete in y' algebraisch irreductible Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0$$

die Eigenschaft hat, daß die Quadratur über ein nicht algebraisches Integral derselben durch eben dieses In-

tegral algebraisch ausdrückbar ist, sind die, daß die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\omega_0' + \alpha_0 f_1 \omega_0 = F_0, \quad \omega_1' + \alpha_1 f_1 \omega_1 = F_1, \quad \ldots\ldots \omega_k' + \alpha_k f_1 \omega_k = F_k$$

algebraische Integrale besitzen, und in diesem Falle hat die Quadratur selbst die Form

$$\int y\,dx = \omega_0 Y^{\alpha_0} + \omega_1 Y^{\alpha_1} + \ldots + \omega_k Y^{\alpha_k},$$

die mit (β) zusammengestellt durch Elimination von Y den gesuchten algebraischen Ausdruck in x und y für die gegebene Quadratur liefert.

Nun wird die Frage aufgeworfen, welche linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung die Eigenschaft der algebraischen Ausdrückbarkeit der Quadratur ihres Integrales durch eben dieses Integral besitzen, und diese Frage durch die folgenden Sätze beantwortet:

XIII. Wenn eine lineare Differentialgleichung $m$ter Ordnung die Eigenschaft hat, daß die Quadratur über eines ihrer Integrale algebraisch durch eben dieses Integral ausdrückbar ist, so muß dieses Integral der reductibeln linearen Differentialgleichung einer solchen in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung genügen, deren allgemeines Integral eine homogene lineare Function von $m+1$ particulären Integralen derselben ist, deren Coefficienten Functionen *einer* willkürlichen Constanten sind.

Nun wird leicht gezeigt, daß die aus der Differentialgleichung

$$y' = f_1 Y + f_2$$

durch die Substitution

$$y = F_0 + F_1 Y + F_2 Y^2 + \ldots + F_k Y^k,$$

und die aus

$$Y' = f_1 Y$$

durch die Substitution

$$y = F_0 Y^{\alpha_0} + F_1 Y^{\alpha_1} + \ldots + F_k Y^{\alpha_k}$$

abgeleiteten Differentialgleichungen erster Ordnung die Eigenschaft haben, daß sich ihr allgemeines Integral als eine homogene lineare Function von $k+1$ particulären Integralen desselben ausdrücken läßt, und nachdem gezeigt ist, daß andere aus der linearen Differentialgleichung erster Ordnung abgeleitete Differentialgleichungen diese

Eigenschaften nicht besitzen, folgt auf Grund einer von mir in den »Acta mathematica B. 3« angestellten Untersuchung »über die einer Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen Transcendenten« der nachfolgende Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Quadratur eines Integrales einer beliebigen linearen Differentialgleichung durch eben dieses Integral algebraisch ausdrückbar sei, ist die, daß dieses Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung angehöre, welche aus der linearen Differentialgleichung

$$Y' = f_1 Y + f_2$$

durch Anwendung der Substitution

$$y = F_0 Y^{\alpha_0} + F_1 Y^{\alpha_1} + \ldots + F_k Y^{\alpha_k},$$

in welcher F_0, F_1, $..F_k$ algebraische Functionen, α_0, α_1, $..\alpha_k$ positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, abgeleitet ist, worin diese Größen den Bedingungen unterliegen, daß die folgenden linearen Differentialgleichungen in $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_k$

$$\omega_k' + \alpha_k f_1 \omega_k = F_k, \quad \omega_{k-1} + \alpha_{k-1} f_1 \omega_{k-1} = F_{k-1} - k f_2 \omega_k,$$

$$\omega_{k-2}' + \alpha_{k-2} f_1 \omega_{k-2} = F_{k-2} - (k-1) f_2 \omega_{k-1}, \quad \ldots\ldots \omega_0' + \alpha_0 f_1 \omega_0 = F_0 - f_2 \omega_1$$

algebraische Integrale besitzen, wobei, wenn f_2 von Null verschieden ist, $\alpha_k = k$, $\alpha_{k-1} = k-1$, $\ldots \alpha_0 = 0$ sein muß.

Somit ist man im Stande, die Form aller Integrale linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung anzugeben, welche die Eigenschaft haben, daß die Quadratur über dieses Integral genommen von eben diesem Integrale algebraisch abhängt.

Wien am 2. Februar 1884.

Ueber Diffraktionserscheinungen in feuchter Luft.

Von

Kiessling,

Professor am Johanneum in Hamburg.

Bei einer eingehenden experimentellen Prüfung des zuerst von Coulier und Mascart (1875) und mehrere Jahre später von Aitkin (1880) festgestellten Einflusses, welchen fremde Beimischungen auf die

Nebelbildung in feuchter atmosphärischer Luft ausüben, habe ich eine Reihe von Diffraktionserscheinungen beobachtet, deren Entwicklung und Formengesetze mit der Theorie der Frauenhoferschen Diffraktionserscheinungen nur schwer in Einklang zu bringen sind. Dieser Umstand, sowie namentlich der augenscheinliche Zusammenhang zwischen diesen unter geeigneten Verhältnissen sehr intensiv auftretenden Farbenerscheinungen und den Dämmerungserscheinungen, welche gerade gegenwärtig ein allgemeines Interesse in Anspruch nehmen, lassen eine genaue Prüfung unter möglichst großen Verhältnissen wünschenswert erscheinen.

Ich will im Folgenden kurz die wichtigsten Resultate angeben, zu denen ich bis jetzt gelangt bin. Die Erscheinungen sind an einer mit zwei parallelen Spiegelglasplatten verschlossenen Röhre dargestellt worden, durch welche hindurch das in hinreichender Entfernung aufgestellte Diaphragma eines Argandbrenners beobachtet wurde. Im Innern der Röhre, dem »Diffraktionsraum«, konnte durch geeignete Vorrichtungen der »Dunstgehalt«[1]), die Feuchtigkeit, der Druck und die Temperatur beliebig geändert werden. Dieser Apparat kann als ein sehr empfindlicher »Dunstmesser« bezeichnet werden.

Die in feuchter Luft durch eine plötzliche Abkühlung erzeugten Nebel rufen im durchgehenden Licht unter geeigneten Umständen sehr lebhafte Diffraktionserscheinungen hervor, welche im Wesentlichen aus einem besonders lichtstarken centralen Feld und einer Reihe concentrischer Ringe bestehen, deren Zahl bis auf fünf steigen kann.

Die Erscheinung erweist sich abhängig von der Temperatur, der Feuchtigkeit, dem »Dunstgehalt« der Luft und der specifischen Beschaffenheit des »Dunstes«. Variabel ist dabei der Durchmesser des centralen Feldes sowohl, wie die Ausdehnung der Ringe, ferner die Färbung und Lichtintensität des centralen Feldes.

Ist der Diffraktionsraum mit vollständig gesättigter Zimmerluft gefüllt, welcher ja stets ein erheblicher Betrag von Staubteilchen und sonstigem »Dunst« beigemengt ist, so entsteht bei einer geringen, durch Druckverminderung erzeugten Temperaturerniedrigung sehr schnell ein Nebel von so großer Dichtigkeit, daß selbst eine starke Lichtquelle eine erhebliche Absorption erfährt.

Bei einer angemessenen Temperaturerhöhung, sei es direkt durch

1) Unter »Dunst« soll im Folgenden die Gesamtheit aller fremden Bestandteile außer Wasser in der atmosphärischen Luft bezeichnet werden; also gröbere und feinere Staubteilchen, mikroskopische organische Gebilde (Sporen u. dergl.), Verbrennungs- und Oxydationsprodukte, auch wenn sie vollkommen gasförmig sind, wie z. B. die Exspirationsgase der menschlichen und tierischen Lunge.

Erwärmung der Umhüllung des Diffraktionsraumes oder durch Druckverminderung verschwindet der Nebel ebenso schnell, wie er entstanden ist.

Wird ein Teil der nebelbildenden Luft durch Luft ersetzt, welche vor ihrem Eintritt in die Röhre durch ein Baumwollenfilter geleitet worden ist und wird dann jedesmal wieder nach einer Veränderung des Dunstgehaltes der Eintritt des Sättigungszustandes abgewartet so vermindert sich die Nebelbildung, während allmählich Diffraktionserscheinungen auftreten, deren Farbenintensität wächst, bis die Dunstmenge bis auf einen gewissen äußerst geringen Betrag herabgesunken ist. Dieser geringe Betrag an Dunstgehalt kann als die »lichtgünstigste Dunstmenge« bezeichnet werden. Wird zuletzt auch dieser geringe Betrag an Dunst durch fortgesetztes Filtriren beseitigt, so nimmt die Farbenintensität schnell ab; die Nebelbildung entzieht sich vollständig der Wahrnehmung. Die Durchmesser der Diffraktionsringe nehmen gleichfalls schnell ab, woraus man, wenn die Frauenhofersche Theorie hier angewendet werden darf, schließen muß, daß auch die Diffraktionskörperchen — obgleich sie dem Auge unsichtbar werden, doch an Ausdehnung zunehmen. Schließlich (meist nach halbstündigem Filtriren) ist es nicht mehr möglich, auch wenn die Luft so gesättigt ist, daß an der Umhüllung des Diffraktionsraumes Kondensation eintritt, durch Temperaturerniedrigung eine sichtbare Nebelbildung oder irgend eine Spur von Diffraktionswirkung zu erzeugen.

Es scheint also das von Aitkin ausgesprochene Gesetz im Allgemeinen richtig zu sein, daß wenn überhaupt Wasserdampf in der Atmosphäre kondensirt, dies stets auf irgend einem festen Kern geschieht, und daß diese Kondensationskerne von den in der Atmosphäre vorhandenen Dunstteilchen gebildet werden, daß also ohne Dunst es weder Nebel noch Wolken gäbe.

Wird der Feuchtigkeitsgehalt des Diffraktionsraumes verändert, so daß derselbe nur um ein Geringes vom Sättigungspunkt sich entfernt, so tritt eine überaus schnelle Abnahme der Farbenentwicklung ein. Bilden sich hierbei Schichten von verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt, so sind dieselben scharf in der Färbung verschieden, was sich namentlich schön bei Anwendung verschiedener chemisch nicht auf einander einwirkender Gase beobachten läßt. Eine genaue Untersuchung dieser Erscheinungen gestattet, die Entwicklung des Verdunstungsprozesses optisch zu verfolgen. Das Gesamtergebnis dieser Beobachtungen läßt sich kurz dahin zusammenfassen: daß das absolute Maximum der Diffraktionswirkung (d. h. der Farbenentwicklung) bedingt ist durch das Zusammentreffen des

lichtgünstigsten Dunstbetrages mit dem relativen Feuchtigkeitsmaximum in der betreffenden Luftschicht.

Von besonderem Interesse ist die specifische Beschaffenheit des Dunstes. Am wirksamsten für die Nebelbildung — die dann aber so dicht ist, daß jede Diffraktionswirkung aufhört — ist unfiltrirte Zimmerluft, welcher ein äußerst geringer Betrag von NH_3 oder SO_2 oder irgend welcher Verbrennungsgase beigemengt ist.

Wird jedoch NH_3 oder SO_2 in erheblichen Mengen nach vorausgegangener Filtration in den mit filtrirter Luft gefüllten Diffraktionsraum geleitet, so ist die Nebelbildung nur sehr gering und auch die Farbenentwicklung recht schwach.

Ein interessantes Resultat ergab ein direkter Versuch mit vom Ausbruch des Krakatau herrührenden Bimsteinstaub, den ich der Güte des Herrn Professor Neumayer verdanke [1]). Derselbe zeigte in filtrirter Luft zerstäubt einen deutlich erkennbaren aber geringen Einfluß sowohl auf die Nebelbildung, wie auf die Farbenentwicklung in den nur ganz schwach sich bildenden Diffraktionsringen.

Da seit mehreren Wochen ununterbrochen der Himmel bedeckt gewesen ist, habe ich nur mit Gaslicht experimentiren können. Die Einwirkung des direkten Sonnenlichtes (oder des elektrischen Lichtes) wird sicherlich viel schärfer ausgeprägte Erscheinungen geben.

1) Derselbe ist am 28. August 1883 auf der »Barbarossa« unter 3° 8′ s. B. und 93° 5′ ö. L. gesammelt worden.

Universität.

Preisstiftung der Wittwe Petsche, geb. Labarre.

Zur Lösung der im Jahre 1883 von der philosophischen Facultät gestellten Preisaufgabe:

»Quae sit in M. Porci Catonis de agricultura libro sermonis
»ratio quaeratur ita, ut conjectura inde capi possit de muta-
»tionibus, quas liber ille subiisse videatur«

ist unter Beobachtung der bestehenden Vorschriften eine mit dem Motto: »Rem tene, verba sequentur« versehene Arbeit eingegangen.

Die umfängliche Abhandlung umfaßt nicht alle Theile der Aufgabe in gleichmäßiger Ausführung. Sie handelt besonders gründlich über die Flexionen, bespricht in ausreichender Weise, obwohl mehr gelegentlich, die Archaismen der Orthographie, die sich in Cato's

Schrift vorfinden oder darin vermißt werden; minder vollständig ist die Wortbildung erörtert; über Syntax, Periodenbildung, Stilform des Werkes werden nur zum Schluß einige allgemeine Bemerkungen und einzelne Belege dargeboten. Die Anordnung des Stoffes läßt in mancher Hinsicht Zweckmäßigkeit vermissen; vielleicht auch wäre in der ganzen Anlage der Untersuchung besser ein anderer Ausgangspunkt genommen. Manche Erörterungen, die keine Anwendung auf die ursprüngliche und jetzige Gestalt des Buches finden können, wären besser theils auszuschließen, theils sehr zusammenzuziehen gewesen; der Apparat der grammatischen Gelehrsamkeit ist etwas zu weitläufig ausgebreitet. Der Ausdruck, wiewohl correct und von Uebung zeugend, ist wenig gefällig und sehr eintönig; er bedarf der Glättung und mehr noch einer zweckmäßigen Knappheit.

Aber diesen Mängeln treten überwiegende Vorzüge gegenüber. Der Verfasser hat sich in höchst anerkennenswerther Weise vertraut gemacht mit der Geschichte der lateinischen Sprache und besitzt eine gründliche grammatische Bildung; er ist in den neueren Forschungen auf diesem Gebiete so gut zu Hause, wie dies irgend erwartet werden kann. Das Werk über den Landbau sowie die Fragmente Cato's hat er mit großem Fleiß durchgearbeitet und allem Anscheine nach bedient er sich eines ziemlich vollständigen Beweismaterials. Er versteht methodisch zu untersuchen und bewährt ein höchst besonnenes einsichtiges Urtheil und nach allen Seiten Gewissenhaftigkeit und Wahrheitsliebe. Es läßt sich erkennen, daß er auch diejenigen Seiten seiner Aufgabe nicht vernachlässigt hat, die er, aus Mangel an Zeit, vorerst nur in unvollständiger oder andeutender Besprechung in den Rahmen seiner Arbeit ziehen konnte.

Eine Vergleichung der Ausführungen anderer lateinischer Autoren aus Cato's »agricultura« mit unserem Text, welche die nothwendige und wichtige Ergänzung vorliegender Arbeit bilden wird, war von der, so schon für die Kürze der Frist beinahe zu umfangreichen Aufgabe absichtlich ausgeschlossen worden. Der Verf. zeigt durch zahlreiche Proben, daß er auch nach dieser Seite hin wenigstens vorgearbeitet hat.

Ob die Endergebnisse vorliegender Forschung alle richtig oder wahrscheinlich sind, ferner auch ob der Verfasser alle Momente methodisch in Anrechnung gebracht hat, wird dann erst beurtheilt werden können, wenn die Arbeit als ein Ganzes abgeschlossen vorliegt.

Die Untersuchung, welche er eingereicht hat, enthält die Grundlegung einer tüchtigen und nützlichen Arbeit und ist ein ehrenvolles Zeugniß wissenschaftlichen Strebens. Die Facultät hat hiernach kein Bedenken getragen, dem Verfasser den vollen Preis zuzuerkennen. —

Die Eröffnung des versiegelten mit dem oben angegebenen Motto bezeichneten Couverts ergab als Verfasser

Herrn Paul Weise, cand. philol.

Die philosophische Facultät.

W. Henneberg, z. Z. Decan.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar.

Nature No. 744. 745. 746. 747.
Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben vom naturwissensch. Verein für Sachsen und Thüringen. 4. Folge. Bd. II. Heft 5.
Annales de la Société géologique de Belgique. T. IX.
Clausius, zur Theorie der dynamo-elektr. Maschinen. (S. A. aus den Annalen für Phys. u. Chem.)
Anales de la Sociedad cientifica argentina. T. XVII. Entr. 1.
Bulletin of the museum of comparative zoology at Harvard's College. Vol. XI. No. 5. 6. 7. 8.
Berichte über die Verhandlungen der k. sächs. Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig. Mathematisch-physical. Classe. 1882. Philolog.-histor. Classe. 1882.
Abhandlungen der mathematisch-physicalischen Classe der k. sächs. Gesellsch. der Wissensch. Bd. XII. No. 9.
Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der k. sächs. Gesellsch. der Wissensch. Bd. VIII. No. 5. 6. Bd. IX. No. 1.
Records of the geological Survey of India. Vol. XVI. P. 4.
Techner, internationale Ztschr. für allgemeine Sprachwissensch. Bd. I. Heft 1.
Jahrbücher des nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. XXXVI.
Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus. N. F. Bd. XVII.
Rotulen van de algemeene en bestuusvergaderingen van het bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschapen. D. XXI. No. 1.
Tijdschrift voor indische taal- land- en volkenkunde. Deel XXVIII. Afl. 5.
Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Bd. XXI. Heft 1. 2.
Sitzungsberichte der medicinisch-physicalischen Societät in Erlangen. Heft 15.
Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Febr.
Proceedings of the academy of natural sciences of Philadelphia. P. II. June — October 1883.
Account of the operations of the great trigonometrical Survey of India. Vol. IX. (3 Expl.)
Flora batava. Afl. 263. 264.
Zeitschrift der deutschen morgenländ. Gesellschaft. Bd. XXXVII. Heft 4.
Kuhn, wissenschaftl. Jahresbericht über die morgenländischen Studien. 1878. 2. Hälfte.
Leopoldina. Heft XX. No. 1. 2.
Atti della reale accademia dei Lincei. Transunti. Vol. VIII. Fasc. 2. 3.
Bulletin de la société mathematique de France. T. XI. No. 5.
Monthly notices of the roy. astronomical society. Vol. XLIV. No. 3.
J. Plateau, bibliographie analytique des principaux phénomènes de la vision. 2e Supplement.

J. Plateau, sur l'observation des mouvemens très rapides. Extr. des bulletins de l'acad. de Belgique.
Ders., quelques expériences sur les lames liquides minces. 2e note. ebendaher.
Bulletin of the american geographical sociciety. 1883. No. 3. 4.
Proceedings of the london mathematical society. No. 211—213.
Boncompagni, bulletino di bibliografia e di storia della sc. matem. e fis. T. XVI. Apr. (Für die Gauß-Bibliothek.)
Annuaire de l'academie royale des sciences etc. de Belgique. 1884.
Journal of the royal microscopical society. Vol. IV. P. 1.
Measurement of the force of gravity at Sapporo. An appendix to memoir No. 5 of the science-department.
Sitzungsberichte der k. preuß. Academie der Wissenschaften. 1883. XXXIX—LIII.
John A. R. Newlands, on the discovery of the periodic law and on relations of the anatomic Weights. London 1884.
Rhenus 1884. No. 2. 3.
J. W. L. Glaisher, Tables on the exponential function. S. A. aus d. Cambridge philos. Transact.
Ders., Calculation of the hyperbolic logarithm of π. S. A. aus d. proceedings of mathem. soc.
Ders., biographical notice of the late James Challis. S. A. aus Monthly notices of astron. soc.
Report of the committee, consisting of Prof. Cayley, Prof. Stokes, Sir W. Thomson, Mr. James Glaisher and Mr. J. W. L. Glaisher, on mathematic tables.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. XXXIII. No. 4.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1883. No. 10—18.
Report of progress of the geological and national history survey of Canada 1880 - 82 and maps.
Catalogue of canadian plants. Part I, polypetalae.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

3. Mai. № 6. 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 3. Mai.

Klein, Ueber das Krystallsystem des Leucit und den Einfluß der Wärme auf seine optischen Eigenschaften.
Voigt, Theorie der optischen Eigenschaften der Metalle.
Frensdorf, Das Recht der deutschen Kaufleute in Nowgorod und sein Verhältniß zum Rechte von Lübeck.
Enneper, Ueber einige elliptische Integrale.
Minnigerode, Correspondent Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle. 1. Abhandlung.
Kiessling, Ueber die Einwirkung künstlich erzeugter Nebel auf directes Sonnenlicht. Vorgelegt von Riecke.

Ueber das Krystallsystem des Leucit und den Einfluß der Wärme auf seine optischen Eigenschaften.

Von

C. Klein.

Unter den Mineralien gibt es nicht viele, welche in gleicher Weise das Interesse der Forscher auf sich gezogen haben, wie der Leucit.

Lassen wir hier Vorkommen und chemische Constitution zunächst unberücksichtigt und beschränken uns auf die krystallographisch-optischen Eigenschaften unseres Minerals, so galt seit den Tagen Haüy's, der den Leucit als regulär krystallisirend und einfach brechend befand [1]), bis in die siebenziger Jahre das Krystallsystem wie oben angegeben und von der häufigsten Form, dem Ikositetraëder 2O2 (211), wurde als dem Leucitoëder, von allen anderen *mOm* (*hll*) aber als den sog. Leucitoiden gesprochen.

Und doch hatte schon lange vor G. vom Rath's Entdeckung

---

1) Haüy. Traité de Minéralogie 1801. II. pag. 403, pag. 409.

der quadratischen Natur der Leucitkrystalle [1]) ein Anderer dargethan daß der Leucit nicht einfach brechend, sondern zweiaxig doppelbrechend sei.

Da die kleine hierauf bezügliche Notiz Brewster's in der Literatur in Vergessenheit gerathen zu sein scheint, so erlaube ich mir, sie aus Edinburgh Philos. Journal Vol. V. April — October 1821. p. 218 wörtlich zu reproduciren:

»Optical Properties of Leucite or Amphigene.«

»Dr. Brewster has also succeeded in separating the two images formed by the double refraction of Amphigene, and has ascertained that it has two axes. It cannot, therefore, have the cube with either one or three axes as its primitive form. The circumstance of Haüy, having assigned to it two primitive forms viz. the cube and the rhomboidal dodecahedron, points it out as a remarkable mineral. It must now take its place under the Prismatic system of Mohs.«

Die berühmte Arbeit von Biot [2]) führt den Leucit als typisches Beispiel eines Minerals mit Lamellarpolarisation auf, ihr folgt Des-Cloizeaux in seiner Mineralogie [3]) und, wenn er dann auch in seinen Darlegungen vom Jahre 1868 [4]) Beobachtungen, gewonnen an Leuciten von Frascati, mittheilt, die geeignet sind, eine zweiaxige Doppelbrechung der Substanz hervortreten zu lassen, so werden doch noch die sämmtlichen optischen Erscheinungen als Ausfluß der Lamellarpolarisation angesehen und das System des Leucit nicht geändert.

In der Arbeit von Zirkel (Zeitschr. der deutschen geol. Gesellsch. XX. 1868) wird dagegen der Biot'sche Standpunkt schon verlassen und der Versuch gemacht, die Erscheinungen durch die Annahme eines doppelbrechenden Natronleucits, dem regulären Kalileucit in Lamellenform eingeschaltet, zu erklären.

Es war aber erst G. vom Rath vorbehalten 1872 zu zeigen, daß die geometrischen Eigenschaften des Leucit: Winkelverhältnisse und Zwillingsbildungen, nicht mit den Erfordernissen eines vollflächigen regulären Systems vereinbar seien. Er verwies danach den Leucit in das quadratische System.

Die Beobachtungen G. vom Rath's und die daraus gezogenen Schlüsse fanden von Seiten der Forscher fast einstimmig Annahme.

Die Einwände von Hirschwald [5]) dagegen, der das Mineral

---

1) G. vom Rath. Ueber das Krystallsystem des Leucits. Monatsber. der Berliner Academie. Sitzung vom 1. Aug. 1872.

2) Biot. Mémoire sur la polarisation lamellaire 1841 p. 669—670.

3) Des-Cloizeaux. Manuel de Minéralogie 1862. I, p. 290.

4) Des-Cloizeaux. Nouvelles recherches etc. p. 513—515.

5) Zur Kritik des Leucitsystems. Tschermak's Mineralog. Mitth. 1857 p. 227.

als eine reguläre Krystallspecies mit polysymmetrischer Entwickelung im Sinne des quadratischen Systems ansehen und damit der Scacchi'schen Lehre von der »Polysymmetrie«[1]) eine neue Stütze geben wollte, stießen auf Widerspruch.

Baumhauer[2]) erbrachte durch die Methode der Aetzfiguren eine Bestätigung der vom Rath'schen Ansicht und vertheidigte dieselbe[3]) gegen neue Einwände von Hirschwald[4]), gegen welch' letztere auch Groth im Sinne von vom Rath und Baumhauer sich aussprach[5]).

Trotz all' dieser Bestrebungen, die vom Rath'sche Ansicht zu stützen und als die richtige hinzustellen, läßt es sich doch nicht verkennen, daß manche Verhältnisse noch nähere Untersuchungen erwünscht erscheinen lassen mußten.

Ich rechne hierher die Erklärung der schwankenden Winkelverhältnisse, die zwar vom regulären Systeme sich sämmtlich entfernen, aber unter sich doch öfters sehr bedeutende Verschiedenheiten aufweisen, die Ausführung einer genauen optischen Untersuchung, auch mit Rücksicht auf den Verlauf und die Lage der Zwillingslamellen u.s.w.

Daß der Leucit manches nicht ohne Weiteres unter einem Gesichtspunkt zusammen zu fassende noch zeigen würde, war vorauszusehen, und die Untersuchungen der folgenden Jahre haben dieses bestätigt.

So schließt sich Des-Cloizeaux 1874[6]) der vom Rath'schen Ansicht im Allgemeinen an und findet u. A. die Doppelbrechung der Leucite von Frascati einaxig und positiv.

Tschermak studirt 1876[7]) den Leucit von Acqua Acetosa bei Rom und bestimmt den Charakter der einaxigen Doppelbrechung als negativ.

Mallard behandelt in demselben Jahre ebenfalls unser Mineral[8]). Nach den goniometrischen Untersuchungen der Krystalle von

1) Vergleiche darüber auch G. vom Rath. Poggend. Annalen Ergänzungsband VI. p. 224 u. f.; ebenso finden sich daselbst die Ansichten Hessenberg's über das Leucitsystem mitgetheilt.

2) Baumhauer. Zeitschr. f. Krystall. I. 1877. p. 257—278.

3) Baumhauer. Tscherm. Min. Mitth. N. F. I. 1878. p. 287—288.

4) Hirschwald. Unsere derzeitige Kenntniß des Leucitsystems. Tscherm. Min. Mitth. N. F. I. 1878. p. 85—100.

5) Groth. Referat über die Arb. von Hirschwald: Ueber unsere derzeitige Kenntniss u. s. w. Zeitschr. f. Kryst. V. 1881. p. 264—266.

6) Des-Cloizeaux. Manuel de Minéralogie. II. 1874. p. XXXII—XXXIV.

7) Tschermak. Min. u. petrogr. Mittheilungen. 1876. p. 66 u. 67.

8) Mallard. Explic. des phén. opt. anom. etc. Sep. Abz. 1877. p. 24—39.

Frascati neigt er sich der Annahme des rhombischen Systems zu, die optische Untersuchung erheischt dagegen das monokline, was schließlich als geltend angenommen wird.

Weisbach erklärt sich 1880 [1]) auf Grund von Messungen, die Treptow an einem Leucitkrystalle vom Albaner Gebirge vorgenommen hatte, für das rhombische System dieses Krystalls, wobei eine gewisse Tendenz zu monokliner Bildungsweise nicht unerwähnt bleibt. Das rhombische Axenverhältniß wird zu

$$\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}96497 : 1 : 0{,}49365$$

angegeben.

In neuester Zeit bringt endlich G. vom Rath [2]), neben Mittheilungen über seinem früheren Axenverhältnisse entsprechende Krystalle, auch solche über ungewöhnliche Leucite. Von denselben bietet einer die wie regulär erscheinende [3]) quadratische Combination $P(111)$ $2P\infty(201)$, $4P2(421)$, $\infty P(110)$, $\infty P\infty(100)$, $0P(001)$ dar.

Die Winkelverhältnisse der letzterwähnten Krystalle entsprechen nicht dem 1872 abgeleiteten Axenverhältniß:

$$a : c = 1 : 0{,}52637$$

sondern erfordern $a : c = 1 : 0{,}5137.$

Es findet also eine beträchtliche Annäherung an das Erforderniß des regulären Systems 1 : 0,5 statt.

Faßt man alle diese Thatsachen zusammen: den constanten regulären Formentypus der Krystalle (der schon bei G. vom Rath gebührende Beachtung findet), das Schwanken der Winkelwerthe der Gestalten, die Deutungen in optischer Hinsicht bezüglich des Systems, den wechselnden Befund des Charakters der Doppelbrechung u. s. f., so kann Niemand leugnen, daß alle diese Verhältnisse, so vollkommen dieselben auch jeweils dem einzelnen Thatbestand entsprechen mögen, doch nicht geeignet sind, den Charakter des Systems beim Leucit als einen normalen und ungestörten erscheinen zu lassen.

Ich habe mir deshalb schon lange Mühe gegeben, dem Räthsel, was hier vorliegt, auf die Spur zu kommen und viele Arbeit, wie es schien nutzlos, angewandt.

Schon bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über den Einfluß der Wärme auf die optischen Eigenschaften des Boracit [4]) machte

---

1) A. Weisbach. Zur Kenntniß des Leucits. N. Jahrb. f. Mineralogie. 1880. I. p. 143—150.

2) G. vom Rath. Sitzungsber. d. niederrh. Gesellsch. f. Natur- u. Heilkunde. 4. Juni 1888.

3) Der Krystall sieht wie eine Combination von $\infty O(110)$, $2O2(211)$, $\infty O\infty(100)$ aus.

4) Nachrichten v. d. k. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. 1881. p. 77.

ich die Bemerkung, daß dort durch Erwärmen Lamellen entstehen, den Zwillingslamellen im Leucit vergleichbar; es wollte mir aber bei diesem Minerale damals und auch später nie gelingen, die betreffenden Lamellen bei Erhöhung der Temperatur zum Verschwinden zu bringen.

Mit den damaligen unvollkommenen Mitteln konnte ich auch, wenn ich einen Schliff durchbrach, die eine Hälfte stark erhitzte und dann an die andere, nicht erhitzte anlegte, keine Veränderung der über die Bruchstelle fortziehenden Lamellen auffinden. Ich theilte dieses negative Resultat seiner Zeit mehreren befreundeten Fachgenossen mit.

In meiner Arbeit über den Granat[1]) habe ich dann bei Gelegenheit der Beschreibung der optischen Structur der Ikositetraëder von Wilui Gelegenheit genommen darauf hinzuweisen, daß die Leucite z. Th. einen ähnlichen Aufbau zeigen, wie jene Granate.

Mallard's schöne Entdeckung der Dimorphie der Boracitsubstanz[2]) ließ mich darauf, wie sie auch Andere zu ähnlichen Versuchen veranlaßt hat, daran denken, die unterbrochenen Arbeiten wieder aufzunehmen.

Eine Frucht der nach jener Richtung entfalteten Thätigkeit ist, wie bekannt, der durch Merian[3]) erbrachte Nachweis, daß der Tridymit, der äußerlich hexagonal und nach optischem Befund bei gewöhnlicher Temperatur triklin ist, dieses Verhalten bei höherer Temperatur verliert und der Form entsprechende Eigenschaften in optischer Beziehung zeigt. — Merian schließt mit Recht daraus, daß bei der Bildung Form und optisches Verhalten im Einklang standen.

Den Leucit untersuchte genannter Forscher ohne eine Veränderung seiner optischen Eigenschaften wahrzunehmen.

Ich habe zu der Untersuchung des Leucit und anderer Mineralien in hoher Temperatur mir ein Instrument bauen lassen, was in seiner Disposition der Einrichtung, die H. Merian anwandte, ähnlich ist.

Auf einer Platte ist auf einem festen verticalen Ständer der Tubus eines Mikroskops so befestigt, daß er senkrecht zur Axe des Ständers, also in wagrechter Richtung, angebracht ist. In der Richtung der Ständeraxe ist er ferner durch ein Gewinde hebbar und in einer dazu normalen Lage (also horizontal) durch eine andere Schraube verstellbar eingerichtet. Gegen diesen Tubus kann in einer Führung ein anderer Ständer, der den unteren Theil eines Mikroskops: Spiegel, Nicol und Condensorlinse (mit großem Focalabstand) trägt, bewegt werden.

1) C. Klein. Optische Studien am Granat. Nachrichten v. d. k. Gesellsch. der Wissenschaften 1882, p. 550.

2) Mallard. Bulletin de la Soc. Min. de France V, 1882, p. 218—219.

3) Merian. N. Jahrb. f. Mineralogie I. 1884. p. 193—195.

In einer zweiten Führung, parallel der ersten und seitlich derselben auf der Platte befestigt, läßt sich eine verstellbare und mit Platinspitzen versehene Zange, in welche die zu untersuchende Krystallplatte eingeklemmt und vor das Objectiv des Mikroskops gebracht werden kann, verschieben.

Die Platte befindet sich in gehörigen Abständen zwischen der Condensorlinse des Polarisators und der Frontlinse des schwachen Objectivs des Mikroskops, das selbst am hinteren Ende ein Gypsblättchen und einen Nicol trägt. Eine passend angebrachte Blende hält störendes Seitenlicht ab.

Zur Untersuchung kamen zunächst Platten von Leucitkrystallen, die den vulkanischen Aschen von Frascati bei Rom entstammten. Sie waren dünn geschliffen nach Ebenen des Würfels, Oktaëders, Dodekaëders und Ikositetraëders alter Auffassung.

Als diese Platten der Reihe nach an die Zange genommen und der Temperatur der Flamme eines Bunsen'schen Brenners bis zu beginnender Rothgluth ihrer Ränder ausgesetzt wurden, zeigten sie ausnahmslos das vom Boracit her bekannte Phänomen.

Die Dunkelheit [1]) lief wie ein sich ausbreitender Tintenfleck über die Platte hinüber und alle Theile derselben: Zwillingslamellen, Zwillingskeile u. s. w. löschten aus. So lange die Temperatur anhielt, blieb die Dunkelheit bestehen [2]). Wurde die Flamme entfernt, so verlor sich die Dunkelheit rasch wieder, der dunkele Vorhang der vorher die Platte überzogen, rollte im entgegengesetzten Sinne nach der wärmsten Stelle zu zurück, und die Erscheinung, welche die Platte vor dem Erwärmen gezeigt hatte, kehrte, wenn nicht sehr anhaltend erhitzt worden war, meist unverändert wieder. Manch' Mal, besonders bei dickeren Schliffen, erforderte es nach der Aufhellung der Platte längere Zeit, bis der alte Zustand der Lamellenvertheilung wieder annähernd wie früher erreicht worden war. Wurden nicht zu dünne Schliffe anhaltend erhitzt, so beobachtete man nach dem Erkalten geänderte Felder- und Lamellenvertheilung gegen früher und Aenderung in der Stärke der Doppelbrechung der Lamellen.

Die Haupterscheinung des Verdunkelns und Aufhellens ist mit demselben Schliffe beliebig oft zu wiederholen, so lange, bis das gänzliche Zerspringen desselben der Beobachtung eine Grenze setzt. Bei

1) Wurde ein Gypsblättchen vom Roth I. Ordnung eingeschaltet, so trat an Stelle der Dunkelheit dessen Farbenton auf. Die Anwendung eines Gypsblättchens empfiehlt sich bei Platten von schwacher Doppelbrechung sehr.

2) Dieselbe kam natürlich nur zwischen gekreuzten Nicols zu Stande; wurde während des Erhitzens der Analysator entfernt, so war der Schliff vollkommen transparent.

nicht zu grellem Anwärmen halten aber die Schliffe die Versuche sehr lange aus.

Wie oben mitgetheilt waren es Schliffe verschiedener Orientirung, aus Leuciten von Frascati genommen, die die erwähnten Erscheinungen zeigten. Man darf daher es als durch die Beobachtung erwiesen ansehen, daß genanntes Mineral beim Erwärmen isotrop wird.

Indem ich mir vorbehalte Schliffe anderer Leucitvorkommen auf diese Eigenschaft ebenfalls eingehend zu prüfen, bemerke ich nur daß beliebig orientirte Schliffe aus eingewachsenen Vesuv-Leuciten und aus losen Krystallen ebendaher vom »Leucitregen des Jahres 1855« die oben beschriebenen Erscheinungen auf's Schönste zeigten.

Mit dem Isotropwerden der Leucitsubstanz in höherer Temperatur ist aber bei diesem Mineral, wie beim Boracit, der Beweis seiner Dimorphie erbracht und es fragt sich nun, wie haben wir den Zustand aufzufassen, in welchem sich uns der Leucit bei gewöhnlicher Temperatur darbietet?

Machen wir mit Tschermak[1]) und anderen Forschern die Annahme, der Leucit zeige sein bei gewöhnlicher Temperatur erkanntes Verhalten in krystallographisch-optischer Hinsicht als Folge einer ursprünglichen mimetischen Anlage, so ist die bei höherer Temperatur beobachtete Isotropie mit theoretischen Erwägungen im Einklang: es wird unter diesen Umständen das Eintreten einer höheren Symmetrie erwartet[2]). Es fragt sich aber, ob man berechtigt ist eine solche Grundannahme zu machen und da scheint mir die eben erkannte Thatsache, des Isotropwerdens der Substanz bei höherer Temperatur, damit in einem nicht vereinbaren Widerspruch zu stehen.

Wenn es auch mit den vorhandenen Hülfsmitteln mir zur Zeit noch nicht gelungen ist, die Temperatur zu bestimmen, bei welcher der Leucit isotrop wird, so kann doch soviel ausgesagt werden, daß sie noch erheblich unter der heißesten Temperatur der Flamme des Bunsen'schen Brenners (ca. 2300° C.) liegt.

Die Ausscheidung der Leucite aus Schmelzfluß geht aber nach Fouqué und Michel-Lévy, wenn Leucit allein, oder ein Gemenge seiner Bestandtheile mit dem anderer Mineralien geschmolzen wird[3]) bei solchen Temperaturen vor sich, daß mit Sicherheit behauptet werden kann, dieselben lägen beträchtlich über der Temperatur, bei welcher der Leucit durch künstliche Erwärmung isotrop wird.

Da nun der Leucit bei seiner künstlichen Darstellung und wohl

---

1) Tschermak. Lehrbuch der Mineralogie 1884.

2) Fletcher. Zeitschr. f. Krystallogr. 1880, IV, p. 345.

3) Fouqué et Michel-Lévy. Synthèse des Minéraux et des Roches. 1882. p. 65—67, 153—154.

auch natürlichem Entstehen bei so hohen Temperaturen sich bildet, daß er dann als optisch isotrop betrachtet werden muß, so folgt daraus, daß er im Momente seines Festwerdens als regulärer Körper in Erscheinung tritt.

Danach wirkt Abkühlung auf ihn ein und es ändert sich seine Molecularanordnung [1]). Der Körper ist aber schon in soweit gefestigt, daß der neue Zustand, dem jene geometrisch und physikalisch zustrebt, nicht immer ganz vollständig erreicht werden kann.

Durch etwa hierbei noch in Betracht kommende zufällige secundäre Einflüsse und Störungen wäre es denkbar, im Verein mit jener Aenderung der Molecularanordnung, die schwankenden Verhältnisse in geometrischer und optischer Hinsicht, die ja der Leucit zeigt, zu erklären.

Freilich setzt dies voraus, daß das in Rede stehende Mineral bei höheren Temperaturen einen Zustand des theilweisen Erweichens eingehe, auf daß sich die genannten Veränderungen vollziehen können. Dieser Zustand wird nicht von allen Forschern angenommen, aber Mallard, der ihn für die Krystalle am entschiedensten geleugnet hat [2]), ist durch seine eigenen Untersuchungen dahin geführt worden, ihn am Salpeter wahrzunehmen [3]). Man darf daher wohl annehmen, daß von dieser Seite kein Widerspruch mehr dagegen erfolgt.

Zieht man endlich die Erfahrungen zu Rathe, welche am Granat und Boracit bezüglich der Feldertheilung und an letzterem Mineral rücksichtlich der Zwillingslamellenbildung gesammelt werden konnten, so erscheint es sehr wahrscheinlich, daß ein größerer Theil der Leucite nach ihrem Entstehen noch mehrfachen Schwankungen der Temperatur ausgesetzt war. Dies würde namentlich für diejenigen gelten, welche sehr stark mit Zwillingslamellen, besonders in ihren äußeren Schichten, durchsetzt sind. — Die Erfahrung lehrt ja auch, daß fertige Leucite in Laven schwimmend angetroffen werden.

Abgesehen aber von allen Folgerungen, die man, wie vorstehend aus den beschriebenen Versuchen ziehen kann und die sich leicht noch ausdehnen ließen, aber selbstverständlich alle, soweit sie neue Behauptungen enthalten, noch durch das Experiment zu prüfen sind, hebe ich schließlich nochmals die feststehende Thatsache hervor, daß der Leucit in höheren Temperaturen optisch isotrop wird.

---

1) Innerhalb des neu zu Stande gekommenen Systems treten dann die Zwillingsbildungen auf.

2) Mallard. Traité de Cristallographie II, 1884, p. 348.

3) Mallard. Bulletin de la Soc. Min. de France V, 1882, p. 228.

Theorie der optischen Eigenschaften der Metalle.

Von

W. Voigt.

In meiner »Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Media [1])« habe ich die Frage beantwortet, was für Kräfte man zwischen der ponderabeln Materie und dem Lichtäther wirkend annehmen kann ohne gegen das Princip der Erhaltung der Energie zu verstoßen, und habe gezeigt, daß die Einführung der so gefundenen Kräfte in die Gleichungen der Elasticität Bewegungsgesetze des Lichtäthers ergiebt, welche man als eine befriedigende Darstellung der optischen Erscheinungen in sehr durchsichtigen Medien ansehen kann.

Es handelte sich dabei um Folgendes. Bezeichnet man die Componenten der Verschiebungen eines an der Stelle x, y, z befindlichen Elementes Aether resp. Materie mit u, v, w und U, V, W, die Componenten der innern elastischen Kräfte des Aethers resp. der Materie mit X, Y, Z und $\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}$, die Componenten der Wechselwirkungen mit $(A), (B), (C)$ und $(\mathrm{A}), (\mathrm{B}), (\Gamma)$, so galten je 3 Hauptgleichungen der Form

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X + (A) \text{ und } \mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Xi + (\mathrm{A}) \quad | \qquad \text{(a.)}$$

Führt man die (für das Schlußresultat übrigens gleichgültige) Annahme ein, daß die Wirkung auf den Aether eines Volumenelementes als nur von der Materie **desselben** Elementes herrührend betrachtet werden kann, so wird

$$(A) = -(\mathrm{A}), \quad (B) = -(\mathrm{B}), \; (C) = -(\Gamma).$$

Die Componenten $(A), (B), (C)$ waren dann in je zwei Theile zerlegt, von denen der erste nur von der Bewegung des Massenelements als eines Ganzen, der letztere von seiner Deformation herrührte, so daß sich schreiben ließ:

$$\left.\begin{aligned}(A) &= -(\mathrm{A}) = A - \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\\ (B) &= -(\mathrm{B}) = B - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\\ (C) &= -(\Gamma) = C - \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right).\end{aligned}\right| \qquad \text{(b.)}$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 873, 1883.

Setzte man noch an der Oberfläche eines homogenen Körpers

$$\bar{A}_n = \bar{A}_x \cos(n,x) + \bar{A}_y \cos(n,y) + \bar{A}_z \cos(n,z)$$

u. s. f., worin n die Richtung der äußern Normale bedeutet, so war für ein System beliebiger Körper und den in ihnen enthaltenen Aether, wenn man die Potentiale der Componenten X, Y, Z und Ξ, H, Z mit F und Φ bezeichnet, die Arbeit aller innern Kräfte gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathrm{S}}_h \int dr_h \Big[\Big(\frac{d\Phi}{dt}+\frac{dF}{dt}\Big)+\Big(A\frac{\partial(u-U)}{\partial t}+B\frac{\partial(v-V)}{\partial t}+C\frac{\partial(w-W)}{\partial t}\Big)\\
&\quad+\Big(A_x\frac{\partial^2(u-U)}{\partial x\,\partial t}+A_y\frac{\partial^2(u-U)}{\partial y\,\partial t}+A_z\frac{\partial^2(u-U)}{\partial z\,\partial t}\\
&\quad+B_x\frac{\partial^2(v-V)}{\partial x\,\partial t}+B_y\frac{\partial^2(v-V)}{\partial y\,\partial t}+B_z\frac{\partial^2(v-V)}{\partial z\,\partial t}\\
&\quad+C_x\frac{\partial^2(w-W)}{\partial x\,\partial t}+C_y\frac{\partial^2(w-W)}{\partial y\,\partial t}+C_z\frac{\partial^2(w-W)}{\partial z\,\partial t}\Big)\Big]-\\
&\mathop{\mathrm{S}}_{hk}\int do_{hk}\Big[\Big((\bar{X}_n+\bar{A}_n)\frac{\partial(\bar{u}-\bar{U})}{\partial t}+(\bar{Y}_n+\bar{B}_n)\frac{\partial(\bar{v}-\bar{V})}{\partial t}+(\bar{Z}_n+\bar{C}_n)\frac{\partial(\bar{w}-\bar{W})}{\partial t}\Big)_h\\
&\quad+\Big((\bar{X}_n+\bar{A}_n)\frac{\partial(\bar{u}-\bar{U})}{\partial t}+(\bar{Y}_n+\bar{B}_n)\frac{\partial(\bar{v}-\bar{V})}{\partial t}+(\bar{Z}_n+\bar{C}_n)\frac{\partial(\bar{w}-\bar{W})}{\partial t}\Big)_k\Big].
\end{aligned}$$

Hierin sind die Integrale über das Volumen resp. die Oberfläche eines einzelnen Körpers des Systems genommen, die S über alle.

Das Princip der Energie ist erfüllt, wenn dieser Ausdruck die Form eines Differentialquotienten nach der Zeit hat von einer Function, die ausschließlich durch den augenblicklichen Zustand des Mediums bestimmt ist; es ergaben sich vier Functionen für A, B, C und vier für A_x, A_y . . . ., welche hinsichtlich des Raumintegrales dem genügen[1]. Mit ihrer Annahme sind in meiner Theorie verbunden die Hülfshypothesen: 1) daß der Aether als incompressibel, 2) gegenüber allen bekannten ponderabeln Körpern als von verschwindender Dichte und 3) in allen Körpern von identischem Verhalten angesehen werden kann.

Die Gründe für die erste Annahme sind allbekannt; zu der zweiten zwingt der Umstand, daß man ohne ihre Einführung in ponderabeln Körpern durch e i n e einfallende Lichtwelle z w e i fortgepflanzte erhält, deren eine, welche eine Geschwindigkeit von der Ordnung derjenigen des Schalles besitzt, nicht der Beobachtung entspricht. Die dritte Hülfsannahme ist nebensächlich und ohne principielle Bedeutung.

---

1) W. Voigt, l. c. p. 877–882.

Ich habe mich in jener Theorie auf solche Wechselwirkungen beschränkt, welche mit dem Princip der Energie im Einklang sind, (also Absorptionserscheinungen principiell ausgeschlossen) weil andere ihm widersprechende Kräfte einen Zuwachs der innern Energie der ponderabeln Masse geben würden, der zu einer Beschleunigung der innern und äußern Bewegung der Moleküle, d. h. der Wärmebewegung, verwandt werden müßte. Da wir aber bisher noch keine zuverlässig begründeten Elasticitätsgleichungen kennen, welche uns Wärmebewegungen liefern, so konnte ich natürlich nicht daran denken, meinerseits solche aufzustellen, welche die Veränderung der Wärmebewegung durch die verlorene Energie einer Lichtwelle darstellen.

Der Ausschließung aller Absorptionsvorgänge lag dabei die Ansicht zum Grunde, daß bei ihnen allen die Art der Bewegung der ponderabeln Molecüle die Erscheinung wesentlich bestimmten, (wie dies bei den meisten von ihnen, z. B. anomaler Dispersion, Fluorescenz und Phosphorescenz wohl sicher stattfindet). Ich glaube mich aber überzeugt zu haben, daß dies nicht allgemein gilt, daß sich vielmehr ein kleiner Kreis ohne Einführung einer prekären Annahme über die Bewegung der ponderabeln Molecüle sondern unter der Voraussetzung, daß dieselbe verschwindend klein sei, befriedigend erklären läßt.

Ich stelle mir die Frage:

Welcherlei Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie ergeben unter allen Umständen einen *Verlust* an Energie?

Setzt man, wie oben erörtert, die Verschiebungen der ponderabeln Theile, nämlich $U\,V\,W$ verschwindend klein, so ist die Bedingung dafür, daß das Verlangte stattfindet, die, daß die beiden Functionen:

$$\Psi_1 = A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial v}{\partial t} + C\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2 = {} & A_x\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + A_y\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y} + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial z}\\ & + B_x\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x} + B_y\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial y} + B_z\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z}\\ & + C_x\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x} + C_y\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial y} + C_z\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial z}\end{aligned}$$

stets negativ sind, d. h. eine negative Summe von quadratischen Gliedern darstellen; denn nur dann ist die von außen zugeführte Arbeit stets größer als der Zuwachs der in der Bewegung des Ae-

thers und in dem Potential der innern Kräfte enthaltenen Energie, wie es dem Vorgang der Absorption (im Gegensatz zu dem der Emission) entspricht.

Da nun die Componenten lineäre Functionen der Verrückungen und ihrer Differentialquotienten sein müssen, weil sonst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Widerspruch mit der Erfahrung mit der Intensität des Lichtes variiren würde, so ist es leicht, Werthe für dieselben zu finden welche der obigen Forderung genügen, denn die A, B, C können nur $\partial u/\partial t$, $\partial x/\partial t$, $\partial w/\partial t$, die A_x, B_x ... nur $\partial^2 u/\partial t\,\partial x$, $\partial^2 v/\partial t\,\partial x$ . . . enthalten.

Ich beschränke mich auf unkrystallische Medien; dann dürfen die Functionen Ψ_1 und Ψ_2 nach ihrer Bedeutung als die stattfindenden Energieverluste ihre Form bei Coordinatentransformationen nicht ändern. Hieraus folgt sogleich:

$$\Psi_1 = -b\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right)$$

also:

$$1. \quad \left| \quad A = -b\frac{\partial u}{\partial t}, \quad B = -b\frac{\partial v}{\partial t}, \quad C = -b\frac{\partial w}{\partial t}, \right.$$

denn die Linear-Geschwindigkeit im Quadrat ist der einzige Ausdruck zweiten Grades in $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$, $\partial w/\partial t$, welcher die verlangte Eigenschaft hat.

Wegen der analogen Eigenschaft der Drehungs- und Dilatations-Geschwindigkeit im Quadrat findet sich ebenso:

$$\Psi_2 = -c'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]^2$$
$$-c\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)^2\right],$$

also, wenn man die Annahme der Incompressibilität des Aethers benutzt, über die schon oben gesprochen ist:

$$2. \left| \begin{array}{lll} A_x = 0, & A_y = -c\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), & A_z = -c\dfrac{\partial t}{\partial}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ B_x = -c\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), & B_y = 0, & B_z = -c\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ C_x = -c\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), & C_y = -c\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), & C_z = 0. \end{array} \right.$$

Führt man diese Kräfte (1) und (2) neben denjenigen, welche sich aus dem Princip der Energie für durchsichtige unkrystallinische

Medien ergeben haben [1]) in den Hauptgleichungen (a) ein, so gelangt man zu 3 Formeln von der Gestalt:

$$(m+r_1)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (e+a_1)\Delta^2 u + a_1'\Delta^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - n_1 u - b\frac{\partial u}{\partial t} + c\Delta^2\frac{\partial u}{\partial t} \quad \Big| \quad 3.$$

Dieselben sind hinsichtlich der Absorptionskräfte specieller, als die von Herrn Wernicke [2]) behandelten, aber doch das Allgemeinste, was man unter der Annahme, daß stets ein Energieverlust beim Fortpflanzen einer beliebigen Bewegung im Innern eines Mediums stattfindet, erhält; die von Herrn Wernicke eingeführten allgemeineren Ausdrücke würden unter Umständen eine Energievergrößerung ergeben.

Für eine parallel der Z-Axe sich fortpflanzende ebene Welle gilt, wenn man in derselben eine periodische Bewegung, also

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\tau^2}u$$

annimmt und setzt:

$$M_1 = m + r_1 - n_1\tau^2, \qquad A_1 = a_1 + e - \frac{a_1'}{\tau^2},$$

die Gleichung:

$$M_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial z^2}. \quad \Big| \quad 4.$$

Setzt man hierin:

$$u = N_1 e^{-\frac{\varkappa z}{\tau\omega_1}}\sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega_1}\right), \quad \Big| \quad 5a$$

wo $2\pi\tau = T$ d. h. gleich der Schwingungsdauer ist, so zerfällt sie in folgende zwei:

$$\left.\begin{aligned} M_1\omega_1^2 &= A_1(1-\varkappa^2) + 2\varkappa c_1 \\ b_1\omega_1^2 &= A_1 2\varkappa - c_1(1-\varkappa^2) \end{aligned}\right| \quad 5b$$

worin kurz gesetzt ist [3]):

$$\frac{c}{\tau} = c_1, \qquad b\tau = b_1.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19 p. 884, 1883.

2) W. Wernicke, Pogg. Ann. 159 p. 225, 1876.

3) In diesen Gleichungen sind bereits die Indices $_1$ an den betreffenden Größen eingeführt, um sie von den auf ein durchsichtiges Medium bezüglichen, welche später vorkommen werden, zu unterscheiden.

Die zweite Gleichung (5b) wird, wegen des Werthes der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω_1 auch:

$$5c.\quad 0 = (1-\varkappa^2)(M_1 c_1 + A_1 b_1) - 2\varkappa(A_1 M_1 - b_1 c_1),$$

aus ihr folgt, da $\varkappa > 0$ sein soll:

$$\varkappa = \frac{1}{M_1 c_1 + A_1 b_1}\left[\sqrt{(M_1 c_1 + A_1 b_1)^2 + (M_1 A_1 - b_1 c_1)^2} - (M_1 A_1 - b_1 c_1)\right].$$

Dies wäre in (5b) einzusetzen um ω_1^2 zu bestimmen; das Resultat ist sehr complicirt. In jedem Falle bemerkt man, daß, wenn b_1 und c_1 klein neben M_1 und A_1 sind, $\varkappa$ von der Ordnung b_1/M_1 und c_1/A_1 und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erst in Gliedern zweiter Ordnung von ihnen abhängig wird.

Von Interesse ist der Specialfall $b = 0$, welcher ergiebt:

$$5d.\quad \begin{aligned} M_1 \omega_1^2 &= A_1(1-\varkappa^2) + 2\varkappa c_1 \\ 0 &= c_1(1-\varkappa^2) + 2\varkappa A_1. \end{aligned}$$

Diese Formeln haben aber, wie wir sehen werden, keine allgemeine Bedeutung.

Wir nehmen als Vorbereitung zum Problem der Reflexion und Brechung an der Grenze des wie angenommen absorbirenden Mediums die Aufgabe vor:

Es sei in dem absorbirenden Medium die XY-Ebene künstlich in eine Bewegung versetzt, wie sie gegeben ist durch die Werthe der Verschiebungscomponenten:

$$6.\quad \begin{aligned} (u)_{z=0} &= \mathrm{A} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x}{\omega} + \vartheta_x\right) \\ (v)_{z=0} &= \mathrm{B} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x}{\omega} + \vartheta_y\right) \\ (w)_{z=0} &= \Gamma \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x}{\omega} + \vartheta_z\right) \end{aligned}$$

d. h. eine Bewegung, die sich ebenso verhält, als wäre die XY-Ebene die Begrenzung des absorbirenden Mediums und fiele in der XZ-Ebene eine Welle auf dieselbe.

Dann ist für eine jede der drei Verschiebungscomponenten, z. B. für u, die Hauptgleichung gültig:

$$(m + r_1)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a_1 + e)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + a_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - n_1 u$$
$$- b\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$



oder einfacher, indem man entsprechend der periodischen Bewegung des Lichtes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\tau^2} u$$

und, wie oben,

$$(m + r_1 - n_1 \tau^2) = M_1, \qquad a_1 + e - \frac{a_1'}{\tau^2} = A_1$$

einführt:

$$M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - b \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \qquad 7.$$

Für die Seite der positiven z wird diese Gleichung in Uebereinstimmung mit der Bedingung (6) integrirt durch [1])

$$u = A e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau \omega_1}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega} + \vartheta_x \right) \qquad 8a.$$

wenn gilt $b\tau = b_1$, $c/\tau = c_1$ und:

$$\begin{aligned} M_1 \omega_1^2 &= A_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2) + 2\beta_1 \gamma_1 c_1 \\ b_1 \omega_1^2 &= 2A_1 \beta_1 \gamma_1 - c_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2). \end{aligned} \qquad 8b.$$

Hierbei ist zu bedenken, daß α_1/ω_1 eine gegebene Größe ist und β_1/ω_1 und γ_1/ω_1 die beiden verfügbaren sind. Da diese drei Größen aber durch vier ausgedrückt sind (α_1, β_1, γ_1, ω_1), so kann man zwischen α_1, β_1, γ_1 eine beliebige Relation, welche nur keine willkürliche Annahme über die Verhältnisse α_1/ω_1, β_1/ω_1, γ_1/ω_1 enthalten darf, einführen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Man erhält aus (8a) eine Form, die unmittelbar α_1 und γ_1 als Richtungscosinus der fortgepflanzten Welle und ω_1 als ihre Geschwindigkeit erscheinen läßt, wenn man $\alpha_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ setzt [2]). Man erhält eine Form, welche den bei der totalen Reflexion in dem optisch dünneren Medium geltenden Integralen sehr ähnlich ist, wenn man $\beta_1^2 - \alpha_1^2 = 1$ nimmt. Bei diesen beiden Verfügungen wird ω_1 von α_1 abhängig. Dies findet nicht statt, wenn man $\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \pm 1$ setzt.

In den beiden ersten Fällen erhält man:

$$\omega_1^2 = 2\beta_1 \gamma_1 \frac{A_1^2 + c_1^2}{c_1 M_1 + b_1 A_1},$$

1) Dies particuläre Integral findet sich bereits bei Wernicke l. c. p. 224.

2) So verfährt Herr Wernicke l. c. p. 224, schließt daher also von vorn herein Werthe $\alpha_1 > 1$ aus, auf welche man geführt wird, wenn man denselben Körper in einer Umgebung von immer höherem Brechungscoefficienten betrachtet.

im letzteren:

$$\omega_1^2 = \pm \frac{A_1^2 + c_1^2}{M_1 A_1 - b_1 c_1}.$$

Indessen sind diese Verfügungen nicht so allgemein, daß eine von ihnen alle möglichen Fälle umschlösse, speziell bei verschwindender Absorption sowohl auf die Ausdrücke für gewöhnliche, als für totale Reflexion führte; ich werde daher anders verfahren und über ω_1 festsetzen, daß dies eine Constante sein soll und zwar dieselbe, die oben, neben der Constante $\varkappa$, durch die Gleichungen (5a) gegeben ist.

Zieht man, um ω_1 zu eliminiren, die Gleichungen (8b) von (5b) ab, so erhält man:

$$0 = A_1(1 - \varkappa - \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) + 2c_1(\varkappa - \beta_1\gamma_1)$$
$$0 = 2A_1(\varkappa - \beta_1\gamma_1) - c_1(1 - \varkappa^2 - \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2)$$

woraus sogleich folgt:

$$9. \quad \left| \begin{aligned} 1 - \varkappa^2 &= \alpha_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2 \\ \varkappa &= \beta_1\gamma_1. \end{aligned} \right.$$

Durch die letzte Formel kann man aus der vorletzten β_1 eliminiren und erhält so, da $\gamma_1^2 > 0$ sein muß:

$$10a. \quad 2\gamma_1^2 = (1 - \alpha_1^2 - \varkappa^2) + \sqrt{4\varkappa^2 + (1 - \alpha_1^2 - \varkappa^2)^2},$$

was zur Bestimmung von β_1 aus

$$\beta_1 = \frac{\varkappa}{\gamma_1}$$

dienen kann. Man hat auch direct:

$$10b. \quad \Big| \; 2\beta_1^2 = -(1 - \alpha_1^2 - \varkappa^2) + \sqrt{4\varkappa^2 + (1 - \alpha_1^2 - \varkappa^2)^2}.$$

Zu bemerken ist, daß ω_1 nicht für andere Einfallswinkel, als 0°, den physikalischen Sinn der Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat. Wir betrachten ω_1 daher nur als die Constante, welche im Brechungsgesetz $\alpha : \alpha_1 = \omega : \omega_1 = n$ auftritt. Man kann zwar die durch das Integral (8a) dargestellte Bewegung als eine in ebenen Wellen fortschreitende ansehen, in sofern die Phase in den Ebenen

$$\alpha_1 x + \gamma_1 z = \text{Const.}$$

constant ist; aber einmal sind in jeder dieser Ebenen die Intensitäten wechselnd, andererseits sind α_1 und γ_1 nicht die Richtungscosinus der Wellennormale, sondern $\alpha_1/\sqrt{\alpha_1^2+\gamma_1^2}$ und $\gamma_1/\sqrt{\alpha_1^2+\gamma_1^2}$, endlich ist ω_1 nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit,

sondern $\omega_1/\sqrt{\alpha_1^2+\gamma_1^2}$. Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit würde also nicht constant sein, sondern von der Fortpflanzungsrichtung abhängen, — ein merkwürdiges Resultat, das indessen schon von mehreren Physikern supponirt worden ist [1]).

Auch der Coefficient der Absorption, d. h. der von z im Exponenten des Ausdrucks (8a), nämlich $\beta_1/\tau\omega_1$ findet sich von der Fortpflanzungsrichtung der Wellen abhängig. Dieses ist einleuchtend, denn augenscheinlich muß in einer bestimmten Tiefe z im absorbirenden Medium die durch die gleiche in dasselbe eintretende Bewegung erregte Intensität eine verschiedene sein, jenachdem die Bewegung auf einem verschiedenen Wege s von der XY-Ebene nach jener Stelle hin fortgepflanzt ist.

Betrachtet man $\gamma_1/\sqrt{\alpha_1^2+\gamma_1^2}$ als den Cosinus der fortgepflanzten Wellennormale gegen die z-Axe, so wäre nach der Anschauung, daß die Bewegung sich parallel der Wellennormale fortpflanzt, $s = z.\sqrt{\alpha_1^2+\gamma_1^2}/\gamma_1$ der von der Bewegung bis zur Tiefe z zurückgelegte Weg. Der in (8a) vorkommende Exponent ist nach (9) gleich $z\varkappa/\gamma_1\omega_1\tau$, also nicht mit s proportional, außer wenn $\varkappa$, — das als die eigentliche Constante der Absorption angesehen werden kann, — klein gegen 1 ist; in diesem Falle ist nämlich $\sqrt{\alpha_1^2+\gamma_1^2}$ nach (10a) merklich gleich 1.

Nunmehr kann das Problem des Ueberganges in ein absorbirendes Medium in Angriff genommen werden.

Es sei die XY-Ebene die Grenze eines vollkommen durchsichtigen (0) und eines absorbirenden Mediums (1), die Z-Axe in letzteres hineingerichtet, die XZ-Ebene die Einfallsebene. Dann sind die Grenzbedingungen für die Verschiebungen:

$$\overline{u} = \overline{u}_1, \quad \overline{v} = \overline{v}_1, \quad M\overline{w} = M_1\overline{w}_1,$$

worin $M = m+r-n\tau^2$, ein gewisses Aggregat der Constanten des obern Mediums und M_1 ein ähnlich gebildetes für das untere ist [2]). Die letzte Gleichung ist nur mit einem gewissen Vorbehalt aufzustellen [3]).

Als Bedingung für die Druckkräfte behalten wir das Kirchhoffsche Princip [4]) bei, indem der Energie-

1) Vergl. z. B. Quincke Pogg. Ann. Bd. 129. p. 188. 1866. Es findet darin eine völlige Analogie mit der totalen Reflexion statt.

2) Für das obere durchsichtige Medium sollen die Buchstaben ohne Index benutzt werden — mit Ausnahme von $\varkappa$ b und c, welche nur für das absorbirende Medium einen Sinn haben.

3) Vergl. W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19 p. 900 u. f. 1883.

4) G. Kirchhoff, Abh. d. Berl. Acad. p. 75. 1876.

Verlust, der durch die Absorptionskräfte in einem unendlich niedrigen Element an der Grenze stattfindet, als mit diesem selbst unendlich klein werdend angesehen werden kann, d. h. (da die Componenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene für sich behandelt werden könnnen) die zwei Formeln:

$$\left[(\bar{X}_s+\bar{A}_s)\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}+(\bar{Z}_s+\bar{C}_s)\overline{\frac{\partial w}{\partial t}}\right]_0=\left[(\bar{X}_s+\bar{A}_s)\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}+(\bar{Z}_s+\bar{C}_s)\overline{\frac{\partial w}{\partial t}}\right]_1$$

$$\left[(\bar{Y}_s+\bar{B}_s)\overline{\frac{\partial v}{\partial t}}\right]_0=\left[(\bar{Y}_s+\bar{B}_s)\overline{\frac{\partial v}{\partial t}}\right]_1.$$

Ich nehme zunächst die Componente senkrecht zur Einfallsebene vor und habe für dieselbe unter Einführung der früheren Werthe für Y_s und B_s und unter der Annahme, daß $u\ v\ w$ periodische Functionen von t sind, die Bedingungen:

$$11. \qquad \bar{v}=\bar{v}_1, \quad A\overline{\frac{\partial v}{\partial z}}=A_1\overline{\frac{\partial v_1}{\partial z}}+c\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial t}}.$$

Hierin setze ich:

$$12. \qquad \begin{aligned} v&=v_e+v_r\\ v_e&=E_s\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\alpha x+\gamma z}{\omega}\right)\\ v_r&=R_s'\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\alpha x-\gamma z}{\omega}\right)+R_s''\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\alpha x-\gamma z}{\omega}\right)\\ v_1&=e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\left[D_s'\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\alpha_1 x+\gamma_1 z}{\omega_1}\right)+D_s''\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\alpha_1 x+\gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right],\end{aligned}$$

worin

$$R_s'=R_s\cos\frac{\vartheta_s}{\tau}$$

$$R_s''=R_s\sin\frac{\vartheta_s}{\tau}$$

und ϑ_s die Beschleunigung der reflectirten Welle ist.

Durch das Einsetzen erhält man:

$$\alpha:\alpha_1=\omega:\omega_1$$

$$E_s+R_s'=D_s'$$

$$R_s''=D_s''$$

$$\frac{A\gamma}{\omega}(E_s-R_s')=\frac{1}{\omega_1}[D_s'(A_1\gamma_1+\beta_1 c_1)+D_s''(A_1\beta_1-\gamma_1 c_1)]$$

$$\frac{A\gamma}{\omega}R_s''=\frac{1}{\omega_1}[D_s'(A_1\beta_1-\gamma_1 c_1)-D_s''(A_1\gamma_1+\beta_1 c_1)]$$

Unter Einführung der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{A_1\gamma_1+\beta_1 c_1}{\gamma_1 M\omega_1^2} \\ \delta_s &= -\frac{A_1\beta_1-\gamma_1 c_1}{\gamma_1 M\omega_1^2} \end{aligned}\right| \qquad 13.$$

werden die letzten zwei Grenzbedingungen, da noch $M\omega^2 = A$ ist:

$$\begin{aligned} \alpha\gamma(E_s-R_s') &= \alpha_1\gamma_1(D_s'\sigma_s-D_s''\delta_s) \\ -\alpha\gamma R_s'' &= \alpha_1\gamma_1(D_s'\delta_s+D_s''\sigma_s). \end{aligned}$$

Hierzu die ersteren: $\qquad$ 14.

$$\begin{aligned} E_s+R_s' &= D_s' \\ R_s'' &= D_s'' \end{aligned}$$ genommen,

giebt die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} N_s R_s' &= E_s[\alpha^2\gamma^2-\alpha_1^2\gamma_1^2(\sigma_s^2+\delta_s^2)] \\ N_s R_s'' &= -E_s 2\alpha\alpha_1\gamma\gamma_1\delta_s \\ N_s D_s' &= E_s 2\alpha\gamma(\alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1\sigma_s) \\ N_s D_s'' &= -E_s 2\alpha\alpha_1\gamma\gamma_1\delta_s \\ N_s &= (\alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1\sigma_s)^2+(\alpha_1\gamma_1\delta_s)^2. \end{aligned}\right| \qquad 15.$$

Für verschwindende Absorption d. h. $c_1 = 0$ verwandeln sie sich in die gewöhnlichen Formeln. Eine bemerkenswerthe Gestalt nehmen diese Resultate an durch Einführung zweier Hülfswinkel μ_s und ν_s definirt durch

$$\operatorname{tg}\mu_s = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1\sigma_s}, \quad \operatorname{tg}\nu_s = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma-\alpha_1\gamma_1\sigma_s}. \qquad 16.$$

Man erhält dann:

$$\left.\begin{aligned} R_s' &= \frac{\sin\mu_s\cos(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}E_s \\ R_s'' &= -\frac{\sin\mu_s\sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}E_s \\ D_s' &= \frac{\cos\mu_s\sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}E_s \\ D_s'' &= -\frac{\sin\mu_s\sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}E_s \\ \operatorname{tg}\frac{\vartheta_s}{\tau} &= \frac{R_s''}{R_s'} = -\operatorname{tg}(\mu_s+\nu_s). \end{aligned}\right| \qquad 17.$$

Für die Verschiebungs-Componente in der Einfallsebene sind drei Formeln vorhanden, wir haben also zunächst zu untersuchen, ob sie einander nicht widersprechen.

Sie lauten:

$$\text{18a.}\left|\begin{aligned}&\overline{u} = \overline{u}_1, \qquad M\overline{w} = M_1\overline{w}_1,\\ &A\left[\left(\frac{\overline{\partial u}}{\partial z}+\frac{\overline{\partial w}}{\partial x}\right)\frac{\overline{\partial u}}{\partial t}+2\frac{\overline{\partial w}}{\partial z}\frac{\overline{\partial w}}{\partial t}\right] = A_1\left[\left(\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial z}+\frac{\overline{\partial w_1}}{\partial x}\right)\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial t}+2\frac{\overline{\partial w_1}}{\partial z}\frac{\overline{\partial w_1}}{\partial t}\right]\\ &\qquad\qquad+c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial z}-\frac{\overline{\partial w_1}}{\partial x}\right)\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Dabei muß wegen der Bedingung der Incompressibilität

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

sein und die Form der Lösungen für das obere (durchsichtige) und das untere (absorbirende) Medium verlangt außerdem, daß gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\omega}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\gamma}{\omega}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\omega}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\omega_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\omega_1}\left(\gamma_1\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\beta_1}{\tau}u\right), \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\omega_1}\frac{\partial w_1}{\partial t}.$$

Hieraus folgt zunächst für die letzte Gleichung (18a) die Form:

$$A\left(\frac{\overline{\partial u}}{\partial z}-\frac{\overline{\partial w}}{\partial x}\right)\frac{\overline{\partial u}}{\partial t} = A_1\left(\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial z}-\frac{\overline{\partial w_1}}{\partial x}\right)\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial z}-\frac{\overline{\partial w_1}}{\partial x}\right)\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial t},$$

in welcher sich nach (18a, 1) die Factoren $\overline{\partial u}/\partial t$ und $\overline{\partial u_1}/\partial t$ rechts und links fortheben.

Führt man, um der Incompressibilitätsbedingung zu genügen, ein:

$$u = \gamma(r_e+r_r) \qquad w = -\alpha(r_e-r_r)$$

$$\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1\frac{\partial w_1}{\partial t}+\frac{\beta_1}{\tau}w_1 = 0$$

und setzt wieder $b\tau = b_1$, $c/\tau = c_1$, so erhält man:

$$\frac{A}{\alpha\omega}\frac{\overline{\partial w}}{\partial t} =$$

$$\frac{1}{\alpha_1\omega_1}\left[\frac{\overline{\partial w_1}}{\partial t}(A_1(\alpha_1^2-\beta_1^2+\gamma_1^2)+2\beta_1\gamma_1c_1)-\tau\frac{\overline{\partial^2 w_1}}{\partial t^2}(2\gamma_1\beta_1A_1-c_1(\alpha_1^2-\beta_1^2+\gamma_1^2))\right],$$

und dies ist unter Rücksicht auf das Brechungsgesetz $\alpha/\alpha_1 = \omega/\omega_1$ und die obigen Gleichungen (8b) identisch mit

$$M\frac{\overline{\partial w}}{\partial t} = M_1\frac{\overline{\partial w_1}}{\partial t}-b_1\tau\frac{\overline{\partial^2 w_1}}{\partial t^2}$$

oder mit

$$M \overline{w} = M_1 \overline{w}_1 - b_1 \tau \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial t}.$$

Es besteht also ein Widerspruch zwischen dem Princip der Energie und der Grenzgleichung für w in der obigen Form (18a). Derselbe verschwindet, wenn man $b = 0$ nimmt; indessen scheint mir dazu keine absolute Nothwendigkeit vorzuliegen. Mehrfach habe ich darauf hingewiesen [1]), daß über die Grenzbedingung für die Verschiebungscomponente normal zur Grenze eine gewisse Unsicherheit besteht. Nimmt man die Dichtigkeit des Aethers auf beiden Seiten der Grenze gleich, so ergiebt sich die Neumann sche Form

$$\overline{w} = \overline{w}_1$$

nur unter der Voraussetzung, daß man die Größe der ponderabeln Moleküle inclusive der an ihnen etwa condensirten Aetherhüllen gegen ihre Zwischenräume vernachlässigen kann, was den neusten Vorstellungen wenigstens für flüssige und feste Körper nicht entspricht. Berücksichtigt man dieselbe, so tritt an Stelle der Neumann'schen Gleichung:

$$q \mu \overline{w} = q_1 \mu_1 \overline{w}_1,$$

wo μ und μ_1 das bewegliche Quantum Aether in der Volumeneinheit und q und q_1 die in der Flächeneinheit von Molecularquerschnitten unbedeckte, d. h. für die Bewegungen des Aethers freie Fläche bedeutet. Eine Abhängigkeit des Productes $q \mu$ von der Schwingungsdauer der durch die Grenze gehenden Lichtwelle scheint nicht undenkbar, noch minder eine von ihrer Geschwindigkeit, und da die von uns eingeführten Kräfte als von den ponderabeln Molecülen ausgehend gedacht sind, ist es auch zulässig, daß ihre specifischen Constanten, hier also b, in demselben auftreten.

Ich werde demgemäß die Grenzbedingungen zunächst in der Form beibehalten:

$$\overline{u} = \overline{u}_1, \quad M \overline{w} = M_1 \overline{w}_1 - b_1 \tau \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial t}; \qquad 18.$$

es ist dann, wenn sich irgend Bedenken gegen diese Form erheben sollten, durch Gleichsetzen von M und M_1 und Nullsetzen von b jederzeit möglich, den Endresultaten diejenige Form zu geben, die der Neumann'schen Form der Grenzgleichung

$$\overline{w} = \overline{w}_1$$

entsprechen würden.

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 900, 1883, Bd. 21, p. 537, 1884.

Den Gleichungen (12b) zu genügen setze ich[1]):

19a. $$u = \gamma(r_e + r_r) \qquad v = -\alpha(r_e - r_r)$$

worin:

19b.
$$r_e = E_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right)$$
$$r_r = R_p' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) + R_p'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right)$$
und $$R_p' = R_p \cos\frac{\vartheta_p}{\tau} \qquad R_p'' = R_p \sin\frac{\vartheta_p}{\tau}.$$

Für u_1 und w_1 sind Lösungen der Form (8a) zu setzen, und zwar um der Bedingung der Incompressibilität zu genügen[2]):

19c.
$$u_1 = e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\gamma_1\left[D_p' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + D_p'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right]$$
$$w_1 = -e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2+\gamma_1^2}\left[(D_p'\gamma_1 - D_p''\beta_1)\sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right.$$
$$\left. + (D_p'\beta_1 + D_p''\gamma_1)\cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right].$$

Hierdurch werden unsere Grenzgleichungen:

$$\alpha : \alpha_1 = \omega : \omega_1$$
$$\gamma(E_p + R_p') = \gamma_1 D_p'$$
$$+\gamma R_p'' = \gamma_1 D_p''$$
$$M\alpha(E_p - R_p') = \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2+\gamma_1^2}[D_p'(M_1\gamma_1 + b_1\beta_1) - D_p''(M_1\beta_1 - b_1\gamma_1)]$$
$$-M\alpha R_p'' = \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2+\gamma_1^2}[D_p'(M_1\beta_1 - b_1\gamma_1) + D_p''(M_1\gamma_1 + b_1\beta_1)];$$

die letzten zwei auch unter Benutzung der Abkürzungen

20.
$$\frac{\gamma_1(M_1\gamma_1 + b_1\beta_1)}{M(\beta_1^2+\gamma_1^2)} = \sigma_p$$
$$\frac{\gamma_1(M_1\beta_1 - b_1\gamma_1)}{M(\beta_1^2+\gamma_1^2)} = \delta_p$$

---

1) Diese Verfügung ist vortheilhafter als die Gött. Nachr. 1884 p. 52 getroffene, weil sie für senkrechten Einfall die Grenzgleichungen in einer mit (14) identischen Form giebt.

2) Ich mache besonders darauf aufmerksam, daß nach diesen Werthen die Bewegung im absorbirenden Medium keine transversale ist, sondern wie bei der totalen Reflexion, elliptisch in der Einfallsebene.

kürzer zuschreiben, so daß das System wird:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(E_p + R_p') &= \gamma_1 D_p' \\ \gamma R_p'' &= \gamma_1 D_p'' \\ \alpha(E_p - R_p') &= \alpha_1(D_p' \sigma_p - D_p'' \delta_p) \\ -\alpha R_p'' &= \alpha_1(D_p' \delta_p + D_p'' \sigma_p). \end{aligned}\right| \quad 21.$$

Für senkrechten Einfall gehen diese Formeln in die früheren (14) über, da hierfür nach den Relationen (8b) $\sigma_s = \sigma_p$ und $\delta_s = \delta_p$ wird.

Die Auflösung ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} N_p R_p' &= E_p[\alpha^2 \gamma_1^2 - \alpha_1^2 \gamma^2(\sigma_p^2 + \delta_p^2)] \\ N_p R_p'' &= - E_p 2\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1\delta_p \\ N_p D_p' &= E_p 2\alpha\gamma(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma\sigma_p) \\ N_p D_p'' &= - E_p 2\alpha\alpha_1\gamma^2\delta_p \\ N_p &= (\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma\sigma_p)^2 + (\alpha_1\gamma\delta_p)^2. \end{aligned}\right| \quad 22.$$

Auch hier gewinnt man eine einfachere Gestalt durch Einführung zweier Hülfswinkel μ_p und ν_p, die gegeben sind durch:

$$\operatorname{tg}\mu_p = \frac{\alpha_1\gamma\delta_p}{\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma\sigma_p}, \qquad \operatorname{tg}\nu_p = \frac{\alpha_1\gamma\delta_p}{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma\sigma_p}; \quad \Bigg| \quad 23.$$

es ist in diesen Größen:

$$\left.\begin{aligned} R_p' &= \frac{\sin\mu_p\cos(\mu_p+\nu_p)}{\sin\nu_p} E_p \\ R_p'' &= -\frac{\sin\mu_p\sin(\mu_p+\nu_p)}{\sin\nu_p} E_p \\ D_p' &= \frac{\gamma}{\gamma_1}\cdot\frac{\cos\mu_p\sin(\mu_p+\nu_p)}{\sin\nu_p} E_p \\ D_p'' &= -\frac{\gamma}{\gamma_1}\cdot\frac{\sin\mu_p\sin(\mu_p+\nu_p)}{\sin\nu_p} E_p \\ \operatorname{tg}\frac{\vartheta_p}{\tau} &= \frac{R_p''}{R_p'} = -\operatorname{tg}(\mu_p+\nu_p). \end{aligned}\right| \quad 24.$$

Die Formeln (15) und (22) resp. (17) und (24) enthalten die Lösung des Problems der Reflexion und Brechung.

Man erhält aus ihnen die für die Beobachtung wichtigen Größen der reflectirten Gesammtintensitäten:

$$\left.\begin{aligned} R_s^2 &= R_s'^2 + R_s''^2 = E_s^2 \frac{(\alpha\gamma - \alpha_1\gamma_1\sigma_s)^2 + (\alpha_1\gamma_1\delta_s)^2}{(\alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1\sigma_s)^2 + (\alpha_1\gamma_1\delta_s)^2} = E_s^2\left(\frac{\sin\mu_s}{\sin\nu_s}\right)^2 \\ R_p^2 &= R_p'^2 + R_p''^2 = E_p^2 \frac{(\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma\sigma_p)^2 + (\alpha_1\gamma\delta_p)^2}{(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma\sigma_p)^2 + (\alpha_1\gamma\delta_p)^2} = E_p^2\left(\frac{\sin\mu_p}{\sin\nu_p}\right)^2. \end{aligned}\right| \quad 25.$$

Ferner die gegenseitige Beschleunigung (denn ϑ_p und ϑ_s sind die Beschleunigungen und nicht die Verzögerungen) der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden reflectirten Componenten:

$$26.\quad \left| \begin{aligned} \operatorname{tg}\Delta &= \operatorname{tg}\frac{\vartheta_p-\vartheta_s}{\tau} = \frac{R_s'R_p''-R_p'R_s''}{R_s'R_p'+R_s''R_p''} \\ &= \frac{2\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1\left[\delta_s\left(\alpha^2\gamma_1^2-\alpha_1^2\gamma^2(\sigma_p^2+\delta_p^2)\right)-\delta_p\left(\alpha^2\gamma^2-\alpha_1^2\gamma_1^2(\sigma_s^2+\delta_s^2)\right)\right]}{\left(\alpha^2\gamma^2-\alpha_1^2\gamma_1^2(\sigma_s^2+\delta_s^2)\right)\left(\alpha^2\gamma_1^2-\alpha_1^2\gamma^2(\sigma_p^2+\delta_p^2)\right)+(2\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1)^2\delta_p\delta_s} \end{aligned}\right.$$

oder auch direct aus (17) und (24):

$$27.\quad \mid \Delta = (\mu_s+\nu_s)-(\mu_p+\nu_p).$$

Dabei ist Δ positiv, wenn die in der Einfallsebene polarisirte Welle der normal dazu polarisirten vorauseilt.

Hierzu sind die früheren Gleichungen zu stellen:

$$5b.\quad \mid M_1\omega_1^2 = A_1(1-\varkappa^2)+2\varkappa c_1, \qquad c_1 = \frac{c}{\tau}, \qquad b_1 = b\tau,$$

$$5c.\quad \mid 0 = (1-\varkappa^2)(c_1M_1+A_1b_1)-2\varkappa(A_1M_1-b_1c_1)$$

$$10a.\quad \mid 2\gamma_1^2 = \sqrt{4\varkappa^2+(1-\alpha_1^2-\varkappa^2)^2}+(1-\alpha_1^2-\varkappa^2).$$

$$10b.\quad \mid 2\beta_1^2 = \sqrt{4\varkappa^2+(1-\alpha_1^2-\varkappa^2)^2}-(1-\alpha_1^2-\varkappa^2).$$

Es scheint, als ob die Größe b, die wir der Allgemeinheit halber eingeführt haben, nicht wesentlich auf die entstehenden Resultate influirt; da sie aber in der Grenzbedingung (18) vielleicht Bedenken erregen könnte, wollen wir sie nun $= 0$ nehmen und zugleich, um jene Gleichung vollständig auf die Neumann'sche Form zu bringen, $M_1 = M$ setzen.

Dann wird die Gleichung (5c):

$$0 = c_1(1-\varkappa^2)-2\varkappa A_1$$

und die eingeführten σ und δ so wie ω_1 lassen sich aus (13) und (20) bemerkenswerth ausdrücken:

$$28.\quad \left| \begin{aligned} M\omega_1^2 &= 2\varkappa c_1\left(1+\left(\frac{A_1}{c_1}\right)^2\right) = \frac{c_1(1+\varkappa^2)^2}{2\varkappa} \\ \sigma_s &= \frac{\gamma_1^2(1-\varkappa^2)+2\varkappa^2}{\gamma_1^2(1+\varkappa^2)^2} \qquad \sigma_p = \frac{\gamma_1^2}{\beta_1^2+\gamma_1^2} \\ \delta_s &= \frac{\varkappa(2\gamma_1^2+\varkappa^2-1)}{\gamma_1^2(1+\varkappa^2)^2} \qquad \delta_p = \frac{\varkappa}{\beta_1^2+\gamma_1^2}. \end{aligned}\right.$$

Da nun γ_1 und β_1 durch α_1 und $\varkappa$ gegeben sind, so ist in un-

sern Endformeln Alles bestimmt, wenn diese zwei Größen oder da $\alpha:\alpha_1 = n$ (d. h. dem Brechungscoefficienten) ist, wenn n und $\varkappa$ gegeben sind.

Untersucht man die erhaltenen Formeln darauf hin, ob sie Vorgänge darstellen, welche in ähnlicher Weise an der Oberfläche irgend welcher Medien beobachtet sind, so möchte man zunächst glauben, daß sie sich besonders zur Darstellung der von Jamin[1]) entdeckten elliptischen Polarisation bei gewöhnlicher Reflexion eignen möchten. Indessen bemerkt man bei genauerer Prüfung, daß sie zwar eine gegenseitige Verzögerung der beiden Schwingungscomponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene im reflectirten Licht darstellen, daß aber dieselbe für alle Werthe von n und $\varkappa$ in demselben (von Jamin positiv genannten) Sinne stattfindet und hiernach also nicht der beobachteten entgegengesetzten Erscheinung entsprechen würde. Ferner findet man auch Werthe des Absorptionscoefficienten $\varkappa$, die zwar klein sind, aber bei weitem nicht so klein, wie sie der hohe Grad der Durchsichtigkeit vieler der von Jamin untersuchten Substanzen fordern würde. In der That bemerkt man, daß, weil die fortgepflanzte Verrückung mit

$$e^{-\frac{\varkappa z}{\tau \omega_1}}$$

proportional ist und der Exponent dieser Größe sich wegen $2\pi\tau\omega = \lambda$ auch schreiben läßt

$$\frac{2\pi\varkappa z}{\lambda_1} = \frac{2\pi n \varkappa z}{\lambda},$$

Körper, die in Schichten von einer Dicke von vielen tausend Wellenlängen noch unmerklich absorbirend wirken, ein ganz verschwindend kleines $\varkappa$ verlangen.

Uebrigens glaube ich gar nicht, daß man den Substanzen, welche Jamin beobachtet hat, neue Eigenschaften beilegen muß, um seine Beobachtungen zu erklären. Erscheint auch die Hypothese Zech's[2]), daß von Natur eine Uebergangsschicht von geringerer Dichte an der Oberfläche der meisten Körper vorhanden wäre und deren Einfluß die betreffenden Erscheinungen verursache, ungenügend, weil sie unerklärt läßt, warum Körper mit Brechungscoefficienten kleiner als etwa 1,45 sich entgegengesetzt verhalten, wie solche mit größerem, so kann man sie doch, wie ich glaube, so modificiren, daß sie befriedigt.

---

1) Jamin, Ann. de chim. (3) Bd. 29, p. 263, 1850. C. R. Bd. 31, p. 696, 1850.
2) Zech, Pogg. Ann. Bd. 109, p. 60, 1860.

Nimmt man nämlich an, daß die von Jamin beobachteten festen Körper mit einer Substanz polirt sind, welche selbst einen Brechungscoefficienten von etwa 1,45 besitzt und welche in einer dünnen Schicht den polirten Körper überzogen hat, so erklärt sich das positive Verhalten derjenigen Medien mit größerem Brechungsindex ebenso, wie das negative derjenigen mit kleinerem. Da nun wohl in allen optischen Werkstätten nahezu mit denselben Mitteln operirt wird, so ist auch plausibel, daß verschiedene Beobachter verwandte Resultate erhalten haben[1]. — Was die flüssigen Körper anbetrifft, so hat Jamin einen solchen Grenzwerth des Brechungscoefficienten nicht finden können; aber man bemerkt bei der Musterung seiner Resultate, daß sämmtliche Oele, Fette, Aether u. dergl. sich positiv verhalten, sämmtliche wässerige Salzlösungen aber negativ. Man wird daher kaum fehl gehen, wenn man bei den Flüssigkeiten, je nachdem sie der einen oder anderen Classe angehören, eine durch die Verdunstung u. dergl. in entgegengesetzter Weise veränderte Oberflächenschicht als Ursache der betreffenden Phänomene annimmt. Diese Ansicht bedarf natürlich noch der experimentellen Prüfung. —

Was ferner die Erscheinungen der auswählenden Absorption farbiger Körper betrifft, so würden dieselben sich nur dann aus den obigen Formeln ableiten lassen, wenn man den Coefficienten c und b nicht für alle Schwingungsdauern constante Werthe beilegen wollte. Es variirt zwar der Absorptionscoefficient $\varkappa$ auch bei constantem b und c mit der Farbe, aber nicht in dem Maaße, daß man erwarten könnte, die erwähnten Erscheinungen dadurch zu erklären. Auf die Erweiterung unserer Untersuchung in der Richtung der Abhängigkeit der Größen b und c von der Schwingungsdauer des durch das Medium fortgepflanzten Lichtes, die nach den an die Spitze gestellten Erörterungen unzweifelhaft zulässig sein würde, will ich mich aber jetzt nicht einlassen. —

Hingegen wird sich zeigen, daß durch unsere Formeln das optische Verhalten der Metalle mit großer Genauigkeit dargestellt wird[2],

1) Zugleich erklären sich dadurch die Verschiedenheiten der erhaltenen Zahlenwerthe. Jamin findet (Ann. de chim. (3) Bd. 29, p. 263) die später definirten Größen $\overline{\varphi}$ und $\overline{\rho}$ für Flußspath z. B.:

$$\overline{\varphi} = 55°,5' \quad \overline{\rho} = 0{,}0084$$

S. Haugthon (Phil. Trans. 1863. I, p. 122):

$$\overline{\varphi} = 54°,46' \quad \overline{\rho} = 0{,}0053.$$

2) Daß eine befriedigende Theorie der Metallreflexion bisher noch fehlte, wird kaum Widerspruch finden; selbst Wernicke, der am meisten auf die mechanischen Principien zurückgeht, benutzt als Grenzbedingungen die nicht zu rechtfertigenden Cauchy'schen Continuitätsgleichungen.

so daß wir annehmen dürfen, daß in den Metallen Kräfte zwischen der Materie und dem Aether wirken, welche die oben erörterten Eigenschaften besitzen.

Für die Prüfung dieser Uebereinstimmmung ist es nöthig, die einem jeden Metalle individuellen beiden Constanten n und $\varkappa$ aus den Beobachtungsdaten zu berechnen. Als solche bieten sich bekanntlich besonders die mehrfach bestimmten beiden Größen:

1) der sogenannte Polarisationswinkel oder die Hauptincidenz, d. h. derjenige Einfallswinkel $\overline{\varphi}$ für welchen [1]):

$$\overline{\Delta} = \overline{\mu}_s + \overline{\nu}_s - \overline{\mu}_p - \overline{\nu}_p = \frac{\pi}{2}$$

ist,

2) das sogenannte Hauptazimuth $\overline{\psi}_2$, — d. h. dasjenige Azimuth des reflectirten Lichtes, welches man erhält, wenn man im Azimuth $\pi/4$ lineär polarisirtes Licht zwei Mal unter dem Polarisationswinkel $\overline{\varphi}$ reflectiren läßt, — gegeben durch die Relation [1]):

$$\operatorname{tg}\overline{\psi}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{R}}_s^2}{\overline{\mathfrak{R}}_p^2}, \qquad \text{29a.}$$

falls man mit $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$ die reflectirten Amplituden bezeichnet die den einfallenden Amplituden $E_s = 1$, $E_p = 1$ entsprechen; statt des letzteren auch wohl das bei einmaliger Reflexion erhaltene Verhältniß:

$$\overline{\rho} = \operatorname{tg}\overline{\psi}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{R}}_s}{\overline{\mathfrak{R}}_p}. \qquad \text{29b.}$$

Ich halte es für am besten ψ_1 das Hauptazimuth zu nennen. In unsern Hülfswinkeln μ und ν ist nach (17) und (24):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\overline{\psi}_2 &= \frac{\sin^2\overline{\mu}_s \,.\, \sin^2\overline{\nu}_p}{\sin^2\overline{\nu}_s \,.\, \sin^2\overline{\mu}_p}, \\ \overline{\rho} = \operatorname{tg}\overline{\psi}_1 &= \frac{\sin\overline{\mu}_s \,.\, \sin\overline{\nu}_p}{\sin\overline{\nu}_s \,.\, \sin\overline{\mu}_p}. \end{aligned} \qquad \text{30.}$$

Zwei Zahlwerthe $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}_1$ oder $\overline{\psi}_2$ müßten demnach genügen, um die beiden Constanten n und $\varkappa$ des Mediums zu bestimmen, aber leider sind die Ausdrücke für $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}_1$ oder $\overline{\psi}_2$ so äußerst complicirt, daß an eine directe Berechnung der n und $\varkappa$ gar nicht zu denken ist. Relativ einfachere Gleichungen kann man durch Einführung von

---

1) Die dem Einfall unter dem Polarisationswinkel entsprechenden Werthe sollen durch einen Strich über dem betreffenden Symbol ausgezeichnet werden.

Annahmen über $\varkappa$ oder n erhalten z. B. daß n oder $\varkappa$ sehr klein oder sehr groß wäre [1]); aber es zeigt sich, daß die Wirklichkeit mit denselben nicht übereinstimmt.

Ich bin demgemäß völlig streng folgendermaßen verfahren.

Ein bestimmter Polarisationswinkel $\overline{\varphi}$ wurde zum Grunde gelegt (z. B. 68°) und für denselben und für einige gleichfalls willkürlich gewählte Werthe n (oder $\varkappa$) das zugehörige $\varkappa$ (oder n) durch Probiren aufgesucht, welches der Bedingung

$$\Delta = \frac{\pi}{2}$$

entspricht. Diese Punkte in ein Coordinatensystem $\varkappa$, n eingetragen gestatten die Construction einer continuirlichen Curve, welche nunmehr zu jedem gegebenen n (oder $\varkappa$) dasjenige $\varkappa$ (oder n) abzulesen erlaubt, welches, in die Formel (27) eingeführt, für $\varphi = 68°$, die Phasendifferenz $\Delta = \pi/2$ macht.

Diese Berechnung, außer für $\overline{\varphi} = 68°$ auch für $\overline{\varphi} = 72°$ und $\overline{\varphi} = 76°$ durchgeführt, hat die folgenden Zahlen [1]) ergeben.

$\varphi = 68°$

$\varkappa$	n	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	Δ	R_s	R_p	ρ
0,5	2,14	11° 47′	87° 56′	4° 14′	5° 29′	90° 0′	0,20	0,77	0,26
1,0	1,604	21 43	82 39	6 28	7 59	89 55	0,37	0,81	0,46
2,0	0,95	34 21	74 6	8 13	9 18	90 56	0,59	0,89	0,66
5,0	0,42	45 12	62 17	8 49	9 19	89 23	0.80	0,95	$0{,}84_5$
10	0,208	49 49	58 44	9 8	9 22	90 2	0,89	0,97	0,92
15	0,14	51 10	54 21	9 11	9 22	89 42	0,93	0,98	$0{,}94_5$

1) Von Interesse ist die folgende Annahme. Ist $\varkappa$ sehr groß, so ist γ_1 nahe $= 1$, $\delta_s = \delta_p = 1/\varkappa$, $\sigma_s = \sigma_p = 1/\varkappa^2$ und wenn man sich auf die erste Nährung beschränkt nach (26):

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{2\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1\delta}{\alpha^2\alpha_1^2\delta^2 - \gamma^2\gamma_1^2}$$

Da nun bei uns $\alpha/\alpha_1 = n$, d. h. dem constanten Brechungscoefficienten ist, so ist, wenn man $\alpha_1 \delta = \alpha'$ setzt, auch α/α' constant, etwa $= n'$, γ_1 unterscheidet sich aber nicht merklich von $\sqrt{1-\alpha'^2} = \gamma'$; man kann also näherungsweise schreiben

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{2\alpha\gamma\alpha'\gamma'}{\alpha^2\alpha'^2 - \gamma^2\gamma'^2}$$

und dies ist die von Brewster Pogg. Ann. Bd. 21. p. 237. 1831, Neumann Pogg. Ann. Bd. 26. p. 98. 1832, und Jamin Ann. de chim. (3) Bd. 19. p. 319 1847 aufgestellte Interpolationsformel.

1) Die Berechnung ist nur bis auf 4 Stellen durchgeführt, es ist also in den Endresultaten der sehr complicirten Rechnung die dritte Ziffer schon unsicher. Vorläufig genügt diese Genauigkeit; erst wenn man Mittel kennen gelernt haben wird, Metall-Oberflächen von constanterer Natur herzustellen, wird es sich lohnen, derartige Berechnungen mit größerer Genauigkeit durchzuführen.

$\varphi = 72^0$

x	n	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	Δ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ
0,5	2,65	9° 53′	85° 57′	2° 44′	3° 18′	89° 48′	0,17	0,83	0,21
1,0	2,04	22 16	78 4	4 13	4 5	91 16	0,39	0,87	0,45
2,0	1,25	33 34	68 20	5 20	5 49	90 45	0,61	0,92	0,66
5,0	0,55	43 13	58 7	5 47	6 0	89 33	0,81	0,96$_5$	0,83$_5$
10	0,276	47 46	54 41	5 55	6 2	90 30	0,91	0,98	0,92$_5$
15	0,18	49 8	54 21	6 6	6 11	91 12	0,93	0,98	0,94$_5$

$\varphi = 76^0$

x	n	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	Δ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ
1,0	2,80	21° 54′	72° 41′	2° 26′	2° 39′	89° 30′	0,39	0,92	0,43
1,63	2,00	30 0	66 2	2 54	3 1	90 2	0,55	0,93	0,59
2,0	1,68	32 59	64 32	3 11	3 22	90 58	0,60	0,94	0,64$_5$
2,5	1,42	35 21	60 48	3 14	3 23	89 32	0,66	0,96	0,69
3,2	1,16	37 37	57 34	3 18	3 23	88 30	0,72	0,97	0,74$_5$
4,0	0,925	39 57	56 28	3 23	3 29	89 33	0,77	0,97$_5$	0,79
5,0	0,743	41 44	55 5	3 22	3 26	90 1	0,81$_5$	0,98	0,83$_5$
6,5	0,58	43 2	53 20	3 27	3 31	89 24	0,85	0,98$_5$	0,86
8,0	0,47	44 10	52 37	3 29	3 32	89 46	0,88	0,98$_5$	0,89
10,0	0,375	45 0	51 47	3 30	3 34	89 45	0,90$_5$	0,99	0,91$_5$
11,5	0,32	46 6	52 6	3 33	3 35	91 4	0,91$_4$	0,99	0,92$_4$
13,5	0,28	45 46	50 46	3 30	3 32	89 30	0,92$_5$	0,99	0,93$_8$
15,0	0,25	46 20	50 50	3 23	3 26	90 20	0,93$_5$	0.99$_5$	0,94

Endlich sind noch zwei einzelne Werthe zu besonderen Zwecken berechnet:

$\varphi = 80^0$

5,0	1,07	40° 34′	52° 53′	1° 45′	1° 46′	89° 4′	0,82	0,89	0,83

$\varphi = 64^0$

5,0	0,32	47° 55′	67° 59′	12° 34′	12° 43′	89° 37′	0,80	0,94	0,85

Mit Hülfe dieser Werthe und der Bemerkung, daß man Δ zu klein findet, wenn n zu gross gewählt ist, kann man zunächst leicht mit einer ziemlichen Zuverlässigkeit die Curven für $\overline{\varphi} = 68^0$, $\overline{\varphi} = 72^0$, $\overline{\varphi} = 76^0$ zeichnen.

Die obigen Zahlen gestatten aber auch Curven für constantes $\overline{\rho}$ zu construiren. Dieselben werden nahezu mit horizontalen Geraden zusammenfallen. Man hat z. B. für $x = 1$ und $\overline{\varphi}$ resp. $= 68^0$, 72^0 und 76^0 die drei Werthe: 0,46, 0,45, 0,43; für $x = 2$ analog: 0,66 0,66 0,64$_5$; für $x = 5$: 0,84$_5$, 0,83$_5$, 0,83$_5$ — hinzu die zur Prüfung (ob diese Constanz weiter hinaus stattfindet) berechneten für $\varphi = 64^0$ und 80^0: $\overline{\rho} = 0,85$ und 0,83 —; für $x = 10$: 0,92 0,·2$_5$ 0,91$_5$; für $x = 15$: 0,94$_5$, 0,94$_5$, 0,94. Hiernach giebt sich für die fraglichen Curven nur ein schwaches Ansteigen und man kann ihnen mit einiger Wahrscheinlichkeit die in der Tafel I. gezeichnete Form und Lage geben. Da die Werthe obiger Zahlentafel in der dritten Ziffer nicht mehr vollständig sicher sind, so ist auch natürlich die Form und Lage beider Curvensysteme nur nahezu die gezeichnete. Indeß ist mehr als eine bloße Annährung für die Zwecke ihrer Anwendung

auch gar nicht nöthig, da die zu berechnenden Beobachtungen schwerlich bis auf den hundertsten Theil genau sind.

Die Anwendung der Curventafel I. ist nun kurz folgende: Ist für ein Metall der Haupteinfallswinkel $\overline{\varphi} = x$ und das Hauptazimuth d. h. $\overline{\rho} = y$ durch Beobachtung bestimmt, so sucht man in der Curventafel den Schnittpunkt der Curven $\overline{\varphi} = x$ und $\overline{\rho} = y$ auf; seine Coordinaten n und $\varkappa$ sind die gesuchten Constanten des Metalles.

Natürlich erhält man auf diese Weise zunächst nur einen rohangenährten Werth; um eine genauere Bestimmung zu machen, bleibt nichts übrig, als diese Annährung in die Gleichungen für $\overline{\rho}$ und $\overline{\varphi}$ einzusetzen und zuzusehen, in welchem Sinne die berechneten Werthe $\overline{\rho}$ und $\overline{\varphi}$ von den beobachteten abweichen. Findet sich nur $\overline{\varphi}$ zu groß (oder klein) so wird man ein kleineres (oder größeres) n probiren, findet sich nur $\overline{\rho}$ zu groß oder klein, so ist zugleich n und $\varkappa$ in einer Weise zu verändern, daß man sich in der Curventafel I. längs der Curve $\overline{\varphi} =$ Const. bewegt.

Diese genaue Berechnung ist äußerst zeitraubend, ich habe sie daher im Folgenden nur bei den mir am wichtigsten scheinenden Beobachtungen angewandt.

Für die Vergleichung mit der Theorie empfehlen sich ganz besonders die Beobachtungen von Herrn Jamin[1]), weil dieselben einerseits in einer gewissen Vollständigkeit und außerdem an massiven Metallspiegeln angestellt sind, so daß also keine Veranlassung zum Zweifel ist, ob die Metalltheilchen zu einer dichten Masse vereinigt sind, wie ein solcher den auf Glasplatten chemisch niedergeschlagenen Metallschichten gegenüber zu erheben ist. Leider sind sie nur für ein einziges Metall in einer Weise durchgeführt, die sämmtliche Consequenzen der Theorie zu prüfen gestattet. Nur für Stahl giebt nämlich Herr Jamin für eine größere Zahl von Einfallswinkeln sowohl die reflectirten Amplituden $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$ [2]), als die Phasendifferenz Δ an [3]), für andere Metalle entweder nur Δ (Zink, Silber) oder nur $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$ (Spiegelmetall). Ich werde daher die Vergleichung für Stahl durchführen und zwar ihrer Wichtigkeit entsprechend ausführlich.

Zur Bestimmung der beiden das Metall definirenden Constanten n und $\varkappa$ sind die Werthe von $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$ für den Polarisationswinkel (für Stahl 76°) zu benutzen. Jamin's Beobachtungen haben erge-

1) Jamin, Ann. de chim. (3) Bd. 19 p. 296, 1847 u. Bd. 22. p. 311, 1848.
2) Jamin, Ann. de chim. (3) Bd. 19 p. 304.
3) l. c. p. 317.

ben für $\varphi = 75^0$: $\mathfrak{R}_p = 0{,}946$ und $\mathfrak{R}_s = 0{,}566$; aber man würde einen bedeutenden Fehler begehen, wenn man diese Werthe für $\overline{\mathfrak{R}}_p$ und $\overline{\mathfrak{R}}_s$ einführen wollte. Wie man aus der graphischen Darstellung auf Tafel II. ersieht, in welcher die den verschiedenen (als Abscisse aufgetragenen) Einfallswinkeln entsprechenden $\mathfrak{R}_s$, $\mathfrak{R}_p$ und Δ als Ordinaten aufgetragen und die so gefundenen Punkte durch Gerade verbunden sind, ist vielmehr unzweifelhaft gerade für 75^0 Einfallswinkel $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$ bedeutend fehlerhaft. Es wird wahrscheinlich der richtige Werth ungefähr sein:

$$\overline{\mathfrak{R}}_s = 0{,}54 \quad \overline{\mathfrak{R}}_p = 0{,}94$$

also

$$\rho = \mathfrak{R}_s/\mathfrak{R}_p = 0{,}58.$$

Hiernach würde Tafel I. unter Anwendung der oben erörterten Methode etwa auf

$$x = 1{,}65 \qquad n = 1{,}97$$

führen.

Geht man von diesen Werthen aus, so gelangt man zu folgendem System der μ und ν, dem ich die der Hülfsgröße γ_1 beifüge:

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
0^0	$11^0{,}20$	$14^0{,}81$	$11^0{,}20$	$14^0{,}81$	1,000
20	11, 79	15, 66	10, 63	13, 62	0,996
25	12, 15	16, 32	10, 30	13, 08	0,994
30	12, 62	17, 18	9, 91	12, 44	0,991
35	13, 20	18, 30	9, 44	11, 70	0,989
40	13, 93	19, 75	8, 90	10, 87	0,986
45	14, 84	21, 65	8, 29	9, 96	0,983
50	15, 98	24, 15	7, 60	8, 98	0,980
55	17, 42	27, 52	6, 85	7, 95	0,977
60	19, 25	32, 19	6, 04	6, 87	0,975
65	21, 63	38, 85	5, 16	5, 75	0,972
70	24, 79	48, 65	4, 22	4, 61	0,970
76	30, 14	66, 62	3, 02	3, 22	0,968
80	35, 16	82, 76	2, 19	2, 29	$0{,}967_5$
85	44, 01	104, 52	1, 11	1, 14	0,967

Bestimmen wir hieraus zunächst die Phasendifferenz nach der Formel

$$\Delta = \mu_s + \nu_s - \mu_p - \nu_p,$$

drücken sie in Theilen von π aus und stellen sie mit den aus den direct beobachteten nach Tafel II. interpolirten Werthen zusammen, so erhalten wir folgendes System:

φ	Δ ber.	Δ beob.	Diff.
20°	0,018	—	—
25	0,028	—	—
30	0,041	—	—
35	0,058	—	—
40	0,077	0,080	— 0,003
45	0,101	0,102	— 0,001
50	0,131	0,132	— 0.001
55	0,167	0,170	— 0,003
60	0,214	0,215	— 0,001
65	0,275	0,280	— 0,005
70	0,359	0,360	— 0,001
76	0,503	0,500	+ 0,003
80	0,630	0,636	— 0,006
85	0,813	0,820	— 0,007

Die Amplituden $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$, welche der einfallenden Amplitude 1 entsprechen, nach den Formeln (25)

$$\mathfrak{R}_s = \frac{\sin\mu_s}{\sin\nu_s} \qquad \mathfrak{R}_p = \frac{\sin\mu_p}{\sin\nu_p}$$

berechnet und neben die direct beobachteten Werthe gestellt, sowie das berechnete $\rho = \mathfrak{R}_s/\mathfrak{R}_p$, geben die folgende Tafel:

φ	$\mathfrak{R}_s$ ber.	$\mathfrak{R}_s$ beob.	Diff.	$\mathfrak{R}_p$ ber.	$\mathfrak{R}_p$ beob.	Diff.	ρ ber.
20°	0,758	0,770	— 0,012	0,784	0,780	+ 0,004	0,969
25	0,749	0,769	— 0,020	0,790	0,791	— 0,001	0,948
30	0,740	0,760	— 0,020	0,799	0,790	+ 0,009	0,926
35	0,727	0,741	— 0,014	0,808	0,800	+ 0,008	0,900
40	0,712	0,688 *)	+ 0,024	0,821	0,780 *)	+ 0,041	0,868
45	0,694	0,689	+ 0,006	0,833	0,818	+ 0,015	0,834
50	0,673	0,666	+ 0,007	0,847	0,828	+ 0,019	0,795
55	0,648	—	—	0,862	0,869	— 0,007	0,753
60	0,619	0,630	— 0,011	0,879	0,897 *)	— 0,018	0,697
65	0,588	0,627 *)	— 0,039	0,898	0,898	± 0	0,655
70	0,561	0,545 *)	+ 0,016	0,917	0,915	+ 0,002	0,612
76	0,547	0,566 *)	— 0,019	0,938	0,946	— 0,008	0,583
80	0,581	0,547 *)	+ 0,034	0,956	0,945	+ 0,011	0,608
85	0,718	0,719	— 0,001	0,978	0,951 *)	+ 0,027	0,735

Hierin sind, wie ein Blick auf die Tafel II. zeigt, unter den $\mathfrak{R}_s$ die oben mit *) versehenen Werthe offenbar durch Beobachtungsfehler entstellt. Eine graphische Interpolation würde die Werthe

0,715 0,600 0,563 0,545 0,567

wahrscheinlich machen, denen die Differenzen

— 0,003 — 0,012 — 0,002 + 0,002 + 0,014

entsprächen.

Analoges gilt auch für die 3 Werthe unter den $\mathfrak{R}_p$, welche mit *) versehen sind. Nach den Nachbarwerthen würde man hier schließen:

0,810 0,880 0,970
Diff. + 0,011 — 0,001 + 0,008.

Die berechneten Werthe sind ebenfalls in Tafel II. eingezeich-

net und durch die punktirte Linie verbunden; diese Curve zeigt noch anschaulicher, als die Tabellen, in welchen sich die offenbaren Beobachtungsfehler verstecken, daß die Uebereinstimmung der Beobachtungen mit der Theorie so vollständig ist, als nur verlangt werden kann, besonders wenn man bedenkt, daß das ganze System berechneter Werthe sich durch nur zwei durch Probiren gefundene Zahlen bestimmt.

Diese letzteren selbst nämlich,

$$\varkappa = 1{,}65 \qquad n = 1{,}97,$$

lassen nun auch noch weitere Folgerungen ziehen.

Zunächst bestimmt sich die reflectirte Amplitude, wenn normal die Amplitude 1 einfällt:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{n(\varkappa^2+1)-1}{n(\varkappa^2+1)+1} = 0{,}762,$$

Hiernach kann man leicht die Curven für $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$ bis zum Endpunkt vervollständigen. Man findet, daß diejenige für $\mathfrak{R}_s$ von $\varphi = 0$ an zuerst ein wenig ansteigt und erst weiterhin wieder fällt.

Ferner bestimmt sich in den Ausdrücken für die Verschiebungscomponenten (12.) und (19.) im Innern des Metalles der Coefficient von z in der Exponentialgröße, nämlich

$$\frac{\varkappa}{\tau\omega_1}, \text{ welches auch } = \frac{n\varkappa}{\tau\omega} = \frac{2\pi n\varkappa}{\lambda} \text{ ist},$$

wenn man statt der Geschwindigkeit ω_1 im Metall die in der Luft ω nach der Formel $\omega = n\omega_1$, oder die Wellenlänge in der Luft $\lambda = 2\pi\tau\omega$ einführt.

Da nach unsern Werthen

$$n\varkappa = 3{,}25 \qquad 2\pi n\varkappa = 20{,}4$$

ist, so würde in einer Tiefe z unter der Grenze von $\lambda/20$ bei senkrechtem Einfall der Exponent $= 1$ werden, die eintretende Amplitude also auf $1/2{,}72$, in einer Tiefe von $\lambda/4$ der Exponent $= 5$, die Amplitude also auf $1/148$ geschwächt sein; die Intensitäten im quadratischen Verhältniß. Eine Schicht Stahl von der Dicke einer halben Wellenlänge (in Luft) wäre bereits als völlig undurchsichtig anzusehen.

Bei schiefem Einfall tritt an Stelle von $n\varkappa$ im Exponenten $n\varkappa/\gamma_1$ auf, wo für Stahl γ_1 die oben (p. 159) angegebenen Werthe hat. Da γ_1 mit wachsendem Einfallswinkel abnimmt, so absorbirt das Metall bei schiefem Durchgang ein wenig mehr, als bei normalem, doch keineswegs in dem Verhältniß mehr, welches aus dem bei schiefem Einfall vergrößerten Wege nach der gewöhnlichen Anschauung folgen würde.

Ich theile ferner die Resultate der Berechnung einer Beobachtungsreihe mit, die Herr Quincke[1]) an einer auf Glas niedergeschlagenen undurchsichtigen Silberschicht angestellt hat. Die Methode der Beobachtung gab nicht $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_p$ für sich, sondern nur $\mathfrak{R}_s/\mathfrak{R}_p = \rho$. Für den Polarisationswinkel $\overline{\varphi}$ giebt Herr Quincke den Werth 74° 50', für das zugehörige $\overline{\rho}$ den Werth 0,943; nach Tafel I. würde daher etwa

$$\varkappa = 15{,}0 \qquad n = 0{,}23$$

zu wählen sein. In der That haben directe Bestimmungen Herrn Quincke's, auf welche später eingegangen werden wird, für Silber $n < 1$ ergeben.

Diese Zahlen ergeben zunächst die Hülfsgrößen μ und ν sowie γ_1 wie folgt:

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
0°	15° 48'	16° 23'	15° 48'	16° 23'	1,000
25	17 24	18 8	14 15	14 44	0,995
35	19 11	23 3	12 56	13 19	0,989
45	22 3	20 9	11 8	11 25	0,982
55	26 25	28 10	9 2	9 17	0,976
65	33 50	36 30	6 39	6 45	0,970
74 50'	46 30	51 7	4 8	4 10	0,966
80	56 54	62 59	2 44	2 46	0,964
85	70 2	77 35	8	8	0,963

Hieraus folgt dann, in Theilen von π ausgedrückt, das System der Δ, zusammengestellt mit den direct beobachteten:

φ	Δ ber.	Δ beob.	Diff.
25°	0,036	0,020	+ 0,016
35	0,072	0,083	— 0,011
45	0,126	0,128	— 0,002
55	0,204	0,195	+ 0,009
65	0,316	0,319	— 0,003
74 50'	0,496	0,500	— 0,004
80	0,636	0,631	+ 0,005
85	0,819	0,811	+ 0,008

Ferner die Werthe $\mathfrak{R}_s$ $\mathfrak{R}_p$ und ρ, letztere mit den direct beobachteten verglichen:

φ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ ber.	ρ beob.	Diff.
25°	0,962	0,968	0,994	1,023	— 0,027
35	0,959	0,972	0,987	0,991	— 0,004
45	0,953	0,975	0,978	0,957	+ 0,021
55	0,943	0,980	0,965	0,939	+ 0,026
65	0,937	0,986	0,951	0,957	— 0,006
74 50'	0,932	0,991	0,940	0,943	— 0,003
80	0,942	0,994	0,948	0,967	— 0,019
85	0,963	0,997	0,966	1,008	— 0,042

1) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 128 p. 553. 1866.

Wie die Jamin'schen so sind auch die Quincke'schen Beobachtungen der Amplituden weit mehr mit Beobachtungsfehlern behaftet, als die Messungen von Δ; dies erkennt man, abgesehen von der Vergleichung mit der Theorie, bei einer graphischen Darstellung der Beobachtungsresultate (Vergl. Tafel III.). Die Uebereinstimmung mit unseren Formeln erweist sich auch hier bei so ganz anderen Werthen der Constanten n und $\varkappa$ durchaus befriedigend.

Noch gebe ich den Werth von $\mathfrak{R}_p$ und $\mathfrak{R}_s$ für $\varphi = 0$ nämlich:

$$\mathfrak{R}_0 = 0{,}962_5;$$

derselbe zeigt, daß, wie bei Stahl, auch bei Silber die Curve für $\mathfrak{R}$ von $\varphi = 0$ aus zunächst ansteigt und sich erst etwa von $\varphi = 10^0$ an zu senken beginnt.

Das für die Größe der Absorption maßgebende Product $n\varkappa$ findet sich für Silber

$$n\varkappa = 3{,}45,$$

und es würde demgemäß das Silber, mit welchem Herr Quincke operirt hat, noch etwas undurchsichtiger sein als Stahl.

Herr Wernicke[1]) hat das Product $n\varkappa$ durch directe Beobachtungen bestimmt; er nennt es den Extinctionscoëfficienten und bezeichnet es mit dem Buchstaben g. Die Werthe, die er für rothes Licht (Frauenhofer'sche Linie C) angiebt, sind für fünf verschiedene Silberplatten:

3,44   3,86   3,82   3,32   3,40

also in vollständiger Uebereinstimmung mit dem Resultate unserer Theorie.

Die für andere Farben erhaltenen Resultate zu vergleichen müssen wir erst die Constanten des Silbers für dieselben bestimmen. Dazu benutzen wir (da Herr Wernicke mittheilt, daß seine Silberplatten analoge Werthe ergeben haben) die Beobachtungen Jamin's[2]), welche für Silber (massive Silberplatten) ergeben haben:

	$\overline{\varphi}$	$\overline{\psi}_s$	$\overline{\rho}$	also: n	$\varkappa$
mittl. Roth	75° 0′	40° 59′	0,932	0,28	12,5
Linie D	72 3	40 9	0,919	0,27	10,7
» E	71 30	40 19	0,921	0,26	10,1
» F	69 34	39 46	0,912	0,24	9,7
» H	66 12	39 50	0,913	0,21	9,2

Herrn Wernicke's Beobachtungen geben für $n\varkappa$:

1) Wernicke, Pogg. Ann. Erg. Bd. 8 p. 75. 1878.
2) Jamin, Ann. de chim. (3) Bd. 22 p. 316. 1848.

Linie							
C	3,44	3,86	3,82	3,32	3,40,	berechnet ist	3,5
D	3,08	3,54	3,47	3,05	3,17	»	2,9
E	2,77	3,18	3,12	2,77	2,89	»	2,6
F	2,54	2,94	2,88	2,53	2,67	»	2,3
(G—H)/2	2,16	2,41	2,49	2,21	2,28	»	2,1 (interpolirt.)

Die berechneten Werthe sind mit den aus den Cauchy'schen Formeln folgenden identisch, wir werden daher nach den auf sie bezüglichen Worten Herrn Wernicke's [1]) seine Beobachtungen auch als eine Bestätigung unserer Gleichungen ansehen dürfen.

Bei schiefem Einfall wird der Exponent, welcher die Absorption bestimmt, $n\varkappa/\gamma_1$ statt $n\varkappa$, ohne sich sonst irgend zu ändern; die Werthe γ_1 in der Tabelle auf S. 162 zeigen, daß er sich dabei im Maximum um vier Hundertel vergrößert, die Absorption also bei schiefem Durchgang durch eine Platte nur sehr wenig stärker sein kann, als bei normalem. Ueber diese Aenderung liegen gleichfalls Beobachtungen von Herrn Wernicke [2]) vor. Für drei verschiedene dünne Silberschichten theilt er die folgenden Zahlen mit, deren negative Logarithmen für die angegebenen Frauenhofer'schen Linien mit unserer Größe $n\varkappa/\gamma_1$ proportional sein sollen; der Einfallswinkel, auf welchen sie sich beziehen, ist über die betreffende Columne gesetzt.

	I.		II.		III.	
	0°	60°	0°	80°	0°	75°
C	0,287	0,281	0,672	0,663	0,565	0,557
D	0,275	0,265	0,659	0,650	0,553	0,550
E	0,272	0,267	0,643	0,637	0,551	0,541
F	0,273	0,260	0,642	0,636	0,552	0,542
G	0,262	0,250	0,636	0,626	0,550	0,532
(G—H)/2	0,260	0,245	0,630	0,615	0,540	0,526.

Um diese Zahlen mit der Beobachtung zu vergleichen, ist zunächst γ_1 für die verschiedenen Farben und Einfallswinkel zu bestimmen, wozu die nach den Jamin'schen Beobachtungen berechneten n und $\varkappa$ zu benutzen sind. Indem ich die Linie G übergehe, für welche Jamin keine Werthe angiebt erhalte ich [3]) folgendes System der γ_1:

	60°	75°	80°
C	0,974	0,968	0,967
D	0,962	0,952	0,950
E	0,952	0,943	0,940
F	0,942	0,928	0,925
(G—H)/2	0,928	0,911	0,908.

Ihre Benutzung läßt aus den für 0° gegebenen Zahlenwerthen die für die größeren Einfallswinkel geltenden berechnen. Man erhält die folgende Zusammenstellung:

1) Wernicke l. c. p. 81.

2) Wernicke, Pogg. Ann. Bd. 155, p. 94, 1875.

3) Die Berechnung ist, wie die meisten andern, mit dem Rechenschieber angestellt, also im Resultate in der 3. Ziffer schon nicht mehr vollständig sicher.

	I. 60°		II. 80°		III. 75°	
	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.
C	0,281	0,278	0,663	0,663	0,557	0,555
D	0,265	0,261	0,650	0,645	0,550	0,537
E	0,267	0,255	0,637	0,625	0,541	0,532
F	0,260	0,252	0 636	0,620	0,542	0,528
$(G-H)/2$	0,245	0,234	0,615	0,601	0,526	0,509.

Die Uebereinstimmung ist durchaus befriedigend, wenn man berücksichtigt, daß Herr Wernicke selbst die Unterschiede der bei verschiedenen Einfallswinkeln erhaltenen Zahlen als »unter der Grenze der Beobachtungsfehler liegend« bezeichnet.

Eine wichtige Prüfung unserer Formeln in einer anderen Richtung würde möglich sein, wenn ausführliche Beobachtungen über das Verhalten desselben Metallspiegels in Luft und in verschiedenen Flüssigkeiten vorlägen, denn deren Resultate müßten durch dasselbe $\varkappa$ und ein nur durch Division mit dem Brechungscoefficienten (n) der Flüssigkeit geändertes n darstellbar sein. Dergleichen fehlen aber; Herr Quincke[1]) hat zwar die Reflexion an der Rückseite derselben Silberschicht, auf welche sich die oben berechneten Beobachtungen bezogen, innerhalb des Flintglasprismas, an welchem die Schicht niedergeschlagen war, zu einer Reihe von Beobachtungen benutzt, indeß haben sie, als auf eine andere Fläche bezüglich, wenig beweisende Kraft[2]). Denn, wie Herr Quincke wiederholt betont[3]), wirkt eine verschiedene mechanische Behandlung der chemisch niedergeschlagenen Schichten außerordentlich auf das optische Verhalten ein und man wird unzweifelhaft die direct dem polirenden Instrument ausgesetzte Fläche und die Rückfläche der Schicht als verschieden ansehen müssen. Ueberdies scheinen die betreffenden Beobachtungen besonders schwierig zu sein, denn der Verlauf der Resultate ist wenig stetig. Ich habe mich demgemäß mit der Berechnung nur eines Zahlwerthes begnügt. Herr Quincke giebt den Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ zu $69°48'$ an, dafür müßte also $\bar{\Delta} = 0{,}50$ sein; zugleich ist $\bar{\rho} = 0{,}881$ direct beobachtet, verbindet man aber die sämmtlichen Beobachtungen durch eine möglichst stetige Curve, welche für $\varphi = 90°$ $\rho = 1$ ergiebt, so wird man etwa auf $\bar{\rho} = 0{,}891$ geführt. Die Berechnung mit dem alten Werthe $\varkappa = 15$ und dem wegen des Brechungscoefficienten des Flintglases (n) $= 1{,}626$ wie angegeben geänderten $n = 0{,}131$ ergiebt $\bar{\Delta} = 0{,}48$, $\bar{\rho} = 0{,}94$, also viel bedeutendere Abweichungen als oben gefunden, was nach dem Gesagten nicht Wunder nehmen wird.

1) Quincke l. c. p. 554.

2) Dasselbe gilt von zwei Beobachtungsreihen an Gold und Silber in Crownglas l. c. p. 550 u. 557.

3) Quincke l. c. p. 547, 552 u. a. a. O.

Noch finden sich in Herrn Quincke's[1]) Arbeit drei einzelne Zahlwerthe, die durch Reflexion an einem Silberspiegel derselben Art wie der oben besprochne in Luft, Wasser und Terpentinöl erhalten sind, nämlich:

in Luft $\bar{\varphi} = 74^\circ 19'$ $\bar{\psi}_1 = 43^\circ 48'$ also $\bar{\rho} = 0{,}959$ bei $(n) = 1$
in Wasser $\bar{\varphi} = 71^\circ 28'$ $\bar{\psi}_1 = 44^\circ\ 3'$ » $\bar{\rho} = 0{,}968$ » $(n) = 1{,}336$
in Terpentin $\bar{\varphi} = 69^\circ 16'$ $\bar{\psi}_1 = 43^\circ 21'$ » $\bar{\rho} = 0{,}944$ » $(n) = 1{,}474$.

Nach Tafel I und durch genaueres Probiren ergiebt sich als wahrscheinlich für die benutzte Silberplatte

$$n = 0{,}20 \quad \varkappa = 17, \text{ also } n.\varkappa = 3{,}40 \text{ (nahe wie oben p. 163)},$$

woraus dann folgt

in Luft für $\bar{\varphi} = 74^\circ 19'$ $\bar{\Delta} = 0{,}493$ $\bar{\mathfrak{R}}_s = 0{,}940$ $\bar{\mathfrak{R}}_p = 0{,}990$
$\bar{\rho} = 0{,}950$,
in Wasser für $\bar{\varphi} = 71^\circ 28'$ $\bar{\Delta} = 0{,}520$ $\bar{\mathfrak{R}}_s = 0{,}939$ $\bar{\mathfrak{R}}_p = 0{,}980$
$\bar{\rho} = 0{,}950$,
in Terpentin für $\bar{\varphi} = 69^\circ 16'$ $\bar{\Delta} = 0{,}496$ $\bar{\mathfrak{R}}_s = 0{,}930$ $\bar{\mathfrak{R}}_p = 0{,}987$
$\bar{\rho} = 9{,}951$.

Nach der Beobachtung sollte $\bar{\Delta}$ überall $= 0{,}500$ sein. Die Uebereinstimmung ist im Vergleich mit den obigen ausführlichen und unter günstigeren Umständen gemachten Beobachtungsreihen völlig befriedigend; besonders wenn man bedenkt, daß bei der Beobachtung in Flüssigkeiten neue Fehlerquellen dadurch kommen, daß auf dem Spiegel condensirte Gasschichten die vollständige Benutzung verhindern und wie dünne Luftplatten auf die Werthe von $\bar{\Delta}$ und $\bar{\rho}$ einwirken können.

Den allgemeinen Verlauf der Aenderung von $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}_1$, welche eintritt, wenn man die Metallreflexionen in Medien von verschiedenen Brechungscoefficienten stattfinden läßt, übersieht man übrigens schon aus der Curventafel I. Da mit wachsendem Brechungscoefficienten des umgebenden Mediums (n) das in Rechnung zu ziehende n abnimmt, während $\varkappa$ sich nicht ändert, so folgt sogleich die Regel:

Bei der Reflexion in einem optisch dichteren Medium wird der Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ *verkleinert*, das Hauptazimuth $\bar{\psi}_1$ (und also $\bar{\rho}$) hingegen sehr wenig *vergrößert*[2]).

1) Quincke l. c. p. 561.
2) Vergl. Quincke l. c. p. 561.

Etwas ausführlichere Beobachtungen über die Reflexion an Silber (und Gold) in Luft und 2 Flüssigkeiten — insofern sie sich auf verschiedene Farben, leider nicht auch auf verschiedene Einfallswinkel beziehen — sind von Herrn Conroy[1]) mitgetheilt und ich habe mehrere Reihen davon berechnet. Dieselben zeigen sich sehr verschieden; einige stimmen vollständig mit der Theorie, die meisten ergeben Abweichungen und zwar alle in demselben Sinne, so daß nämlich für die Beobachtungen in den Flüssigkeiten der aus den Messungen in Luft berechnete Polarisationswinkel bis fast 2°, das Hauptazimuth um etwas weniger zu klein erscheint.

Ich möchte hieraus schließen, daß die Metallspiegel von den Flüssigkeiten oft nicht vollständig benetzt worden sind; in der That würde eine dünne adhärirende Luftschicht, wie die Ueberlegung zeigt, in dem erwähnten Sinne störend wirken und wie sehr dergleichen an blanken Metallflächen haften, ist ja bekannt. Eine Wiederholung derartiger Beobachtungen unter geeigneten Vorsichtsmaßregeln wäre daher sehr erwünscht. —

Da die oben eingeführten Hülfswinkel μ und ν nach (17) und (24) die Eigenschaft haben, daß

$$\mu_s + \nu_s = -\frac{\vartheta_s}{\tau} \qquad \mu_p + \nu_p = -\frac{\vartheta_p}{\tau}$$

d. h. gleich den bei einer Reflexion stattfindenden Verzögerungen sind und wir aus den Beobachtungen in Luft die Constanten für den Uebergang des Lichtes in das Metall aus beliebigen Körpern bestimmen können, so lassen sich auch die sehr interessanten Beobachtungen Herrn Wernickes[2]) über den Werth der Verzögerung, welche bei der Reflexion an Silber in Glas eintritt berechnen. Herr Wernicke findet dafür Werthe, die für die verschiedenen Farben unregelmäßig zwischen π. 0,56 und π. 0,42 schwanken.

Führt man den Brechungscoefficienten des von Herrn Wernicke benutzten Glases = 1,52 ein, so wird für normalen Einfall:

$$\operatorname{tg}\nu_0 = \frac{x}{\frac{n}{1{,}52}\cdot(1+x^2)-1} \qquad \operatorname{tg}\mu_0 = \frac{x}{\frac{n}{1{,}52}(1+x^2)+1}.$$

Hier hinein sind die aus Jamins Beobachtungen oben (p. 163) berechneten Werthe n und x zu setzen.

---

1) Conroy, Proc. Roy. Soc. Bd. 28, p. 242, 1879, Bd. 31, p. 486, 1881. Diese Beobachtungen zeigen sehr deutlich den Einfluß verschiedener Polirmittel auf die beobachteten Werthe von $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}_1$.

2) Wernicke, Pogg. Ann. Bd. 159, p. 219, 1876.

Man erhält die Werthe $\mu_0 + \nu_0 = -\vartheta/\tau$ in Theilen von π ausgedrückt in runden Zahlen wie folgt:

$$0,26 \quad 0,31 \quad 0,34 \quad 0,37 \quad 0,44.$$

Dieselben sind also erheblich kleiner als die beobachteten[1]. Dabei sind aber, abgesehen von den Verschiedenheiten, welche das von Herrn Wernicke niedergeschlagene Silber gegen das von Jamin benutzte sowohl hinsichtlich der Reinheit, als namentlich der durch die Politur stark beeinflußten Oberflächenbeschaffenheit, besessen haben mag, zwei wichtige Umstände nicht außer Acht zu lassen. 1) hat Herr Wernicke mit einer durchsichtigen[2] Silberschicht operirt und giebt selber an (was auch die Theorie fordert), daß bei wachsender Dicke derselben der beobachtete Werth von $-\vartheta/\tau$ kleiner wird, 2) ist wohl denkbar, daß die Silberschicht unmittelbar am Glas nicht diejenige Dichtigkeit der Constitution besitzt, die man ihr an der freien Seite durch Poliren mittheilt, also das Licht etwas tiefer auf der Glasseite als auf der freien eindringen kann. Beide Umstände würden zu große beobachtete Werthe von $-\vartheta/\tau$ veranlassen. Können demnach jene Beobachtungen Wernicke's auch nicht als eine besondre Bestätigung unserer Theorie angeführt werden, so sind sie doch noch weniger gegen dieselbe zu verwenden. Herr Wernicke erklärt sich wenigstens in einer späteren Arbeit[3] hinsichtlich der Cauchy'schen Theorie in diesem Sinne.

Endlich theile ich späterer Anwendungen wegen die vollständige Berechnung einer Quincke'schen Beobachtungsreihe für die Reflexion an Gold (auf Glas niedergeschlagen) in Luft mit[4].

Ich wähle gemäß der Angabe, daß dafür $\bar{\varphi} = 70^0 40'$ und $\bar{\psi}_1$ etwa $= 42^0,5$ also $\bar{\rho} = 0,91$ ist:

$$\varkappa = 8,8 \qquad n = 0,28$$

und erhalte hiernach:

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
0^0	$20^0 57'$	$22^0 47'$	$20^0 57'$	$22^0 47'$	1,000
25	23 17	25 33	19 5	20 30	0,983
35	25 8	27 50	17 12	18 22	0,975
45	28 50	32 20	14 52	15 42	0,962
55	33 58	39 0	12 2	12 38	0,950
65	42 12	49 5	8 55	9 12	0,942
70 40'	47 56	57 6	6 54	7 8	0,936
80	61 57	74 38	3 41	3 44	0,931
85	71 20	85 50	1 52	1 53	0,927.

1) Sie stimmen mit den von Herrn Eisenlohr aus der Cauchy'schen Theorie berechneten überein. Vergl. die mitgetheilten Werthe für $0,5 + \vartheta/2\pi\tau$. Eisenlohr, Wied. Ann. Bd. I, p. 204, 1877.

2) Wernicke l. c. p. 219.

3) Wernicke, Wied. Ann. Bd. 3, p. 133, 1878.

4) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 128, p. 556, 1866.

Hieraus folgen die Phasendifferenzen Δ in Theilen von π, verglichen mit den direct beobachteten:

φ	Δ ber.	Δ beob.	Diff.
25°	0,051	0,051	± 0
35	0,097	0,099	− 0,002
45	0,170	0,170	± 0
55	0,267	0,259	+ 0,004
65	0,406	0,400	+ 0,006
70 40′	0,506	0,500	+ 0,006
80	0,719	0,725	− 0,006
85	0,852	0,855	− 0,003.

Ferner die Amplituden und ihr Verhältniß ρ, letzteres gleichfalls mit den beobachteten Werthen zusammengestellt:

φ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ ber.	ρ beob.	Diff.
25	0,917	0,934	0,982	0,988	− 0,006
35	0,910	0,940	0,968	0,988	− 0,020
45	0,903	0,949	0,953	0,988	− 0,035
55	0,895	0,956	0,937	0,925	+ 0,012
65	0,890	0,966	0,922	0,911	+ 0,011
70 40′	0,885	0,975	0,908	0,925	− 0,017
80	0,916	0,988	0,928	0,926	+ 0,002
85	0,950	0,995	0,955	0,930	+ 0,025.

Die für 35° und 45° beobachteten Werthe ρ sind, wie zumal eine Construction derselben zeigt, stark fehlerhaft. Im übrigen erweist sich die Theorie vollständig im Einklang mit der Beobachtung.

Die reflectirte Amplitude bei senkrechtem Einfall hat hier den Werth

$$\mathfrak{R}_0 = 0{,}913.$$

Die Stärke der Absorption giebt das Product an:

$$n\varkappa = 2{,}46.$$

Es ist also Gold merklich durchsichtiger, wie Silber. Dies stimmt völlig mit den directen Resultaten Herrn Quincke's[1]), nach welchen Goldblatt von 0,00016 mm und Silber von 0,00011 mm Dicke noch eben durchsichtig ist. Da die erstere Dicke ungefähr ein Viertel Wellenlänge in Luft ist, letztere etwa ein Sechstel, so folgt, daß beim Hindurchgang durch diese Gold- und Silberschichten eine Schwächung der Amplituden im Verhältniß

$$e^{-3,8} \quad \text{und} \quad e^{-3,4}$$

d. h. im Mittel auf etwa 1/36 und der Intensität auf 1/1300 stattgefunden hat. In Rücksicht auf die höchst unsichere Dickenbestimmung und auf die Möglichkeit, daß sich die Metalle, auf welche sich die letzten Angaben Herrn Quincke's beziehen, ganz anders verhalten

1) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 120, p. 602, 1863 und Bd. 129, p. 183 sowie 193, 1866.

haben, als die, an welchen die Werthe $\varkappa$ und n bestimmt sind, wird man auch mit der Uebereinstimmung der beiden Exponenten zufrieden sein können.

Uebrigens kann man hinsichtlich der Durchsichtigkeit der Metalle aus unserer Tafel I. noch einen Schluß ziehen. Da nämlich die Curven für constantes $\overline{\varphi}$ nicht sehr stark von gleichseitigen Hyperbeln abweichen, so kann man behaupten, daß im Allgemeinen diejenigen Metalle, welche die kleineren Polarisationswinkel $\overline{\varphi}$ besitzen, die durchsichtigeren sind, und zwar mit um so größerer Sicherheit, je weniger sie gleichzeitig hinsichtlich des Hauptazimuthes $\overline{\psi}_1$ von einander abweichen.

Herr S. Haugthon[1]) hat eine größere Anzahl von Metallen auf ihre optischen Constanten hin nach der Jamin'schen Methode untersucht; obgleich die erhaltenen Zahlen wegen der großen Verschiedenheit des Verhaltens, welches dasselbe Metall in verschiedener Bearbeitung zeigt, keine allgemeine Bedeutung haben, so dürfte es doch von Interesse sein, ungefähre Werthe der Constanten n und $\varkappa$ unserer Theorie und aus ihnen das Maaß der Absorption $n.\varkappa$ zu berechnen.

Herr Haugthon giebt für die von ihm beobachteten Metalle den »Haupteinfallswinkel« (Principal incidence) an, für welchen die gegenseitige Verzögerung der beiden Componenten $\pi/2$ beträgt; derselbe ist identisch mit unserm $\overline{\varphi}$. Ferner die »Kreisgrenze« (Circular limit) d. h. dasjenige Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes, welches bei der Reflexion unter dem Haupteinfallswinkel circularpolarisirtes Licht liefert, sowie dessen Cotangente, welche er den »Reflexionscoefficienten« nennt. Dies Azimuth η ist dadurch definirt, daß dafür $\overline{R}_s$ und $\overline{R}_p$ gleich groß werden. Nun ist allgemein:

$$R_s = E_s \cdot \mathfrak{R}_s = E \sin\eta \cdot \mathfrak{R}_s$$
$$R_p = E_p \cdot \mathfrak{R}_p = E \cos\eta \cdot \mathfrak{R}_p,$$

es folgt also aus $\overline{R}_s = \overline{R}_p$ die Relation für den »Reflexionscoefficienten«:

$$\operatorname{cotg}\overline{\eta} = \frac{\overline{\mathfrak{R}}_s}{\overline{\mathfrak{R}}_p} = \overline{\rho}$$

und das Azimuth der »Kreisgrenze« drückt sich in unserm $\overline{\psi}_1$ aus:

$$\overline{\eta} = \frac{\pi}{2} - \overline{\psi}_1.$$

1) S. Haugthon, Phil. Trans. 1863, I, p. 87.

Ich stelle im Folgenden die beobachteten Werthe mit den daraus mittelst der Tafel I, ohne genauere Rechnung geschlossenen Werthen n, $\varkappa$ und $n.\varkappa$, welches letztere das Maaß der Absorption giebt, zusammen. Die Zahlen gelten für rothes Licht.

	$\bar{\varphi}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\rho}$	n	$\varkappa$	$n\varkappa$
Spiegelmetall	76° 33′	55° 32′	0,687	1,47	2,5	3,7
Silber[1]) gewalzt	72 7	48 20	0,890	0,37	7,7	2,85
» (gegossen)	78 7	47 13	0,926	0,39	11,3	4,4
» (gewalzt)	78 22	47 12	0,926	0,40	11,3	4,5
Gold	75 37	47 47	0,907	0,40	8,7	3,5
Quecksilber	81 4	53 49	0,732	1,65	3,5	5,8 (?)
Platin	76 37	54 0	0,727	1,3	3,0	3,9
Palladium	77 37	54 47	0,706	1,54	2,7	4,2
Kupfer	71 53	49 9	0,866	0,42	6,5	2,7
Zink	77 22	53 57	0,728	1,35	3,0	4,05
Blei	69 37	71 55	0,327	2,2	0,7	1,54(?)
Wismuth	73 37	55 2	0,699	1,17	2,5	2,9
Zinn	75 7	53 43	0,734	1,15	2,9	3,3
Eisen	76 7	62 42	0,516	2,25	1,4	3,15
Stahl	77 37	62 33	0,520	2,35	1,5	3,5
Aluminium	77 7	57 9	0,646	1,85	2,1	3,9

Die Zahlenwerthe für $\bar{\varphi}$ und $\bar{\rho}$ weichen stark von den Jamin'schen ab; unzweifelhaft ist dabei außer der Herstellungsart und der chemischen Zusammensetzung des Metalles auch das angewandte Polirmittel von Einfluß. Was die gefundenen Brechungscoefficienten n angeht, so variiren dieselben in weiten Grenzen von 0,37 und 0,40 für Silber und Gold bis 2,2 und 2,3 für Blei und Eisen. Umgekehrt steht Blei mit dem kleinsten $\varkappa$(0,7) dem Silber mit dem größten (11,3) gegenüber. Das Maaß der Absorption $n\varkappa$ variirt bei Weitem nicht so stark, die äußersten Grenzwerthe zeigen Blei (1,54) und Quecksilber (5,8) — beide etwas unsicher, weil schon aus dem Bereich der direct berechneten Werthe in Tafel I. herausfallend. Blei würde also das durchsichtigste, Quecksilber das undurchsichtigste der in der Reihe enthaltenen Metalle sein.

Nochmals sei betont, daß die angegebenen Zahlenwerthe für n und $\varkappa$ nur geschätzt sind und wohl um den zwanzigsten Theil falsch sein können.

In derselben Weise, wie die Haughton'schen Resultate, will ich schließlich auch noch einige von Jamin gegebene Zahlenwerthe verwenden, welche darum besonderes Interesse erregen, weil sie unter Benutzung von verschiedenfarbigem Licht erhalten sind. Eine vollständige Berechnung habe ich nicht angestellt, weil die Aenderungen, namentlich von $\bar{\rho}$, mit der Farbe sich mitunter völlig

1) Die Beobachtungen beziehen sich auf verschiedene Sorten Silber.

unter den Beobachtungsfehlern verstecken[1]); sie wird wohl erst am Platze sein, wenn einmal Mittel gewonnen sind, die sehr subtilen Beobachtungen mit größerer Genauigkeit anzustellen. Vorläufig mag die Mittheilung derjenigen Zahlenwerthe n und $\varkappa$ genügen welche für Roth, Grün und Violett sich aus der Curventafel I. ablesen lassen.

	$\overline{\varphi}$	$\overline{\psi}_2$[2])	$\overline{\rho}$	n	$\varkappa$	$n\varkappa$
Silber						
Roth	75° 0′	40° 59′	0,933	0,28	12,6	3,5
Grün	71 30	40 19	0,920	0,26	10,3	2,7
Violett	66 12	39 50	0,912	0,21	9,2	1,9
Glockengut						
Roth	74° 15′	28° 46′	0,724	1,15	2,7	3,1
Grün	72 20	25 31	0,692	1,15	2,3	2,6
Violett	70 11	22 31	0,644	1,12	2,0	2,2
Stahl						
Roth	77° 4′	16° 29′	0,544	2,3	1,6	3,7
Grün	75 47	17 30	0,561	2,1	1,5	$3{,}1_5$
Violett	74 3	20 26	0,611	1,7	1,7	2,9
Zink						
Roth	75° 11′	17° 9′	0,556	2,0	1,5	3,0
Grün	73 28	21 13	0,622	$1{,}5_8$	1,8	2,8
Violett	70 49	25 50	0,695	$0{,}9_8$	2,4	2,3
Spiegelmetall						
Roth	76° 14′	28° 37′	0,738	1,25	3,0	3,7
Grün	73 35	25 52	0,697	1,2	2,4	2,9
Violett	71 22	27 56	0,728	0,89	2,7	2,4
Kupfer						
Roth	71° 21′	28° 22′	0,735	0,87	2,8	2,4
Grün	68 44	18 7	0,572	1,38	1,4	1,9
Violett	66 56	15 57	0,535	1,32	1,2	1,6
Messing						
Roth	71° 31′	29° 40′	0,755	0,79	3,0	2,4
Grün	68 19	27 0	0,715	0,8	2,6	2,1
Violett	64 16	17 38	0,564	1,2	1,2	1,4(?)

Hierzu füge ich einige Werthe aus einer neueren sehr ausführlichen Beobachtungsreihe von Herrn Quincke[2]); sie beziehen sich auf die Fraunhofer'schen Linien C, E, G.

1) Z. B. sind die für Silber beobachteten Werthe von $\overline{\psi}_2$ (wo $\operatorname{tg}\overline{\psi}_2 = \overline{\rho}^2$ ist) von Roth bis Blau: 40°59′, 40°23′, 40°9′, 40°17′, 40°19′, 39°46′, 39°55′, 39°55′, 39°50′: das allgemeine Herabsinken der Werthe erscheint also durch zweimaliges Ansteigen unterbrochen.

2) Ich halte die von Jamin angegebenen Winkel für die nach zweimaliger Reflexion erhaltenen Azimuthe ψ_2, wie auch Eisenlohr (Wied. Ann. Bd. I, p. 202 Anm. 1877), Mousson (Physik Bd. II, p. 540, 1872) im Gegensatz zu Wüllner (Physik Bd. II, p. 484, 1875).

2) Quincke, Pogg. Ann. Jubel-Bd. p. 336, 1874.



	$\bar{\varphi}$	$\bar{\psi}_1$	$\bar{\rho}$	n	$\varkappa$	$n\varkappa$
Aluminium						
Roth	77° 10′	39° 9′	0,70	1,48	2,7	4,0
Grün	75 14	36 36	$0{,}74_5$	1,11	3,1	3,4
Violett	72 48	38 1	0,78	0,75	3,7	2,8
Kobalt						
Roth	76° 45′	30° 59′	0,60	2,07	1,8	3,7
Grün	75 8	31 56	$0{,}62_5$	1,73	1,8	3,1
Violett	71 52	32 28	0,64	1,32	1,8	2,4
Nickel						
Roth	77° 22′	32° 12′	0,63	1,8	2,0	3,6
Grün	74 55	32 2	$0{,}62_5$	1,6	1,9	3,0
Violett	72 5	31 39	0,62	$1{,}4_5$	1,8	2,6
Platin [1]						
Roth	78° 28′	31° 58′	$0{,}62_5$	2,05	2,1	4,3
Grün	76 8	32 28	0,64	1,70	2,0	3,4
Violett	73 39	32 17	0,63	1,55	1,9	2,9
Wismuth						
Roth	77° 9′	34° 22′	0,68	1,57	2,4	3,8
Grün	73 47	34 46	0,69	1,27	2,3	2,9
Violett	70 58	38 40	0,69	1,03	2,3	2,4
Zinn						
Roth	77° 16′	34° 34′	0,69	1,52	2,5	3,8
Grün	73 23	36 2	0,73	1,01	2,9	2,9
Violett	70 8	36 11	0,73	0,83	2,8	2,3

Die Constanten von Selen lassen sich aus unserer Tafel I. nicht bestimmen.

Diese, wie gesagt, nur ganz angenäherten Werthe n und $\varkappa$ ergeben für alle Metalle mit Ausnahme von Kupfer und seiner Legierung (Messing) Brechungscoefficienten, welche mit wachsender Wellenlänge selbst wachsen, also Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche mit wachsender Wellenlänge abnehmen. Unsere Theorie gibt dies als vollkommen zulässig, denn nach (28) ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gegeben durch

$$M\omega_1^2 = \frac{c_1(1+\varkappa^2)^2}{2\varkappa} = \frac{c(1+\varkappa^2)^2}{2\varkappa\tau}.$$

Um numerische Folgerungen über c zu ziehen und über seine Constanz oder Abhängigkeit von τ zu entscheiden, dürften die berechneten n und $\varkappa$ zu ungenau sein.

Die Werthe von $\varkappa$ nehmen meist ebenfalls mit wachsender Wellenlänge zu, nur bei Zink, Zinn und Aluminium ab, während sie bei Stahl, Kobalt und Wismuth merklich constant bleiben. Das

1) Platin ergiebt sich hienach stärker absorbirend als selbst Silber. Dem entgegen giebt Herr Quincke als Resultat vorläufiger Messungen an, daß es fast dreimal so durchsichtig wäre. Angesichts der vielfachen Bestätigungen der Theorie möchte ich jenes Resultat vorläufig noch bezweifeln. (Quincke, Pogg. Ann. Bd. 129, p. 188).

Product $n\varkappa$ nimmt für alle angeführten Metalle mit der Wellenlänge zu; da es aber in der Exponentialgröße (8a) durch $2\pi\tau\omega = \lambda$ dividirt ist, so wird die Absorption für rothes Licht oder für violettes Licht stärker sein, je nachdem das Verhältniß $n\varkappa/\lambda$ dafür größer oder kleiner ist. Da sich die Wellenlängen von rothem und violettem Licht ungefähr wie 7 zu 4 (Jamin) resp. 6 zu 4 (Quincke) verhalten, so würde nach unserer Theorie in Uebereinstimmung mit der Beobachtung [1]) das von Jamin benutzte Silber roth stärker absorbiren als violett, — ähnlich Kobalt, Wismuth und Zinn, dagegen Stahl, Zink, Spiegelmetall, Kupfer, Aluminium und Nickel violett stärker als roth, während Glockengut, Messing und Platin roth und violett ziemlich gleich stark absorbiren.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchung sind folgende:

Stellt man sich die Frage, welche Gesetze für die auf den Aether in ponderabeln Körpern wirkenden Kräfte die Eigenschaft haben, für alle in dem Aether fortgepflanzten Bewegungen einen Verlust an Energie zu ergeben, so erhält man zwei Gattungen von Ausdrücken, welche lineäre Functionen der ersten Differentialquotienten nach der Zeit von den Verschiebungen resp. den Drehungen sind.

Die allgemeinsten ebenen Wellenbewegungen, welche unter der Wirkung dieser Kräfte, also in einem absorbirenden Medium möglich sind, sind aufgestellt und die Formeln für deren Uebergang aus einem durchsichtigen Medium unter Zugrundelegung des Kirchhoff'schen Principes abgeleitet. Die erhaltenen Gesetze erklären die Erscheinungen der Metallreflexion; sie fallen in ihren numerischen Resultaten im Allgemeinen nahe mit den Cauchy'schen Formeln zusammen, von denen sie sich aber sowohl durch die strenge Ableitung als die definitive (allerdings unbequeme) Form durchaus unterscheiden.

Die Uebereinstimmung mit der Beobachtung entspricht allen Anforderungen in denjenigen Fällen, wo es die Darstellung von Beobachtungen gilt, die mit derselben unveränderten Metallfläche erhalten sind und ist nur in den Fällen mangelhaft, wo es sich um die Combination von Beobachtungen an verschiedenen gleichartigen Metallflächen oder an derselben bei verschiedener Oberflächenbeschaffenheit handelt.

Die Vergleichung derjenigen Erscheinungen, welche dünne Metallschichten im reflectirten und durchgegangenen Licht zeigen, mit der Theorie, bleibt einer späteren Mittheilung vorbehalten.

---

1) Vergl. Wernicke, Pogg. Ann. Erg. Bd. 8, p. 79, 1878.

Ueber einige elliptische Integrale.

Von

A. Enneper.

I.

In der Abhandlung: »Ueber Producte und Potenzen bestimmter einfacher Integralausdrücke, durch mehrfache dargestellt«, hat Raabe im 48. Bande des Journals von Crelle ein einfaches Verfahren mitgetheilt, Producte von Integralen durch Differentiation umzuformen. Es wird dabei vorausgesetzt, daß sämmtliche Integrale des Products, dieselbe obere oder untere Grenze haben, in Beziehung auf welche die Differentiation des Products auszuführen ist[1]). Für die folgenden Anwendungen ist die von Raabe gegebene Gleichung einer kleinen Modification unterworfen worden.

Es seien $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ zwei Functionen von u und v, welche innerhalb der Grenzen 0 und c endlich und stetig bleiben mögen und von c unabhängig sind. Die Gleichung:

$$(1) \qquad Q = \int_0^c \varphi(u)\,du \,.\int_0^c \psi(v)\,dv$$

nach c differentiirt gibt:

$$\frac{dQ}{dc} = \varphi(c)\int_0^c \psi(v)\,dv + \psi(c)\int_0^c \varphi(u)\,du.$$

Im ersten Integrale rechts setze man $v = tc$, im zweiten $u = tc$, es folgt dann:

$$(2) \qquad \frac{dQ}{dc} = c\varphi(c)\int_0^1 \psi(tc)\,dt + c\psi(c)\int_0^1 \varphi(tc)\,dt.$$

Diese Gleichung werde nach c integrirt und zwar von $c = 0$ an. Für $c = 0$ ist nach (1) $Q = 0$. Um nicht denselben Buchstaben als Grenze und als Integrationsvariabele zu haben, bezeichne man in

---

1) Es scheint, daß die bereits 1854 von Raabe gefundenen Resultate weniger Beachtung gefunden haben. In seiner Schrift »Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.« (Halle, 1875) schreibt im Nachtrag auf p. 48 Herr Thomae eine bemerkenswerthe Erweiterung der partiellen Integration Herrn Du Bois Reymond zu. Die betreffende Formel findet sich, nur wesentlich verschieden, schon bei Raabe.

(2) die Variabele der Integration durch w. Wird links, nach ausgeführter Integration, der Werth von Q aus (1) substituirt, so folgt:

$$\text{(A)}\qquad \int_0^c \varphi(u)\,du\,.\int_0^c \psi(v)\,dv =$$

$$\int_0^c w\varphi(w)\,dw\int_0^1 \psi(tw)\,dt + \int_0^c w\psi(w)\,dw\int_0^1 \varphi(tw)\,dt.$$

Durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite folgt:

$$\text{(B)}\qquad \int_0^c \varphi(u)\,du\,.\int_0^c \psi(v)\,dv =$$

$$\int_0^1 dt\int_0^c w\varphi(w)\,\psi(tw)\,dw + \int_0^1 dt\int_0^c w\psi(w)\,\varphi(tw)\,dw.$$

Es ist diese Gleichung, welche im Folgenden auf einige elliptische Integrale angewandt werden soll.

In der Gleichung (B) werde $c = 1$, $\varphi(u) = \frac{1}{1+u^2}$, $\psi(v) = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$ genommen. Auf der rechten Seite werde x statt w mittels der Gleichung $w^2 = x$ eingeführt. Es folgt dann:

$$\text{(3)}\qquad \frac{\pi}{2}\,.\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} =$$

$$\int_0^1 dt\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{(1-t^2x)(1-k^2t^2x)}} + \int_0^1 dt\int_0^1 \frac{dx}{(1+t^2x)\sqrt{(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Die unbestimmte Integration gibt:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{(1-t^2x)(1-k^2t^2x)}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}\log\frac{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1-k^2t^2x}+\sqrt{1+k^2t^2}\sqrt{1-t^2x}}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1-k^2t^2x}-\sqrt{1+k^2t^2}\sqrt{1-t^2x}}.$$

$$\int \frac{dx}{(1+t^2x)\sqrt{(1-x)(1-k^2x)}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(k^2+t^2)}}\log\frac{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1-k^2x}+\sqrt{k^2+t^2}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1-k^2x}-\sqrt{k^2+t^2}\sqrt{1-x}}.$$

In der Gleichung (3) bezeichne man das links stehende Integral

nach Jacobi durch K. Die Ausführung der Integration nach x gibt dann:

$$(4)\quad \frac{\pi}{2}K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} \log \frac{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}-\sqrt{(1+k^2t^2)(1-t^2)}}{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}+\sqrt{(1+k^2t^2)(1-t^2)}}$$

$$+\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} \log \frac{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+k^2t^2}}{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1+k^2t^2}}$$

$$+\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(k^2+t^2)}} \log \frac{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{k^2+t^2}}{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{k'+t^2}}.$$

Auf der rechten Seite setze man im zweiten Integrale $t = s$, im dritten Integrale $t = \frac{1}{s}$. Die beiden Integrale vereinigen sich dann zu:

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s^2)(1+k^2s^2)}} \log \frac{\sqrt{1+s^2}+\sqrt{1+k^2s^2}}{\sqrt{1+s^2}-\sqrt{1+k^2s^2}}.$$

Nimmt man weiter $s = \operatorname{tang} w$ und $k'^2 = 1-k^2$, so geht das vorstehende Integral über in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 w}} \log \frac{1+\sqrt{1-k'^2\sin^2 w}}{1-\sqrt{1-k'^2\sin^2 w}}.$$

Der Werth dieses Integrals ist bekanntlich πK, ein Resultat, welches sich auch leicht aus den in II geführten Untersuchungen ergibt. Die Gleichung (4) reducirt sich nach den vorhergehenden Bemerkungen auf:

$$(5)\quad \frac{\pi}{2}K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} \log \frac{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}+\sqrt{(1+k^2t^2)(1-t^2)}}{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}-\sqrt{(1+k^2t^2)(1-t^2)}}.$$

Die vorstehende Gleichung werde nach k differentiirt, darauf mit k'^2 multiplicirt. Man setze:

$$(6)\quad \frac{-k'^2t^2}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}^3} = \sqrt{\frac{1+t^2}{1+k^2t^2}} - \frac{d\, t\sqrt{\frac{1+t^2}{1+k^2t^2}}}{dt}.$$

Zur Abkürzung führe man die Bezeichnung ein:

$$(7)\quad R = \log \frac{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}+\sqrt{(1-t^2)(1+k^2t^2)}}{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}-\sqrt{(1-t^2)(1+k^2t^2)}}.$$

Es ist dann:

$$\frac{dR}{dk} = \frac{2k\sqrt{(1+t^2)(1-t^2)}}{k'^2\sqrt{(1+k^2t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{8}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{-2(1+k^2t^4)}{t\sqrt{(1+t^2)(1-t^2)}\sqrt{(1+k^2t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{9}$$

Mittels der vorstehenden Gleichungen findet man aus der Gleichung (5):

$$\frac{\pi}{2}k'^2\frac{dK}{dk} = k\int_0^1\sqrt{\frac{1+t^2}{1+k^2t^2}}\,Rdt - k\int_0^1 d\,\frac{t\sqrt{\frac{1+t^2}{1+k^2t^2}}}{dt}\,.\,Rdt \tag{10}$$

$$+\,2k\int_0^1\frac{\sqrt{1-t^2}}{(1+k^2t^2)\sqrt{1-k^2t^2}}\,dt.$$

Auf das zweite Integral rechts wende man die integratio per partes an. Wegen der Bedeutung von R aus (7) ist $t\,.\,R = 0$ für $t = 0$. Mit Rücksicht auf die Gleichung (9) lässt sich die Gleichung (10) auf folgende Form bringen:

$$\frac{\pi}{2}k'^2\frac{dK}{dk} = k\int_0^1\sqrt{\frac{1+t^2}{1+k^2t^2}}\,Rdt - 2k\int_0^1\frac{t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt. \tag{11}$$

Es ist bekanntlich:

$$k'^2\frac{dK}{dk} = k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 w}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}\,dw.$$

Das zweite Integral der Gleichung (11) bringe man auf die linke Seite, setze darauf in demselben $t = \sin^2 w$. Im ersten Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (11) substituire man den Werth von R aus (7). Durch Division mit k folgt:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 w}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}\,dw + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 w}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}\,dw = \tag{12}$$

$$\int_0^1 dt\sqrt{\frac{(1+t^2)}{(1+k^2t^2)}}\log\frac{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}+\sqrt{(1-t^2)(1+k^2t^2)}}{\sqrt{(1+t^2)(1-k^2t^2)}-\sqrt{(1-t^2)(1+k^2t^2)}}.$$

In der Gleichung (B) nehme man

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+u^2},\quad \psi(v) = \frac{1}{\sqrt{(1+v^2)(1+k^2v^2)}},\quad c = \infty$$

und setze rechts $w^2 = x$. Es folgt dann:

(13)
$$\pi\int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)(1+k^2v^2)}} =$$

$$\int_0^1 dt \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{(1+t^2x)(1+k^2t^2x)}} + \int_0^1 dt \int_0^\infty \frac{dx}{(1+t^2x)\sqrt{(1+x)(1+k^2x)}}.$$

Die unbestimmte Integration gibt:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{(1+t^2x)(1+k^2t^2x)}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\log\frac{\sqrt{1-k^2t^2}\sqrt{1+t^2x}+\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+k^2t^2x}}{\sqrt{1-k^2t^2}\sqrt{1+t^2x}-\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+k^2t^2x}}.$$

Für $k > t$ ist:

$$\int \frac{dx}{(1+t^2x)\sqrt{(1+x)(1+k^2x)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(k^2-t^2)}}\log\frac{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+k^2x}+\sqrt{k^2-t^2}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+k^2x}-\sqrt{k^2-t^2}\sqrt{1+x}}.$$

Ist $t > k$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{(1+t^2x)\sqrt{(1+x)(1+k^2x)}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2)}}\, arc\operatorname{tang}\frac{\sqrt{1+x}\sqrt{t^2-k^2}}{\sqrt{1+k^2x}\sqrt{1-t^2}}.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (13) werde nach x integrirt, wobei im zweiten Doppelintegral das Integral in Beziehung auf t in zwei Integrale mit den Grenzen 0, k und k, 1 zu zerlegen ist. Setzt man wieder $k'^2 = 1 - k^2$, so ist das in (13) links stehende Integral nach J a c o b i's Bezeichnung gleich K'. Nach Ausführung der angedeuteten Rechnungen erhält man folgende Gleichung:

(14)
$$\pi K' =$$

$$-\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\log\frac{\sqrt{1-k^2t^2}+k\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2t^2}-k\sqrt{1-t^2}}$$

$$+\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\log\frac{\sqrt{1-k^2t^2}+\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2t^2}-\sqrt{1-t^2}}$$

$$+\int_0^k \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k^2-t^2)}}\log\frac{k\sqrt{1-t^2}+\sqrt{k^2-t^2}}{k\sqrt{1-t^2}-\sqrt{k^2-t^2}}$$

$$-\int_0^k \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k^2-t^2)}} \log \frac{\sqrt{1-t^2}+\sqrt{k^2-t^2}}{\sqrt{1-t^2}-\sqrt{k^2-t^2}}$$

$$+2\int_k^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2)}}\left[arc\tang \frac{\sqrt{t^2-k^2}}{k\sqrt{1-t^2}} - arc\tang \frac{\sqrt{t^2-k^2}}{\sqrt{1-t^2}}\right].$$

Auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung mache man folgende Substitutionen. Im ersten und zweiten Integrale setze man $t = \frac{\cos w}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}$, im dritten und vierten Integrale nehme man $t = \frac{k\cos w}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}$, endlich im fünften Integrale $t^2 = \cos^2 w + k^2\sin^2 w$. Es kommt dann jedes Integral doppelt vor, wird durch 2 dividirt, so folgt:

$$(15)\quad \frac{\pi}{2}K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}\left[-\log\frac{1+k\sin w}{1-k\sin w}+\log\frac{1+\sin w}{1-\sin w}\right]$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 w}}\, arc\tang \frac{\cos w}{k\sin w} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 w}}\, arc\tang\left(\frac{\cos w}{\sin w}\right).$$

Im zweiten Integrale rechts setze man $\frac{\cos w}{k\sin w} = \tang\theta$, darauf wieder w statt θ. Da ferner $arc\tang\left(\frac{\cos w}{\sin w}\right) = \frac{\pi}{2} - w$, so leitet man aus der Gleichung (15) die folgende ab:

$$(16)\quad \pi.K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}\left[-\log\frac{1+k\sin w}{1-k\sin w}+\log\frac{1+\sin w}{1-\sin w}\right]$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{w\,dw}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 w}}.$$

Diese Gleichung läßt sich noch auf anderem Wege herstellen, z. B. mittels der in II gegebenen Formeln. In Folge der Ableitung ist zu bemerken, daß für $k' = 0$, also $k = 1$ die Gleichung (16) **nicht** mehr gültig ist. Dieser Annahme entsprechend erhält man aus der Gleichung (13) direct das bekannte Resultat:

$$\frac{\pi^2}{2} = -2\int_0^1 \frac{\log t^2}{1-t^2}\,dt.$$

II.

Eine von der vorhergehenden wesentlich verschiedene Methode Relationen zwischen elliptischen Integralen zu finden, beruht auf einer Erweiterung der Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche zu particulären Integralen die beiden ganzen elliptischen Integrale erster Gattung mit Modul und Complementärmodul hat. Man setze mit Jacobi:

$$(1)\qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

wo:

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Es sind dann bekanntlich K und K' die particulären Integrale der Differentialgleichung:

$$(3)\qquad d\,\frac{kk'^2\frac{dT}{dk}}{dk} - kT = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung lassen sich Integrale, auf welche die Theorie der elliptischen Functionen führt, umformen, so daß sich merkwürdige Relationen zwischen bestimmten Integralen ergeben, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Es handelt sich hierbei wesentlich darum eine ähnliche Differentialgleichung wie die Gleichung (3) herzustellen, für welche die rechte Seite nicht verschwindet und welcher ein gegebenes bestimmtes Integral genügt. Auf die bemerkte Differentialgleichung soll dann die Integrationsmethode von Lagrange angewandt werden.

Zur Vereinfachung der Formeln setze man:

$$(4)\qquad \Delta = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},\quad \Delta' = \sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}.$$

Bekanntlich ist:

$$(5)\qquad \frac{k'^2\sin^2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\Delta} - d\,\frac{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}}{d\varphi}.$$

Es sei P eine Function von k und φ und:

$$(6)\qquad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P d\varphi}{\Delta}.$$

Durch Differentiation nach k folgt:

$$(7)\qquad \frac{dS}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Delta}\frac{dP}{dk}\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{\Delta^2}\,P d\varphi.$$

Diese Gleichung werde mit k'^2 multiplicirt, im zweiten Integrale rechts die Gleichung (5) zur Anwendung gebracht. Es folgt so:

$$k'^2 \frac{dS}{dk} = k'^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Delta} \frac{dP}{dk} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos^2\varphi}{\Delta} P d\varphi - k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \frac{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}}{d\varphi} . P d\varphi.$$

Auf das letzte Integral rechts werde die integratio per partes angewandt. Es sei nun $\sin\varphi\cos\varphi . P = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die obige Gleichung läßt sich dann auf folgende Form bringen:

$$(8) \quad k'^2 \frac{dS}{dk} = k'^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Delta} \frac{dP}{dk} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos^2\varphi}{\Delta} P d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} \frac{dP}{d\varphi} d\varphi.$$

Man multiplicire die vorstehende Gleichung mit k, addire darauf nach (6)

$$k'^2 S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k'^2 P}{\Delta} d\varphi.$$

Es folgt dann:

$$(9) \quad kk'^2 \frac{dS}{dk} + k'^2 S =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta P d\varphi + k . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(k'^2 \frac{dP}{dk} + k \sin\varphi\cos\varphi \frac{dP}{d\varphi}\right) \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Die Gleichungen (6) und (8) geben:

$$(10) \quad k'^2 \frac{dS}{dk} - kS =$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2\varphi}{\Delta} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(k'^2 \frac{dP}{dk} + k \sin\varphi\cos\varphi \frac{dP}{d\varphi}\right) \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Die Gleichung (9) werde nach k differentiirt, darauf die Gleichung (10) abgezogen. Es ergibt sich dann für S die Differentialgleichung:

$$(11) \quad d \frac{kk'^2 \frac{dS}{dk}}{dk} - kS = f(k),$$

wo:



$$(12)\qquad f(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\frac{dP}{dk}d\varphi+kd\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(k'^2\frac{dP}{dk}+k\sin\varphi\cos\varphi\frac{dP}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta}}{dk}.$$

Man kann das zweite Integral auf der rechten Seite der Gleichung (12) mittels der Gleichung (5) einer ähnlichen Transformation unterwerfen wie das zweite Integral auf der rechten Seite der Gleichung (7). Man führe die Differentiation nach k aus. Es ist dann:

$$f(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\frac{dP}{dk}d\varphi+k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(k'^2\frac{dP}{dk}+k\sin\varphi\cos\varphi\frac{dP}{d\varphi}\right)\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi$$

$$+k\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\,\frac{k'^2\frac{dP}{dk}+k\sin\varphi\cos\varphi\frac{dP}{d\varphi}}{dk}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Auf das zweite Integral rechts werde die Gleichung (5) angewandt. Verschwindet

$$\left(k'^2\frac{dP}{dk}+k\sin\varphi\,\mathrm{kos}\varphi\frac{dP}{d\varphi}\right)\sin\varphi\cos\varphi$$

für $\varphi=0$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so läßt sich der Ausdruck für $f(k)$ auf folgende Form bringen:

$$f(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\frac{dP}{dk}d\varphi+\frac{k^2}{k'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi\,.\,H+\sin\varphi\cos\varphi\frac{dH}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dH}{dk}\frac{d\varphi}{\Delta},$$

oder:

$$(13)\qquad f(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\frac{dP}{dk}d\varphi+\frac{k}{k'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(k'^2\frac{dH}{dk}+k\cos\varphi\frac{dH\sin\varphi}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta},$$

wo zur Vereinfachung H folgende Bedeutung hat:

$$(14)\qquad H=k'^2\frac{dP}{dk}+k\sin\varphi\cos\varphi\frac{dP}{d\varphi}.$$

Zur Integration der Gleichung (11) setze man nach der Methode von Lagrange:

$$(15)\qquad S=MK+M'K'.$$

$$\frac{dS}{dk} = M\frac{dK}{dk} + M'\frac{dK'}{dk}. \tag{16}$$

Zur Bestimmung von M und M' dienen die Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dk}.K + \frac{dM'}{dk}K' = 0, \\ \frac{dM}{dk}kk'^2\frac{dK}{dk} + \frac{dM'}{dk}kk'^2\frac{dK'}{dk} = f(k) \end{cases} \tag{17}$$

Es ist nun nach Legendre:

$$kk'^2\left(K'\frac{dK}{dk} - K\frac{dK'}{dk}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

Unter Zuziehung dieser Gleichung erhält man aus den Gleichungen (17):

$$\frac{\pi}{2}\frac{dM}{dk} = K'f(k), \quad \frac{\pi}{2}\frac{dM'}{dk} = -Kf(k). \tag{19}$$

Setzt man rechts für K und K' ihre Werthe aus den Gleichungen (1) ein uud $k'^2 = 1-k^2$, so folgt:

$$\frac{\pi}{2}\frac{dM}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(k)}{\sqrt{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi, \quad \frac{\pi}{2}\frac{dM'}{dk} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(k)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi. \tag{20}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (18) erhält man aus den Gleichungen (15) und (16):

$$\frac{\pi}{2}M = kk'^2\left(K'\frac{dS}{dk} - S\frac{dK'}{dk}\right), \quad \frac{\pi}{2}M' = kk'^2\left(-K\frac{dS}{dk} + S\frac{dK}{dk}\right). \tag{21}$$

In den Gleichungen (19) ist nach k zu integriren. Für den Werth $k = k_0$ mögen M, M' und S die Werthe M_0, M'_0 und S_0 annehmen. In der Gleichung (6) sei P eine gegebene Function von k und φ, so daß also S ein gegebenes bestimmtes Integral ist. Man kann dann die Werthe von M_0 und M'_0 aus den Gleichungen (21) bestimmen. Hier ist der besondere Fall von Interesse, wenn S und $\frac{dS}{dk}$ für $k = 0$ endliche Werthe behalten.

Da für $k = 0$:

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dK}{dk} = 0, \quad kK' = 0,$$

und nach (18)

$$k\frac{dK'}{dk} = -1,$$

so geben die Gleichungen (21) für $k = 0$:

$$(22)\qquad \frac{\pi}{2} M_0 = S_0, \ \frac{\pi}{2} M'_0 = 0.$$

Die Gleichungen (19) geben dann unter den gemachten Voraussetzungen:

$$(23)\qquad \frac{\pi}{2} M = S_0 + \int_0^k K' f(k)\, dk, \ \frac{\pi}{2} M' = -\int_0^k K f(k)\, dk.$$

Durch Substitution dieser Werthe von M und M' in die Gleichung (15) folgt:

$$(24)\qquad \frac{\pi}{2} S = K S_0 + K \int_0^k K' f(k)\, dk - K' \int_0^k K f(k)\, dk.$$

Es ist diese Relation zwischen bestimmten Integralen, von der im Folgenden einige Anwendungen gemacht werden soll, die zu einigen bemerkenswerthen Relationen führen. Bei Anwendungen ist es besser zur Bestimmung von M und M' sich der Gleichungen (20) zu bedienen.

Zu bemerken ist noch, daß die Annahme $P = F(k' \operatorname{tang} \varphi)$ sich auf P unabhängig von k reduciren läßt, wie unmittelbar mittels der Substitution $k' \operatorname{tang} \varphi = \cot \psi$ folgt.

Anwendungen.

A. $$P = \log \frac{1 + k \sin \varphi}{1 - k \sin \varphi}.$$

Es ist dann:

$$k'^2 \frac{dP}{dk} + k \sin \varphi \cos \varphi \frac{dP}{d\varphi} = 2 \sin \varphi, \ \Delta \frac{dP}{dk} = \frac{2 \sin \varphi}{\Delta},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \varphi}{\Delta} d\varphi = \frac{1}{k} \log \frac{1+k}{1-k}.$$

Mittels der vorstehenden Gleichungen ist nach (12) $f(k) = \frac{2}{1-k^2}$. Für $k = 0$ ist $P = 0$, also $S_0 = 0$, dann ist auch nach (22) $M_0 = 0$. Die Gleichungen (20) geben, mit Rücksicht auf die in (4) gegebenen abkürzenden Bezeichnungen Δ und Δ':

$$\frac{\pi}{2} \frac{dM}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\, d\varphi}{(1-k^2)\sqrt{\cos^2\varphi + k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \log \frac{\Delta' + k}{\Delta' - k}}{dk} d\varphi$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{dM'}{dk} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\, \frac{d\log\dfrac{\Delta+k\cos\varphi}{\Delta-k\cos\varphi}}{dk}\, d\varphi.$$

Es ist also:

$$\frac{\pi}{2} M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\Delta'+k}{\Delta'-k}\, d\varphi,\quad \frac{\pi}{2} M' = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{\Delta+k\cos\varphi}{\Delta-k\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Diese Werthe von M und M' setze man in die Gleichung (15), für S seinen Werth aus (6) für die vorhergehende Annahme für P. Es folgt dann:

$$\text{(25)}\qquad \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} =$$

$$K\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\Delta'+k}{\Delta'-k}\, d\varphi - K'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{\Delta+k\cos\varphi}{\Delta-k\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Die vorstehende Gleichung wurde durch K dividirt. Im Integrale links setze man $\varphi = am\,\frac{2Kx}{\pi}$ und (Jacobi: Werke I, p. 156)

$$\log\frac{1+k\sin am\,\dfrac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin am\,\dfrac{2Kx}{\pi}} = 8\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)x,$$

wo bekanntlich $\log q = -\frac{\pi K'}{K}$ und das summirende Element n alle positiven, ganzzahligen Werthe annimmt. Durch Ausführung der Integration folgt:

$$\text{(26)}\qquad 8\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\,\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}} =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\Delta'+k}{\Delta'-k}\, d\varphi - \frac{K'}{K}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{\Delta+k\cos\varphi}{\Delta-k\cos\varphi}\, d\varphi.$$

B. $$P = \log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

Für diese Annahme von P erhält man aus (12):

$$f(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\sin\varphi}{\Delta^2}\, d\varphi = \frac{2k}{k'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{2k}{1-k^2}.$$



Die Gleichungen (20) werden hierdurch:

$$(27)\quad \begin{aligned} \frac{\pi}{2}\frac{dM}{dk} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\,d\varphi}{(1-k^2)\sqrt{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\log\frac{1+\Delta'}{1-\Delta'}}{dk}\,d\varphi, \\ \frac{\pi}{2}\frac{dM'}{dk} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\,d\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\log\frac{\Delta+\cos\varphi}{\Delta-\cos\varphi}}{dk}\,d\varphi. \end{aligned}$$

Es werde von $k = 0$ an integrirt. Es ist dann nach (22)

$$\frac{\pi}{2} M_0 = S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Man hat ferner:

$$(28)\quad \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\,d\varphi \\ &= -4\int_0^1 \frac{\log z}{1+z^2}\,dz = 4\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \end{aligned}$$

welches bekannte Resultat unmittelbar durch Substitution von $\tang\frac{\varphi}{2} = z$ im zweiten Integrale folgt. Mittels derselben Substitution findet man leicht:

$$(29)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\,d\varphi = -4\int_0^1 \frac{\log z}{1-z^2}\,dz = \frac{\pi^2}{2}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (22), (28) und (29) geben die Gleichungen (27) durch Integration:

$$\frac{\pi}{2} M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\Delta'}{1-\Delta'}\,d\varphi,\quad \frac{\pi}{2} M' = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{\Delta+\cos\varphi}{\Delta-\cos\varphi}\,d\varphi + \frac{\pi^2}{2}.$$

Diese Werthe von M und M' setze man in die Gleichung (15), der Annahme für P entsprechend setze man den Werth von S aus (6) ein. Es folgt dann:

$$(30)\quad \begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \\ &K\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\Delta'}{1-\Delta'}\,d\varphi - K'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{\Delta+\cos\varphi}{\Delta-\cos\varphi}\,d\varphi + K'\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Die vorstehende Gleichung dividire man durch K, setze links $\varphi = am\,\frac{2Kx}{\pi}$ und

$$\log \frac{1+\sin am\,\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sin am\,\frac{2Kx}{\pi}} = \log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + 8\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)x.$$

(Jacobi W. I. p. 156). Durch Ausführung des links stehenden Integrals folgt:

$$(31)\qquad 8\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\,\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} + 4\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{1+\Delta'}{1-\Delta'}\,d\varphi - \frac{K'}{K}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{\Delta+\cos\varphi}{\Delta-\cos\varphi}\,d\varphi + \frac{K'}{K}\,\frac{\pi^2}{2}.$$

Die Gleichung (31) werde von der Gleichung (26) subtrahirt. Es ist dann:

$$(32)\qquad 8\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\,\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+\sqrt{q^{2n-1}}} - 4\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} =$$

$$-4\sum\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2}\,\frac{1-\sqrt{q^{2n-1}}}{1+\sqrt{q^{2n-1}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\Delta'-[1-(1+k)\sin^2\varphi]}{\Delta'+[1-(1+k)\sin^2\varphi]}\,d\varphi$$

$$+\frac{K'}{K}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{1+k\sin^2\varphi+\cos\varphi.\Delta}{1+k\sin^2\varphi-\cos\varphi\,\Delta}\,d\varphi - \frac{K'}{K}\,\frac{\pi^2}{2}.$$

Von dieser Gleichung soll für die folgende Annahme für P Gebrauch gemacht werden, um eine merkwürdige Relation zwischen zwei unendlichen Reihen herzuleiten.

C. $\qquad P = \varphi.$

Die Gleichung (12) gibt für diese Annahme von P:

$$f(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k'}-1\right) = \frac{1-k'}{kk'}.$$

Die Gleichungen (20) geben weiter:

$$(33)\qquad \frac{\pi}{2}\,\frac{dM}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k'}{kk'}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+k'^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos\varphi}\,\frac{d\log\frac{1+k'\sin^2\varphi+\cos\varphi.\Delta'}{1+k'\sin^2\varphi-\cos\varphi.\Delta'}}{dk}\,d\varphi,$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{dM'}{dk}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k'}{kk'}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{2}\,d\,\frac{\log\dfrac{\Delta+[1-(1+k')\sin^2\varphi]}{\Delta-[1-(1+k')\sin^2\varphi]}}{dk}\,d\varphi.$$

Man integrire von $k = 0$ an. Es ist nach (22):

$$\frac{\pi}{2}M_0 = S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi^2}{8}.$$

Es ist ferner $\sin\varphi = z$ gesetzt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi = \int_0^1\frac{\log z}{1-z^2}\,dz = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Da nun

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cot\varphi\, d\varphi = 0,$$

so erhält man aus den Gleichungen (33):

$$\frac{\pi}{2}M = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{1+k'\sin^2\varphi+\cos\varphi\,.\,\Delta'}{1-k'\sin^2\varphi-\cos\varphi\;\Delta'}\,d\varphi$$

$$\frac{\pi}{2}M' = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\Delta+[1-(1+k')\sin^2\varphi]}{\Delta-[1-(1-k')\sin^2\varphi]}\,d\varphi.$$

Die Gleichungen (6) und (15) geben für die vorstehenden Werthe von M und M' und $P = \varphi$:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi}{\Delta}\,d\varphi =$$

$$\frac{K}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{1+k'\sin^2\varphi+\cos\varphi\,.\,\Delta'}{1-k'\sin^2\varphi-\cos\varphi\;\Delta'}\,d\varphi-\frac{K'}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\Delta+[1-(1+k')\sin^2\varphi]}{\Delta-[1-(1+k')\sin^2\varphi]}\,d\varphi.$$

Man vertausche in dieser Gleichung k mit k' multiplicire dann mit $\frac{2}{K}$. Die Integrale auf der rechten Seite fallen dann zusammen mit den Integralen auf der rechten Seite der Gleichung (32). Man erhält so:

$$(34)\qquad -4\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\frac{1-\sqrt{q^{2n-1}}}{1+\sqrt{q^{2n-1}}}+\frac{K'}{K}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{K}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.$$

In dem rechts stehenden Integrale setze man $\varphi = am\left(\frac{2K'x}{\pi}, k'\right)$. Nun ist (Jacobi, W. I. p. 158):

$$am\,\frac{2Kx}{\pi}=x+2\sum\frac{1}{n}\,\frac{q^n}{1+q^{2n}}\,\sin 2nx.$$

Ist also $\log q\,.\log q'=\pi^2$, so folgt:

$$am\left(\frac{2K'x}{\pi},\,k'\right)=x+2\sum\frac{1}{n}\,\frac{q'^n}{1+q'^{2n}}\,\sin 2nx.$$

Mittels dieser Entwickelung erhält man aus der Gleichung (34) durch Aenderung des Zeichens auf beiden Seiten:

$$4\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\,\frac{1-\sqrt{q^{2n-1}}}{1+\sqrt{q^{2n-1}}}=\frac{K'}{K}\,\frac{\pi^2}{4}-\frac{4K'}{K}\sum\frac{1}{(2n-1)^2}\,\frac{q'^{2n-1}}{1+q'^{4n-2}}.$$

Setzt man noch rechts $\frac{\pi^2}{4}=2\sum\frac{1}{(2n-1)^2}$, dividirt dann durch 2, nimmt $\frac{K'}{K}=z$, also $q=e^{-\pi z}$, $q'=e^{-\frac{\pi}{z}}$, so ergibt sich die Gleichung:

$$2\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\,\frac{1-e^{-\frac{2n-1}{2}\pi z}}{1+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi z}}=z\sum\frac{1}{(2n-1)^2}\,\frac{\left(1-e^{-\frac{2n-1}{z}\pi}\right)^2}{1+e^{-\frac{4n-2}{z}\pi}}.$$

D. $$P=\tfrac{1}{2}\log\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Für diesen Werth von P findet man aus der Gleichung (12)

$$f(k)=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}=\frac{k}{k'}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes von $f(k)$ in die Gleichungen (20) gibt:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{dM}{dk}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\,d\varphi}{k'\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{d\,arc\sin(k'\sin\varphi)}{dk}\,d\varphi$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{dM'}{dk}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k}{k'\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{2}\,\frac{d\log\frac{\Delta+k'\sin\varphi}{\Delta-k'\sin\varphi}}{dk}\,\frac{d\varphi}{\sin\varphi}.$$

Man integrire von $k=0$ an. Nun ist nach (22)

$$\frac{\pi}{2}\,M_0=S_0=\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Es ist ferner:



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Mit Rücksicht auf die vorstehenden Gleichungen erhält man:

$$\frac{\pi}{2} M = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arc\sin(k'\sin\varphi)}{\sin\varphi}\, d\varphi$$

$$\frac{\pi}{2} M' = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\varphi} \log\frac{\Delta + k'\sin\varphi}{\Delta - k'\sin\varphi}\, d\varphi - \frac{\pi^2}{4}.$$

Für die vorstehenden Werthe von M und M', sowie die für P gemachte Annahme geben die Gleichungen (6) und (15):

$$(35) \qquad \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta} =$$

$$-K\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arc\sin(k'\sin\varphi)}{\sin\varphi}\, d\varphi + \frac{K'}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\Delta + k'\sin\varphi}{\Delta - k'\sin\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\pi^2}{4}K'.$$

Die Gleichung werde mit $-\frac{2}{K}$ multiplicirt und im Integrale links $\varphi = am\,\frac{2Kx}{\pi}$ gesetzt. Mit Rücksicht auf die Entwicklung:

$$\log\frac{1+\cos am\frac{2Kx}{\pi}}{1-\cos am\frac{2Kx}{\pi}} = \log\frac{1+\cos x}{1-\cos x} - 8\sum\frac{1}{2n-1}\,\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\cos(2n-1)x$$

$$= 4\sum\frac{1}{2n-1}\,\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\cos(2n-1)x,$$

folgt:

$$4\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\,\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arc\sin(k'\sin\varphi)}{\sin\varphi}\, d\varphi$$

$$(36) \qquad -\frac{K'}{K}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\Delta + k'\sin\varphi}{\Delta - k'\sin\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sin\varphi} + \frac{K'}{K}\,\frac{\pi^2}{2}.$$

Durch Vertauschung von q mit $\sqrt{q}$, läßt sich die vorstehende Gleichung wieder mit der Gleichung (32) in Verbindung bringen, es ergibt sich dann eine Gleichung zwischen bestimmten Integralen, welche hier, der Kürze halber, übergangen werden möge.

Man kann die Integrale der rechten Seite der Gleichung (36) auch mittels der Annahme

$$P = arc\sin(k\sin\varphi)$$

finden. Es ist dann nach (12) $f(k) = 1$. Werden die Gleichungen (20) nach k von $k = 0$ an integrirt, dann die erhaltenen Werthe von M und M' in die Gleichung (15) gesetzt, so folgt:

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arc\sin(k\sin\varphi)}{\Delta}d\varphi = -2K'\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arc\sin(k\sin\varphi)}{\sin\varphi}d\varphi$$

$$+K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\Delta'+k\sin\varphi}{\Delta'-k\sin\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Durch Vertauschung von k und k' ergeben sich die Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (36) und dann unter Zuziehung dieser Gleichung weiter:

$$(37)\quad 4\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} = \frac{K'}{K}\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi}{K'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arc\sin(k'\sin\varphi)}{\Delta'}d\varphi\right].$$

Im Integrale rechts setze man $\varphi = am\left(\frac{2K'x}{\pi}, k'\right)$. Da nun allgemein:

$$arc\sin(k\sin am u) = \int_0^u k\cos am u du$$

so ist:

$$arc\sin\left(k'\sin am\frac{2K'x}{\pi}, k'\right) = \frac{2k'K'}{\pi}\int_0^x\cos am\left(\frac{2K'x}{\pi}, k'\right)dx$$

$$= 4\sum\frac{1}{2n-1}\frac{\sqrt{q'^{2n-1}}}{1+q'^{2n-1}}\sin(2n-1)x.$$

Setzt man weiter in der Gleichung (37):

$$\frac{\pi^2}{2} = 4\sum\frac{1}{(2n-1)^2},$$

so gibt die bemerkte Gleichung nach Division durch 4:

$$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} = \frac{K'}{K}\sum\frac{1}{(2n-1)^2}\frac{(1-\sqrt{q'^{2n-1}})^2}{1+q'^{2n-1}}.$$

Diese Gleichung ist schon oben in einer etwas andern Form aufgestellt, wenn nämlich q mit $\sqrt{q}$, also q' mit q'^2 und $\frac{K'}{K}$ mit $\frac{K'}{2K}$ vertauscht wird.

* * *

Für besondere Annahmen von P kann $S = mK + m'K'$ sein, wo m und m' Constanten sind. In der Gleichung (11) ist dann $f(k) = 0$. Was die Gleichung (12) betrifft, so können zwei Fälle stattfinden, es ist entweder identisch $f(k) = 0$, oder, da $f(k) = 0$ sein muß, so ergibt sich eine Relation zwischen bestimmten Integralen.

Nimmt man z. B.:

$$P = \tfrac{1}{2}\log\frac{1-\Delta}{1+\Delta},$$

so ist:

$$\Delta\frac{dP}{dk} = \frac{1}{k}, \quad \frac{k'^2\frac{dP}{dk} + k\sin\varphi\cos\varphi\frac{dP}{d\varphi}}{\Delta} = \frac{1}{k}.$$

Die Gleichung (12) gibt dann $f(k) = 0$. Da nun S für $k = 1$ einen endlichen Werth behält, so ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tfrac{1}{2}\log\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}{\Delta}\, d\varphi = m'K'.$$

Für $k = 1$, also $k' = 0$, folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tfrac{1}{2}\log\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}{\cos\varphi}\, d\varphi = m'\frac{\pi}{2},$$

oder $-\frac{\pi^2}{4} = m'\frac{\pi}{2}$, also $m' = -\frac{\pi}{2}$.

Es sei Q eine Function von k und $\operatorname{tang}\varphi$, welche durch Vertauschung von $\operatorname{tang}\varphi$ mit $\frac{1}{k'\operatorname{tang}\varphi}$ in $\frac{1}{Q}$ übergeht. Ersetzt man in dem Integrale

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tang} Q}{\Delta}\, d\varphi \tag{38}$$

$\operatorname{tang}\varphi$ durch $\frac{1}{k'\operatorname{tang}\varphi}$, so folgt:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{Q}}{\Delta}\, d\varphi.$$

Bleibt nun Q von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ immer positiv, so ist

$$\operatorname{arc\,tang} Q + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{Q} = \frac{\pi}{2}.$$

Die beiden obigen Integrale geben dann addirt

$$2S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2\Delta}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} K,$$

also:

(39) $$S = \frac{\pi}{4} K.$$

In diesem Falle muß in der Gleichung (12) $f(k) = 0$ sein, ohne daß die Summe der rechts stehenden Integrale eine direct identisch verschwindende Summe zu sein braucht.

Ist $\Phi(z)$ eine beliebige Function von z, so kann man in der Gleichung (38):

(40) $$Q = \frac{\Phi(\operatorname{tang}\varphi)}{\Phi\left(\frac{1}{k' \operatorname{tang}\varphi}\right)}$$

nehmen. Diese Form von Q gibt zu vielen besonderen Fällen Veranlassung. Es sei zur Vereinfachung $\operatorname{tang}\varphi = z$. Ist dann $F(z^2)$ ein Polynom $n$ten Grades von z^2, so kann man:

(41) $$Q = \frac{F(z^2)}{k'^2 z^{2n} F\left(\frac{1}{k'^2 z^2}\right)}$$

nehmen. Setzt man:

(42) $$F(z^2) = A_0 + A_1 k' z^2 + A_2 k'^2 z + \ldots + A_n k'^n z^{2n}$$

so ist:

(43) $$k'^n z^{2n} F\left(\frac{1}{k'^2 z^2}\right) = A_n + A_{n-1} k' z^2 + \ldots + A_0 k'^n z^{2n}.$$

Für $n = 1$ geben die Gleichungen (41), (42) und (43):

(44) $$Q = \frac{A_0 + A_1 k' z^2}{A_1 + A_0 k' z^2}.$$

Man bemerkt leicht, daß der allgemeinere Werth von Q, definirt durch die Gleichungen (41), (42) und (43), sich als ein Product von n Factoren darstellen läßt, deren jeder die Form des unter (44) aufgestellten speciellen Werthes von Q hat. Dieser in (44) gegebene besondere Werth von Q findet sich im XI. Bande der »Mathematische Annalen« p. 569 angemerkt.

Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle.

Von

B. Minnigerode.

Erste Abhandlung.

In der vorliegenden Arbeit soll eine Grundlage gegeben werden für theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Elasticität der Krystalle durch Aufstellung des Potentials der elastischen Kräfte für die einzelnen Krystallsysteme und deren Unterabtheilungen. Es ist die Bestimmung dieses Potentials in neuster Zeit Gegenstand der Untersuchung von W. Voigt und Aron gewesen [1]), allein der Ausgangspunkt ihrer Betrachtung ist die Charakterisirung der Krystallsysteme durch Ebenen der Symmetrie, die nicht alle Fälle umfaßt. Die hier gegebene neue Behandlung stützt sich auf die Axen der Symmetrie und es haben sich hierbei einige neue Fälle ergeben.

Nachdem die analytische Discussion des Potentials mit Rücksicht auf mögliche Symmetrieaxen abgeschlossen war, zeigten sich bei der Anwendung auf die einzelnen Krystallsysteme bei einigen Unterabtheilungen, namentlich bei der rhombotypen Tetartoëdrie des tetragonalen Systems eigenthümliche Schwierigkeiten. Aus dem Bestreben diese zu beseitigen ist eine neue Darstellung der Symmetrieeigenschaften der Krystalle mit Hülfe der Substitutions- und Gruppentheorie hervorgegangen, die im Folgenden auseinandergesetzt ist. Diese liefert in jedem einzelnen Falle mit Nothwendigkeit alle vorhandenen Symmetrieeigenschaften. Zugleich ergab sich, daß auf Grund der Substitutionstheorie das Potential für die einzelnen Fälle ohne alle Rechnung aufgestellt werden kann.

Das hexagonale System ist hier ausgeschlossen, es kann ganz ähnlich behandelt werden, wie ich in einer zweiten Abhandlung zeigen werde.

Greifswald, 18. April 1884.

---

§ 1.

Ich bediene mich rechtwinkliger Coordinaten, die eventuell mit bevorzugten Krystallrichtungen zusammenfallen. Da nur die gegen-

1) Siehe Wiedemann, Annalen Bd. 16 und 20.

seitige Stellung, nicht die Größe der Krystallflächen in Betracht kommt, so lege ich durch den Anfangspunkt O der Coordinaten Strahlen, die in ihm einseitig begrenzt sind und parallel zu den von Innen nach Außen gerichteten Normalen der Krystallflächen verlaufen. An diese knüpfe ich alle meine Betrachtungen an.

Die krystallographischen Gesetze bestimmen erstens, welche Normalenrichtungen bei einem Krystall überhaupt vorkommen können; diese Gesetze beruhen auf der Rationalität gewisser Doppelverhältnisse. Zweitens geben sie an, welche Richtungen zusammen mit einer krystallographisch überhaupt möglichen Richtung bei einem vollkommen ausgebildeten Krystall nothwendig vorkommen müssen. Auf dieser zweiten Art krystallographischer Gesetze beruhen die Symmetrieverhältnisse der Krystalle. Nur von ihnen ist im Folgenden die Rede.

Die Richtung einer Normale ist bestimmt durch die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bildet; ich bezeichne sie durch α, β, γ. Die hier zur Anwendung gelangenden krystallographischen Gesetze sagen aus, daß zusammen mit einer Richtung (α, β, γ) Richtungen vorkommen müssen, die durch gewisse Permutationen der Größen $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$ bestimmt sind. Es geht hieraus hervor, daß in diesem Theil der Krystallographie die Substitutions- und Gruppen-Theorie zur Verwendung kommen muß. Da ich wünsche die hier vorliegenden Untersuchungen so weit als möglich auch Nichtmathematikern zugänglich zu machen, so schicke ich einige Definitionen und Sätze über Substitutionen und Gruppen voraus, deren nähere Ausführung freilich hier nicht gegeben werden kann.

§ 2.

Liegt eine Anzahl n von Elementen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ vor und wird statt ihrer eine Permutation $\alpha', \beta', \ldots \nu'$ derselben gesetzt, so heißt die Ausführung einer solchen Vertauschung eine Substitution und es wird dieselbe in folgender Weise bezeichnet

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \nu \\ \alpha' & \beta' & \ldots & \nu' \end{pmatrix}.$$

Elemente, die nicht durch andere ersetzt werden, können in der Bezeichnung weggelassen werden. Eine Substitution kann schlechtweg durch einen Buchstaben bezeichnet werden. Werden nach einander zwei oder mehrere Substitutionen S, T, U,.. angewandt, so erhält man das Produkt derselben, welches durch

$$STU..$$

bezeichnet wird. Die Factoren sind im Allgemeinen nicht vertauschbar, die Operation soll stets von links nach rechts ausgeführt werden; benachbarte Substitutionen können zu einer einzigen zusammengefaßt werden. Die identische Substitution, bei der keine Vertauschung der Elemente vorkommt, wird durch 1 bezeichnet.

Da die Anzahl der Permutationen von n Elementen $1.2...n$ beträgt, so gelangt man durch immer fortgesetzte Multiplication von Substitutionen mit einander wieder zu solchen, die schon dagewesen sind. Man schließt hieraus, daß für eine Substitution S ganze Zahlen r vorhanden sind, für die

$$S^r = 1$$

ist. Ist r die kleinste positive Zahl welche dies leistet, so heißt r die Ordnung der Substitution. Die Substitutionen

$$1, S, S^2, .. S^{r-1}$$

sind dann alle von einander verschieden und heissen die Periode von S. Jede Substitution ist als Produkt von cyklischen Substitutionen darstellbar; die zu einem Cyklus gehörigen Elemente sind in bestimmter Weise geordnet und eine cyklische Substitution wird dadurch ausgeführt, daß an Stelle jedes Elementes mit Ausnahme des letzten das folgende, an Stelle des letzten das erste gesetzt wird. Die cyklische Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & ... & \nu \\ \beta & \gamma & ... & \alpha \end{pmatrix}$$

wird kurzweg durch $(\alpha, \beta, ... \nu)$ bezeichnet. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ ist die bloße Vertauschung von zwei Elementen. Sind S und T Substitutionen, für die $S = T$ ist, und sind P, Q irgend zwei Substitutionen, so ist $PSQ = PTQ$.

Eine Reihe von Substitutionen, die aus gegebenen Elementen gebildet werden, wird nach Galois eine Gruppe (nach Cauchy système de substitutions conjugées) genannt, wenn alle möglichen aus ihnen gebildeten Produkte immer wieder zu den ursprünglich gegebenen Substitutionen zurückführen. Die Anzahl der verschiedenen Substitutionen einer Gruppe heißt ihre Ordnung. Wird die Gruppe durch G bezeichnet und sind $1, s_2, s_3, .. s_r$ die in ihr enthaltenen verschiedenen Substitutionen, so bedient man sich der Bezeichnung

$$G = [1, s_2, s_3, .. s_r] = \{s_a, s_b, ..\};$$

die eckige Klammer muß alle Substitutionen der Gruppe enthalten, die geschweifte braucht nur einen Theil derselben zu enthalten, der

aber so beschaffen sein muß, daß durch alle möglichen Produkte von $s_a, s_b, \ldots$ sämmtliche Substitutionen der Gruppe erhalten werden [1]).

Sind

$$G = [1, s_2, s_3, \ldots s_r],$$
$$H = [1, t_2, t_3, \ldots t_{r^1}]$$

zwei Gruppen von Substitutionen, zwischen denen die Beziehung besteht

$$s_\alpha\, t_\beta = t_\gamma\, s_\delta,$$

wie man α, β auch wählen möge, so heißen sie vertauschbar; haben überdies G, H außer der Einheit keine Substitution gemeinsam, so bilden sowohl alle

$$s_\alpha\, t_\delta \text{ wie alle } t_\delta\, s_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots r;\ \delta = 1, 2, \ldots r^1)$$

eine Gruppe der Ordnung rr^1, welche G und H als Untergruppen enthält, und durch $\{G, H\}$ bezeichnet wird [2]).

§ 3.

Ich lasse einige Betrachtungen über Symmetrieverhältnisse im Allgemeinen folgen und beschränke mich auf das, was im Folgenden zur Anwendung kommt, nämlich die Symmetrieeigenschaften eines einseitig begrenzten Strahlbündels, wie es oben bezeichnet worden ist.

Das Vorhandensein einer Symmetrieeigenschaft ist identisch mit dem Vorhandensein einer Substitution, d. h. mit dem Umstand, daß es zulässig ist, vorhandene Elemente in gewisser Weise zu vertauschen. Die zulässigen Substitutionen sind durch ihre Gruppe definirt. Ich bemerke, daß die Anzahl der Strahlen des Bündels sowohl endlich als unendlich groß sein kann. Immer aber müssen sie sich in eine endliche oder unendliche Anzahl von Classen zusammenfassen lassen, von denen jede einer einfachen Krystallform entspricht. Die Strahlen einer Classe sind durch die Gruppe der Substitutionen mit einander verknüpft. Die Anzahl der Strahlen jeder Classe fällt, wenigstens im Allgemeinen, mit der Ordnung der Gruppe zusammen; in singulären Fällen können Strahlen einer Classe zusammenfallen. Wo es sich nur um allgemeine Symmetrieverhältnisse, nicht speciell um krystallographisch gleichzeitig mögliche Richtungen handelt, kann ein beliebiger Strahl dem Bündel zugefügt werden, wenn die zu seiner Classe gehörigen, durch die Gruppe bestimmten Strahlen gleich-

1) S. Netto, Substitutionentheorie. Leipzig 1882. S. 40.
2) a. a. O. S. 39.

zeitig hinzugenommen werden; nur dürfen dadurch keine neuen Symmetrieverhältnisse eingeführt werden.

Ein Centrum der Symmetrie ist vorhanden, wenn die Substitution

$$D = (\alpha, \bar{\alpha})\, (\beta, \bar{\beta})\, (\gamma, \bar{\gamma})$$

in der Gruppe vorkommt. Hier ist $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ statt $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ gesetzt. α, β, γ sind die Richtungscosinus eines beliebigen Strahls des Bündels und genügen der Gleichung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$. Ich bemerke hier ein für alle mal, daß vorkommende Substitutionen stets in diesem Sinn aufzufassen sind, so daß sie für alle Strahlen des Bündels gelten.

Das Bündel besitzt eine Symmetrieaxe L, wenn es möglich ist, dasselbe durch Drehung um diese Axe mit sich selbst zur Deckung zu bringen. Zur Erläuterung des Ausdrucks »mit sich selbst zur Deckung bringen« sei gesagt, daß man sich das Bündel sammt den Coordinatenaxen als doppelt vorhanden zu denken hat, einmal fest im Raum, dann um den Anfangspunkt O frei beweglich. Wird das Bündel aus einer Deckungslage — Anfangslage — durch irgend eine Bewegung in eine neue Lage — Endlage — gebracht, bei der wiederum Deckung stattfindet, so wird der Ausdruck gebraucht »das Bündel ist mit sich selbst zur Deckung gebracht worden«. Jedem Uebergang aus einer Deckungslage in eine andere entspricht eine Substitution der Gruppe.

Ist der kleinste Drehungswinkel, bei dem Deckung des Bündels mit sich selbst eintritt, gleich $\frac{2\pi}{n}$, so ist n eine ganze Zahl und die Symmetrieaxe, die nothwendig durch O geht, heißt n-zählig; der Fall $n = 1$ wird ausgeschlossen, indem die Eigenschaft 1-zählige Symmetrieaxe zu sein, jeder Richtung zukommen würde, die nicht die einer höherzähligen ist, also unendlich vielen, während die eigentlichen Symmetrieaxen, wenigstens im Allgemeinen, in endlicher Zahl vorhanden sind.

Durch Drehung des Bündels um L um den Winkel θ gehe α, β, γ in α', β', γ' über. Dann ist L n-zählige Symmetrieaxe, wenn die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$$

für $\theta = \frac{2\pi}{n}$ in der Gruppe enthalten und für größere Werthe von n nicht enthalten ist. Sind λ, μ, ν die Richtungscosinus von L, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1,\\
\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2\cos\theta,\\
\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma' &= \cos\varphi,\\
\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma &= \cos\varphi;
\end{aligned}$$

φ ist der Winkel, den der Strahl α, β, γ mit L bildet. Die Aufgabe läßt zwei Lösungen zu, die den zwei entgegengesetzten Drehungsrichtungen entsprechen.

Ihre Auflösung liefert

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \lambda\cos\varphi(1-\cos\theta) + \alpha\cos\theta + \sigma(\beta\nu - \gamma\mu),\\
\beta' &= \mu\cos\varphi(1-\cos\theta) + \beta\cos\theta + \sigma(\gamma\lambda - \alpha\nu),\\
\gamma' &= \nu\cos\varphi(1-\cos\theta) + \gamma\cos\theta + \sigma(\alpha\mu - \beta\lambda),\\
\sigma &= \pm\sin\theta.
\end{aligned}$$

Es ergeben sich hieraus bei Drehung des Bündels um L n verschiedene Deckungslagen, die den Substitutionen

$$1,\ S,\ S^2, \ldots\ S^{n-1};\ S^n = 1$$

entsprechen. Ist die Symmetrieaxe geradezählig, so zeigt das Vorhandensein der Substitution $S^{\frac{n}{2}}$ in der Periode von S, daß das Bündel durch Drehung um den Winkel π mit sich selbst zur Deckung kommt. Sind drei zu einander senkrechte Symmetrieaxen vorhanden, die mit den Coordinatenaxen zusammenfallen mögen, so erfordert die Geradezähligkeit der x-, y-, z-Axe beziehungsweise das Bestehen folgender Substitutionen

$$A = (\beta, \bar\beta)(\gamma, \bar\gamma), \quad B = (\gamma, \bar\gamma)(\alpha, \bar\alpha), \quad C = (\alpha, \bar\alpha)(\beta, \bar\beta).$$

Ihr Produkt ist der Einheit gleich: sind zwei vorhanden, so ist auch die dritte da.

Das Bündel besitzt eine Symmetrieebene, wenn eine Substitution E in der Gruppe vorkommt, die durch folgende Gleichungen bestimmt ist

$$\begin{aligned}
E &= \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{pmatrix},\\
\alpha' &= \alpha - 2\lambda N,\\
\beta' &= \beta - 2\gamma N,\\
\gamma' &= \gamma - 2\nu N,\\
N &= \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu,
\end{aligned}$$

wenn durch λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normale der Symmetrieebene bezeichnet werden; E genügt der Gleichung

$$E^2 = 1.$$

Die Substitutionen, welche die Coordinatenebenen zu Ebenen der Symmetrie machen sind

$$AD = (\alpha, \bar{\alpha}), \quad BD = (\beta, \bar{\beta}), \quad CD = (\gamma, \bar{\gamma}).$$

Vergleicht man diese Substitutionen mit denen, die ein Centrum der Symmetrie und die Geradezähligkeit der Coordinatenaxen bedingen, so erhält man folgende bekannte Sätze.

Bei einem Centrum der Symmetrie, einer geradezähligen Symmetrieaxe und dazu senkrechten Symmetrieebene bedingt das Vorhandensein von zweien das Vorhandensein des dritten.

Sind zwei auf einander senkrechte Symmetrieebenen vorhanden, so ist ihre Durchschnittslinie geradezählige Symmetrieaxe; aus dem Vorhandensein einer Symmetrieebene und einer in ihr liegenden geradezähligen Symmetrieaxe folgt das Vorhandensein einer zur ersten senkrechten Ebene der Symmetrie, die durch die Symmetrieaxe hindurchgeht.

§ 4.

Eine Symmetrieaxe L des Bündels heißt zweiseitig, wenn dieses dadurch mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann, daß die bewegliche L-Richtung mit der festen $\bar{L}$-Richtung zur Deckung gebracht wird. Man drehe das Bündel zuerst um eine beliebige durch O gehende zu L senkrechte Gerade um den Winkel π und dann um L um einen solchen Winkel, daß Deckung des Bündels mit sich selbst eintritt. Die beiden nach einander ausgeführten Drehungen können nach einem Lehrsatze von Euler durch eine einzige Drehung um eine dritte Axe L' ersetzt werden. Diese steht senkrecht auf L und ist geradezählige Symmetrieaxe. Ist L n-zählige Symmetrieaxe, so sind n solche Richtungen (gleichzähliger) Symmetrieaxen vorhanden, die in der durch O gehenden zu L senkrechten Ebene liegen und von denen je zwei auf einander folgende den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ einschließen; sie entsprechen den n-Substitutionen der Periode von S

$$1, S, S^2, .. \; S^{n-1}.$$

Ist n gerade, so fallen je zwei einander gegenüberstehende Symmetrieaxen zusammen, so daß nur $\frac{n}{2}$ von einander verschiedene zu zählen sind.

Die analytische Formulirung des Bestehens einer n-zähligen und 2-seitigen Symmetrieaxe L, deren Richtungscosinus λ, μ, ν sind, ist folgende. Außer dem Bestehen der im vorigen § angegebenen Substitution S müssen, in Folge des Vorhandenseins von L', Werthe λ', μ', ν' bestimmbar sein, welche den Gleichungen

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1,$$
$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0,$$

genügen, weil L' auf L senkrecht steht, während die Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{pmatrix}$$

besteht, die L' zu einer geradezähligen Symmetrieaxe macht und die durch folgende Gleichungen bestimmt wird

$$\begin{aligned}\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 &= 1,\\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' &= \cos\varphi^2-\sin\varphi^2,\\ \lambda'\alpha'+\mu'\beta'+\nu'\gamma' &= \cos\varphi,\\ \lambda'\alpha+\mu'\beta+\nu'\gamma &= \cos\varphi.\end{aligned}$$

Ihre Auflösung gibt

$$\begin{aligned}\alpha' &= 2\lambda\cos\varphi-\alpha,\\ \beta' &= 2\mu\cos\varphi-\beta,\\ \gamma' &= 2\nu\cos\varphi-\gamma.\end{aligned}$$

Eine Symmetrieaxe heißt einseitig und nichtpolar, wenn eine solche Drehung des Bündels, die das bewegliche L mit dem festen $\overline{L}$ zur Deckung bringt, Deckung des festen Bündels mit dem Spiegelbild des beweglichen bezüglich einer spiegelnden Ebene herbeiführt.

Stehen zwei räumliche Gebilde in solcher Beziehung zu einander, daß das eine in Bezug auf eine gewisse spiegelnde Ebene das Spiegelbild der andern ist, so steht die spiegelnde Ebene senkrecht auf der Verbindungslinie von je zwei entsprechenden Punkten und halbirt dieselbe. Wird eines der Gebilde um eine beliebige in der spiegelnden Ebene liegende Gerade gedreht, so bleibt die Eigenschaft des Spiegelns bestehen, wenn die spiegelnde Ebene mit der halben Geschwindigkeit des beweglichen Gebildes nachfolgt.

Es geht hieraus hervor, daß wenn überhaupt durch Drehung um einen zu L senkrechten Strahl Deckung des Bündels mit seinem Spiegelbild herbeigeführt werden kann, jeder zu L senkrechte Strahl dazu tauglich ist; die spiegelnde Ebene muß durch L hindurchgehen, weil in dieser Axe entsprechende Punkte zusammenfallen.

Man drehe das Bündel um einen beliebigen zu L senkrechten Strahl um π und construire die spiegelnde Ebene. Dreht man darauf das Bündel um den in der spiegelnden Ebene liegenden zu L senkrechten Strahl um π und gleichzeitig die spiegelnde Ebene um $\frac{\pi}{2}$, so können die nach einander ausgeführten Drehungen des Bündels durch eine einzige ersetzt werden, für die L Drehungsaxe ist. In dieser neuen Lage findet Deckung des Bündels mit seinem Spiegelbilde statt,



die durch O gehende zu L senkrechte Ebene als spiegelnd angesehen. Ist die Symmetrieaxe L n-zählig, so ergeben sich aus einer solchen Lage $n-1$ andere, wenn Drehungen um die Vielfachen von $\frac{2\pi}{n}$ hinzugefügt werden und es gibt auch nicht mehr. Ist die spiegelnde Ebene Symmetrieebene des Bündels, so fallen die n Lagen, bei denen Deckung des festen Bündels mit dem Spiegelbild des beweglichen stattfindet, mit denen zusammen, bei denen Deckung des Bündels mit sich selbst vorhanden ist. Ist die spiegelnde Ebene nicht Symmetrieebene des Bündels, so erhält man die Lagen des beweglichen Bündels, bei denen Spiegelung stattfindet, durch Drehung um die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{n}$, des halben der n-Zähligkeit von L entsprechenden Winkels, wie aus dem Umstand hervorgeht, daß zwei nach einander ausgeführte Spiegelungen Deckung des Bündels mit sich selbst herbeiführen. Im ersten Fall soll die Symmetrieaxe L einseitig von der ersten Art, im zweiten Fall einseitig von der zweiten Art heißen, indem der Zusatz nichtpolar wegbleiben kann, wenn die Art der Einseitigkeit angegeben wird. Jede Symmetrieaxe ist einseitig von der ersten Art, sobald eine zu ihr senkrechte Symmetrieebene vorhanden ist. Ist eine Symmetrieaxe geradezählig, so ist sie einseitig von der ersten Art, sobald ein Centrum der Symmetrie vorhanden ist, indem dann eine zu ihr senkrechte Symmetrieebene besteht. Ist die Symmetrieaxe ungeradezählig und ein Centrum, also keine zu ihr senkrechte Symmetrieebene vorhanden, so ist sie einseitig von der zweiten Art, und auch das Umgekehrte findet statt; man erkennt dies sofort, wenn man beachtet, daß bei Vorhandensein eines Centrums Drehung um L um π Spiegelung herbeiführt und daß in diesem Fall π ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{n}$ ist. Eine Symmetrieaxe, die weder zweiseitig noch einseitig von der ersten oder zweiten Art ist, heißt polar. Eine polare Symmetrieaxe kann niemals zusammen mit einem Centrum der Symmetrie vorkommen.

Ich bin von der üblichen Terminologie abgewichen, indem ich die nichtpolare Einseitigkeit einer Symmetrieaxe der Zweiseitigkeit nicht gegenüber, sondern an die Seite gestellt habe; sie können für sich, aber auch zusammen auftreten. Die zwei Arten nichtpolarer Einseitigkeit der Symmetrieaxen sind bisher nicht unterschieden worden; doch waren Marbach und Sohncke specielle Fälle bekannt [1]).

Man nennt nach Marbach solche Figuren, die mit ihrer sym-

1) Siehe Liebisch, Geometrische Krystallographie. Leipzig 1881. S. 219. Sohncke, Entwicklung einer Theorie der Krystallstructur. Leipzig 1879. S. 204.

metrischen Figur (ihrem Spiegelbild bezüglich einer spiegelnden Ebene) nicht zur Deckung gebracht werden können, in sich gewendet. Eine Figur ist immer und nur dann in sich gewendet, wenn sie weder ein Centrum, noch eine Ebene der Symmetrie besitzt. Eine einseitige Symmetrieaxe der zweiten Art bedingt, daß in den Fällen, wo ein Centrum der Symmetrie vorhanden ist, also in sich gewendete Formen nicht vorkommen können, in sich gewendete Flächengruppen vorhanden sind, auf deren Vorkommen beim Pentagondodekaëder Marbach zuerst aufmerksam gemacht hat. Dies tritt ein, wenn ein Centrum und eine ungeradezählige Axe der Symmetrie vorhanden sind, also eine zu ihr senkrechte Symmetrieebene fehlt, in anderen Fällen nicht. Hierher gehören zwei Fälle, die pentagonale Hemiëdrie des regulären und die rhomboëdrische Tetartoëdrie des hexagonalen Systems. Naumann nennt zwei Figuren, welche einander symmetrisch gleich, aber nicht congruent sind, enantiomorph (hémiédrie non superposable von Pasteur)[1]).

Das Vorhandensein einer n-zähligen und 1-seitigen Symmetrieaxe 1. Art ist identisch mit dem Vorhandensein der Substitutionen S und E des § 3. Ist n gerade, so folgt aus dem Vorhandensein von $D = (\alpha, \bar{\alpha})\,(\beta, \bar{\beta})\,(\gamma, \bar{\gamma})$ das von E; ist n ungerade, so schließt das Vorhandensein von D das von E aus.

Bezeichnet T die Substitution, die einer Drehung um L um $\frac{\pi}{n}$ entspricht, so daß

$$T^2 = S$$

ist, so ist L 1-seitig von der 2. Art, wenn TE in der Gruppe vorkommt, indem diese Substitution eine Drehung um L um $\frac{\pi}{n}$ zusammen mit Spiegelung an einer zu L senkrechten Ebene bedeutet, vorausgesetzt, daß E in der Gruppe nicht vorkommt; enthielte die Gruppe außer TE auch E, so müßte auch T vorkommen und die Axe wäre nicht n-zählige, sondern mindestens $2n$-zählige Symmetrieaxe. Ist also n gerade, so darf in diesem Fall D nicht in der Gruppe vorkommen, ist n ungerade, so genügt das gleichzeitige Vorkommen von S und D, um L zu einer n-zähligen und 1-seitigen Symmetrieaxe von der 2. Art zu machen.

Die Substitution T ist folgendermaßen zu bilden. Setzt man

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 \cos\frac{\pi}{n},$$

1) Siehe Liebisch, a. a. O. S. 217 u. ff.

$$\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma' = \cos\varphi,$$
$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = \cos\varphi,$$

so ist

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich aus § 3; ist n ungerade, so kann T aus den Substitutionen der Gruppe und E gebildet werden. Aus den Gleichungen

$$T^{n+1} = S^{\frac{n+1}{2}}, \quad T^n E = D, \quad T^{2n} = 1, \quad E^2 = 1$$

folgt nämlich

$$T = DES^{\frac{n+1}{2}}.$$

§ 5.

Für die folgenden auf Krystallographie bezüglichen Betrachtungen müssen mehrere Gruppen von Substitutionen von sechs Elementen zu Grunde gelegt werden, deren Zusammensetzung ich jetzt entwickeln werde. Ich führe folgende Bezeichnung ein

$$K = (\alpha, \beta, \gamma)\ (\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma), \quad H = (\alpha, \beta)\ (\bar\alpha, \bar\beta)$$
$$A = (\beta, \bar\beta)\ (\gamma, \bar\gamma), \qquad B = (\gamma, \bar\gamma)\ (\alpha, \bar\alpha), \quad C = (\alpha, \bar\alpha)\ (\beta, \bar\beta),$$
$$D = (\alpha, \bar\alpha)\ (\beta, \bar\beta)\ (\gamma, \bar\gamma).$$

Diese Substitutionen genügen einer Reihe von Gleichungen, von denen ich hier folgende hervorhebe:

$$K^3 = 1,\ H^2 = 1,\ A^2 = 1,\ B^2 = 1,\ C^2 = 1,\ ABC = 1,\ D^2 = 1.$$

Zunächst bemerke ich, daß die Substitution D mit allen übrigen vertauschbar ist, daß also die aus ihr gebildete Gruppe $[1, D]$ mit allen aus den übrigen zu bildenden ebenfalls vertauschbar ist. Ferner ist die Gruppe

$$\{A, B, C\} = [1, A, B, C]$$

mit jeder der beiden folgenden vertauschbar:

$$\{K\}, \quad \{H\}.$$

Dies ergiebt sich, da $K^2 = (\alpha, \gamma, \beta)\ (\bar\alpha, \bar\gamma, \bar\beta)$ ist, aus dem Anblick folgender Gleichungen

$$AK = (\alpha, \beta, \bar\gamma)\ (\bar\alpha, \bar\beta, \gamma) = KB$$
$$BK = (\alpha, \bar\beta, \bar\gamma)\ (\bar\alpha, \beta, \gamma) = KC,$$

$$\begin{aligned} CK &= (\alpha, \bar{\beta}, \gamma)\,(\bar{\alpha}, \beta, \bar{\gamma}) = KA, \\ AK^2 &= (\alpha, \gamma, \bar{\beta})\,(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \beta) = K^2C, \\ BK^2 &= (\alpha, \bar{\gamma}, \beta)\,(\bar{\alpha}, \gamma, \bar{\beta}) = K^2A, \\ CK^2 &= (\alpha, \bar{\gamma}, \bar{\beta})\,(\bar{\alpha}, \gamma, \beta) = K^2B, \\ AH &= (\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta})\,(\gamma, \bar{\gamma}) = HB, \\ BH &= (\alpha, \bar{\beta}, \bar{\alpha}, \beta)\,(\gamma, \bar{\gamma}) = HA, \\ CH &= (\alpha, \bar{\beta})\,(\beta, \bar{\alpha}) = HC. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß die in Frage kommenden Gruppen außer der identischen Substitution keine andere gemeinsam haben, so sieht man, daß die Gruppen

$$\{K, A, B, C\}, \quad \{H, A, B, C\}$$

von der 12. resp. 8. Ordnung sind; ihre Substitutionen können nach einem in § 2 angegebenen Satz gebildet werden. Ferner folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} HK &= (\alpha, \gamma)\,(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = K^2H, \\ HK^2 &= (\beta, \gamma)\,(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) = KH, \end{aligned}$$

die Vertauschbarkeit der Gruppen

$$\{K\}, \quad \{H\},$$

auch hier ist 1 die einzige gemeinsame Substitution; die Gruppe

$$\{K, H\}$$

ist von der 6. Ordnung. Ferner übersieht man jetzt leicht die Vertauschbarkeit der Gruppen

$$\{K, H\}, \quad \{A, B, C\};$$

die Gruppe

$$\{K, H, A, B, C\}$$

ist von der 24. Ordnung. Mit Berücksichtigung einer oben über die Substitution D gemachten Bemerkung erkennt man ferner, daß die Gruppen

$$\{K, A, B, C, H, D\}, \quad \{K, A, B, C, D\}, \quad \{K, A, B, C, HD\}, \quad \{H, A, B, C, D\}$$

beziehungsweise von der 48., 24., 24., 16. Ordnung sind.

Die Substitutionen der Gruppe

$$G = \{K, A, B, C, D, H\},$$

von der die übrigen hier auftretenden Gruppen Untergruppen sind, ordne ich in folgender Weise an, die nach § 2 zulässig ist

	1.	1,	K,	K^2,	H,	KH,	K^2H,
	2.	D,	KD,	K^2D,	HD,	KHD,	K^2HD,
	3.	A,	KA,	K^2A,	HA,	KHA,	K^2HA,
I.	4.	B,	KB,	K^2B,	HB,	KHB,	K^2HB.
	5.	C,	KC,	K^2C,	HC,	KHC,	K^2HC,
	6.	DA,	KAD,	K^2AD,	HAD,	$KHAD$,	K^2HAD,
	7.	DB,	KBD,	K^2BD,	HBD,	$KHBD$,	K^2HBD,
	8.	DC,	KCD,	K^2CD,	HCD,	$KHCD$,	K^2HCD.

Die Anordnung

$$\alpha\;\beta\;\gamma\;\bar{\alpha}\;\bar{\beta}\;\bar{\gamma}$$

der Elemente soll durch 1 bezeichnet werden; die einer bestimmten Substitution entsprechende Permutation derselben kann dann aus dem Schema I. sofort abgelesen werden, wenn man beachtet, daß die erste Horizontalreihe aus folgenden Permutationen besteht

$$\alpha\beta\gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma},\;\beta\gamma\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\alpha},\;\gamma\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\alpha}\bar{\beta},\;\beta\alpha\gamma\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\gamma},\;\alpha\gamma\beta\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\beta},\;\gamma\beta\alpha\bar{\gamma}\bar{\beta}\bar{\alpha},$$

sowie daß die Reihenfolge der Buchstaben in allen Gliedern einer Verticalreihe dieselbe ist. Die einzelnen Horizontalreihen entstehen aus der ersten durch gewisse Permutationen der Vorzeichen, die für die Reihen 2. bis 5. aus der Bedeutung der ersten Substitution hervorgehen; die der folgenden erhellt aus den Gleichungen

$$DA = (\alpha, \bar{\alpha}),\quad DB = (\beta, \bar{\beta}),\quad DC = (\gamma, \bar{\gamma}).$$

Diejenigen Substitutionen, welche zu Untergruppen von G gehören sind aus dem Schema I. ebenfalls abzulesen. Man erhält sie z. B. für die Gruppe

$$\{A, B, C, D, H\},$$

wenn man in I. $K = 1$ setzt und nur die verschiedenen Substitutionen behält; die drei ersten und die drei letzten Verticalreihen werden identisch. Die Substitutionen der Gruppe

$$\{K, A, B, C, HD\}$$

erhält man, indem in I. H und $D = 1$ gesetzt werden, wo sie für sich auftreten, HD aber beibehalten wird.

Jede Substitution von G enthält die Richtungscosinus von zwei Strahlen; die drei ersten Buchstaben einer Permutation bestimmen den einen, die drei letzten den zweiten. Durch die drei ersten Buchstaben der Substitutionen von G oder einer Untergruppe von G wird ein Strahlbündel bestimmt, durch die drei letzten ein zweites. Die

beiden Bündel fallen der Lage nach zusammen, sobald die Substitution D in der betrachteten Gruppe vorkommt; die Symmetrieverhältnisse der beiden Bündel sind stets dieselben und werden durch die Gruppe bestimmt.

Die Unterabtheilungen der hier betrachteten Krystallsysteme entsprechen der Gruppe G und gewissen Untergruppen von G in solcher Weise, daß die Normalen von Krystallflächen, die zusammen mit einer krystallographisch möglichen Normalen vorkommen müssen, durch die zugehörige Gruppe bestimmt werden und einem der beiden Bündel angehören. Die Symmetrieverhältnisse der Unterabtheilung des Krystallsystems sind die des Bündels.

Ich bemerke, daß die drei ersten (resp. die drei letzten) Buchstaben jeder Permutation als die Indices der zugehörigen Krystallfläche angesehen werden können; für die vorliegenden Untersuchungen würde die Benutzung derselben und der damit zusammenhängenden Einführung der Längen der krystallographischen Axen nicht angemessen sein.

Der Aufzählung der Krystallsysteme schicke ich einige Bemerkungen über die geometrische Bedeutung der Substitutionen voraus. Das Vorkommen von D in einer Gruppe zeigt, daß ein Centrum der Symmetrie vorhanden ist, das Vorkommen von A, B, C, daß resp. die x-, y-, z-Axe geradezählige Symmetrieaxen sind, das Vorkommen von K, daß die Coordinatenaxen cyklisch vertauschbar sind. Die Substitution H weist auf eine Symmetrieebene hin; setzt man in den für eine solche gültigen Formeln des § 3

$$\alpha' = \beta, \quad \beta' = \alpha, \quad \gamma' = \gamma,$$

was der Substitution H entspricht, so erhält man

$$\beta = \alpha - 2\lambda N, \quad \alpha = \beta - 2\mu N, \quad 0 = \nu N,$$
$$N = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu.$$

Diese Gleichungen werden, da

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

ist, für

$$\lambda + \mu = 0, \quad \nu = 0,$$

also $\lambda = -\mu = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ erfüllt. Hieraus folgt, daß das Vorkommen von H in der Gruppe eine Symmetrieebene bedingt, deren Normale die Richtungscosinus

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad -\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad 0$$

besitzt; die Ebene geht also durch die z-Axe und enthält zwei gegen-

überliegende Kanten eines Würfels, dessen Mittelpunkt O ist und dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind. Das Vorkommen von

$$HC = (\alpha, \bar{\beta})\ (\beta, \bar{\alpha})$$

zeigt das Vorhandensein einer Symmetrieebene, deren Normale durch die Cosinus

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ 0$$

bestimmt ist, die also ebenfalls durch die z-Axe geht und zwei gegenüberliegende Kanten des Würfels enthält. Die beiden Ebenen stehen senkrecht auf einander.

Ich gehe jetzt zu den einzelnen Krystallsystemen und deren Unterabtheilungen über; nur das hexagonale System wird in dieser Abhandlung ausgeschlossen. Die einzelnen Abtheilungen werden der Reihe nach aufgeführt, im Anschluß an das Werk von Liebisch[1]); jedem einzelnen Fall wird die entsprechende Gruppe zugefügt. Ich discutire dann die Symmetrieverhältnisse; es zeigt sich, daß die neue Behandlungsweise die bekannten charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Fälle ergibt: sie wird hierdurch gerechtfertigt.

§ 6.

Das reguläre System[2]).

a. Holoëdrische Formen.

$$\{K, A, B, C, D, H\}.$$

b. Plagiëdrisch-hemiëdrische Formen.

$$\{K, A, B, C, HD\}.$$

c. Pentagonal-hemiëdrische Formen. A.

$$\{K, A, B, C, D\}.$$

d. Tetraëdrisch-hemiëdrische Formen.

$$\{K, A, B, C, H\}.$$

e. Tetartoëdrische Formen.

$$\{K, A, B, C\}.$$

Zunächst ist zu bemerken, daß die 3 Coordinatenaxen in den Substitutionen der Gruppe in gleicher Weise vertreten sind. Es leuchtet dies ohne Weiteres ein in den Fällen, in denen die unsymmetrische Substitution H nicht betheiligt ist; daß es aber auch in den

1) Geometrische Krystallographie.

2) a. a. O. S. 223 ff.

übrigen Fällen stattfindet, geht aus den immer gleichzeitig vorhandenen Substitutionen

$$H = (\alpha, \beta)\ (\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \quad KH = (\beta, \gamma)\ (\bar{\beta}, \bar{\gamma}), \quad K^2H = (\gamma, \alpha)\ (\bar{\gamma}, \bar{\alpha})$$

hervor. Symmetrieeigenschaften, die bezüglich einer Coordinatenaxe bewiesen sind, können danach ohne Weiteres auf die beiden andern übertragen werden.

Läßt man das bewegliche System aus der Anfangslage in eine neue Lage dadurch übergehen, daß man um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$[1]) erst um die z-Axe, dann um die x-Axe dreht, so entspricht dies der durch K bezeichneten Substitution. Beide Drehungen lassen sich durch eine einzige um eine Axe ersetzen, die 3-zählige Symmetrieaxe ist, weil $K^3 = 1$ ist und eine Substitution fehlt, die höhere Zähligkeit anzeigt. Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes in der Anfangslage, x', y', z' die Coordinaten desselben Punktes nach Ausführung der bezeichneten Drehung um die 3-zählige Symmetrieaxe, so bestehen die Gleichungen

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x.$$

Für die auf der Drehungsaxe befindlichen Punkte ist $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, woraus für diese $x = y = z$ folgt. Die Richtungscosinus der Symmetrieaxe sind diesen Größen proportional und da ihre Quadratsumme $= 1$ ist, so sind sie alle drei entweder $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $= -\sqrt{\frac{1}{3}}$, woraus folgt, daß die Axe mit einer der Diagonalen eines Würfels zusammenfällt, dessen Mittelpunkt O ist und dessen Flächen den Coordinatenebenen parallel sind. Legt man statt K die Substitutionen KA, KB, KC der Betrachtung zu Grunde, so erhält man Analoges und findet, daß in allen 5 Fällen die 4 Diagonalen des bezeichneten Würfels 3-zählige Symmetrieaxen sind.

Das Vorhandensein der Substitution C zeigt, daß die z-Axe geradezählige Symmetrieaxe ist; sie ist 2-zählig, wenn nicht höherzählig. Ist die Substitution

$$HDA = (\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

vorhanden, was in den Fällen a., b., stattfindet, so sind die 3 Coordinatenaxen 4-zählige, in den Fällen c., d., e. 2-zählige Symmetrieaxen.

Einer Drehung um die z-Axe um $-\frac{\pi}{2}$ und darauf folgender Drehung um die y-Axe um π entspricht die Substitution

---

8) Ich setze fest, daß eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$, wenn die x-, y-, z-Axe Drehungsaxen sind, bezüglich y in z, z in x, x in y überführt.

$$HD = DH = (\alpha, \bar{\beta})\ (\beta, \bar{\alpha})\ (\gamma, \bar{\gamma});$$

einer Drehung um die z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ und darauf folgender Drehung um die y-Axe um π entspricht

$$HDC = (\alpha, \beta)\ (\bar{\alpha}, \bar{\beta})\ (\gamma, \bar{\gamma}).$$

Jede dieser beiden Drehungen kann durch eine Drehung um eine neue Axe ersetzt werden, die jedesmal 2-zählige Symmetrieaxe ist, weil

$$(HD)^2 = 1, \quad (HDC)^2 = 1$$

und keine höhere Zähligkeit angezeigt ist. Eine Schlußweise, die einer früheren ganz analog ist, zeigt, daß die beiden Axen senkrecht zur z-Axe stehen und jedesmal die Mitten zweier gegenüberliegender Kanten des schon benutzten Würfels halbiren, indem sich für ihre Richtungscosinus die Werthe

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ 0 \text{ und } \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ 0$$

ergeben; sie halbiren die Winkel zwischen der x- und y-Axe. Die erste steht senkrecht auf den beiden 3-zähligen Symmetrieaxen, deren Richtungscosinus

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

sind, die zweite auf denjenigen beiden, deren Richtungscosinus

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

sind.

Es folgt hieraus, daß sobald *HD* in der Gruppe vorkommt, also in den Fällen a., b., 6 2-zählige Symmetrieaxen vorhanden sind, von denen je zwei auf einer Coordinatenaxe und unter einander senkrecht stehen und die Winkel zwischen den beiden anderen Coordinatenaxen halbiren. Jede dieser 6 Axen steht auf 2 der 3-zähligen Symmetrieaxen senkrecht, auf jeder der 3-zähligen stehen 3 2-zählige senkrecht. So stehen z. B. auf der Symmetrieaxe

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

folgende 2-zählige senkrecht

$$0,\ \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}};\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ 0,\ \sqrt{\tfrac{1}{2}};\ \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ 0$$

Je 2 der 6 2-zähligen Axen, die nicht einen rechten Winkel einschließen, schneiden sich unter dem Winkel $\frac{2\pi}{3}$, oder wenn man die beiden Seiten jeder von ihnen besonders zählt, je zwei benachbarte unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$.

Ein Centrum der Symmetrie ist vorhanden, sobald die Substitution D vorkommt, also in den Fällen a., c. Ist ein Centrum vorhanden, so steht senkrecht auf jeder geradezähligen Symmetrieaxe eine Symmetrieebene. Solche sind also die 3 Coordinatenebenen in den Fällen a., c. und die 6 Ebenen, deren Normalen die 6 2-zähligen Symmetrieaxen sind, im Falle a. Aber diese 6 Symmetrieebenen sind auch im Falle d. vorhanden, in dem zu ihnen senkrechte Symmetrieaxen fehlen. Dies findet statt in Folge der hier vorhandenen Substitutionen H, HC und ergibt sich aus dem § 5 Gesagten, wenn das gleichmäßige Vertretensein der Coordinatenaxen in der Gruppe berücksichtigt wird. Insbesondere sei noch hervorgehoben, daß in den Fällen a., d. durch jede der 4 3-zähligen Symmetrieaxen 3 Ebenen der Symmetrie hindurchgehen, von denen je zwei sich unter dem Winkel $\frac{2\pi}{3}$ scheiden. Jede dieser 6 Symmetrieebenen geht durch zwei gegenüberliegende Kanten des Würfels.

Da eine Symmetrieaxe 2-seitig ist, sobald senkrecht auf ihr eine geradezählige Symmetrieaxe steht, so sind die 3 Coordinatenaxen in den 5 Fällen 2-seitig; die in den Fällen a., b. vorhandenen 6 2-zähligen Symmetrieaxen sind ebenfalls 2-seitig, in diesen beiden Fällen auch die 4 3-zähligen Symmetrieaxen. Besteht ein Centrum, also in den Fällen a., c., so ist jede geradezählige Symmetrieaxe 1-seitig von der 1., jede ungeradezählige 1-seitig von der 2. Art: in beiden Fällen sind also die Coordinatenaxen 1-seitig von der 1., die 4 3-zähligen Symmetrieaxen 1-seitig von der 2. Art: im Fall a. sind auch die 6 2-zähligen Symmetrieaxen 1-seitig von der 1. Art. Im Fall d., wo ein Centrum der Symmetrie fehlt, sind die Coordinatenaxen ebenfalls 1-seitig von der 2. Art, weil die Substitutionen AH und BH der Gruppe vorkommen und die Coordinatenaxen 2-zählige Symmetrieaxen sind; ein Blick auf die eben angegebenen Substitutionen AH, BH zeigt dies für die z-Axe. Für die beiden andern Coordinatenaxen ergibt es sich aus einer oben gemachten allgemeinen Bemerkung. Die 4 3-zähligen Symmetrieaxen sind in den Fällen d., e. polar.

In den Fällen b., e. treten enantimorphe Formen auf.

§ 7.

Die Gruppen der übrigen Krystallsysteme mit Ausnahme der hexagonalen sind Untergruppen von G, in denen $K = 1$ ist; es

fallen also alle Substitutionen weg, mit Ausnahme der in der 1. und 4. Verticalreihe befindlichen. Der Uebersicht wegen theile ich sie hier mit

$$\begin{matrix} H, & HD, & HA, & HB, & HC, & HAD, & HBD, & HCD, \\ 1, & D, & A, & B, & C, & AD, & BD, & CD. \end{matrix} \qquad \text{II.}$$

Ich führe jetzt, wie oben, die einzelnen Fälle mit Angabe der zugehörigen Gruppen auf.

Das tetragonale System [1]).

Erste Abtheilung.

a. Holoëdrische Formen.

$$\{H, A, B, C, D\}.$$

b. Trapezoëdrische Hemiëdrie.

$$\{A, B, C, HD\}.$$

c. Pyramidale Hemiëdrie.

$$\{HA, HB, C, D\}.$$

Zweite Abtheilung.

d. Sphenoidische Hemiëdrie.

$$\{H, A, B, C\}.$$

e. Rhombotype Tetartoëdrie. B.

$$\{A, B, C\}.$$

f. Sphenoidische Tetartoëdrie.

$$\{HA, HB, C\}.$$

Hemimorphien der ersten Abtheilung.

g. Erste Hemimorphie.

$$\{H, HAD, C\}.$$

h. Zweite Hemimorphie.

$$\{HAD, C\}.$$

Hemimorphien der zweiten Abtheilung.

i. Dritte Hemimorphie.

$$\{H, C\}.$$

k. Vierte Hemimorphie.

$$\{C\}.$$

1) a. a. O. S. 339 ff.

Von den Hemimorphien ist bis jetzt nur der Fall g. beobachtet worden; der Vollständigkeit wegen habe ich die übrigen möglichen Fälle hinzugefügt. Sie gehen aus den nicht hemimorphen Formen dadurch hervor, daß die z-Axe polare Symmetrieaxe wird. So führt a. auf g., b. und c. auf h., d. auf i., e. und f. auf k.

Die Gruppen sind im Fall a. von der 16. Ordnung, in den Fällen b., c., d., g. von der 8., in den Fällen e., f., h., i. von der 4., im Fall k. von der 2., wie zum Theil schon früher bemerkt ist und leicht in den übrigen Fällen erkannt wird, wenn beachtet wird, daß

$$HAD = S$$

gesetzt, folgende Gleichungen bestehen

$$S^4 = 1,\ SH = HS^3,\ S^2H = HS^2,\ S^3H = HS,$$
$$S^2 = C,\ (HA)^2 = C,\ (HA)^3 = HB,\ (HA)^4 = 1.$$

Mit der Substitution K fallen alle von ihr abhängigen Symmetrieeigenschaften des regulären Systems weg. Insbesondere folgt aus dem Fehlen von KH und K^2H, daß die Coordinatenaxen nicht gleichmäßig in den Gruppen vertreten sind; die z-Axe ist bevorzugt, während die beiden anderen Coordinatenaxen gleichberechtigt bleiben. Jede durch O gehende zur z-Axe senkrechte Gerade soll Horizontalaxe heißen. Aus der Discussion des regulären Systems ergeben sich die Eigenschaften des tetragonalen ohne Weiteres.

Die z-Axe ist in den Fällen a., b., c., g., h. 4-zählige, in den Fällen d., e., f., i., k. 2-zählige Symmetrieaxe, entsprechend dem Vorkommen der Substitution HAD in jenen, der Substitution C in diesen Fällen. Kommen A und B vor, so sind auch die Horizontalaxen x und y Symmetrieaxen, und zwar 2-zählige; dies tritt in den Fällen a., b., d., e. ein. Kommen HD und HCD vor, so kommen noch zwei horizontale Symmetrieaxen hinzu, also in den Fällen a., b., in denen mithin 4 2-zählige Horizontalaxen der Symmetrie vorhanden sind, von denen je 2 benachbarte den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließen. Ein Centrum der Symmetrie ist in den Fällen a., c. vorhanden; in diesen beiden Fällen ist auch die xy-Ebene Symmetrieebene. Im Fall a. steht senkrecht auf jeder der horizontalen Symmetrieaxen eine Symmetrieebene; 4 Symmetrieebenen, die sich in der z-Axe schneiden, sind auch im Fall g. vorhanden, wo horizontale Symmetrieaxen fehlen, in Folge der Substitutionen H und HAD; je zwei benachbarte schließen den Winkel $\frac{\pi}{4}$ ein. In den Fällen d., i. schneiden sich in der z-Axe 2 Symmetrieebenen unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$, entsprechend den Substitutionen

H und *C*; sie halbiren die Winkel zwischen den horizontalen Axen *x*, *y*, die im 1. Fall Symmetrieaxen sind, im 2. nicht.

Die drei Coordinatenaxen sind in den Fällen a., b., d., e. 2-seitige Symmetrieaxen; ebenso verhält es sich mit den in den Fällen a., b. außerdem noch vorkommenden horizontalen Symmetrieaxen. Die *z*-Axe ist in den Fällen a., c. 1-seitig von der 1., in den Fällen d., f. 1-seitig von der 2. Art, jenes weil *D*, dieses weil *HA* und *HB* in den betreffenden Gruppen vorkommen und *D* nicht; in den 4 Fällen der Hemimorphie ist sie polar. Im Fall a. sind die horizontalen Symmetrieaxen auch 1-seitig von der 1. Art.

In den Fällen b., e., f., h., k. treten enantiomorphe Formen auf; für den Fall f. ist dies bisher nicht bekannt gewesen.

§ 8.

Das rhombische System [1]).

a. Holoëdrische Formen.

$$\{A,\ B,\ C,\ D\}.$$

b. Sphenoidische Hemiëdrie.

$$\{A,\ B,\ C\}. \qquad\qquad C.$$

c. Erste Hemimorphie.

$$\{C,\ AD,\ BD\}.$$

d. Zweite Hemimorphie.

$$\{C\}.$$

Die Gruppen sind im Fall a. von der 8., in den Fällen b., c. von der 4., im Fall d. von der 2. Ordnung.

Die *z*-Axe ist in allen Fällen 2-zählige Symmetrieaxe, in den Fällen a., b. sind außerdem zu ihr und zu einander senkrecht 2 ebenfalls 2-zählige Symmetrieaxen vorhanden, die mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Im Fall a. ist ein Centrum der Symmetrie vorhanden; in demselben Fall sind die 3 Coordinatenebenen Symmetrieebenen, im Fall c. nur die *xz*- und *yz*-Ebene. In den Fällen a., b. sind die 3 Symmetrieaxen 2-zählig, im Fall a. auch 1-seitig von der 1. Art. In den Fällen c., d. ist die *z*-Axe polar.

In den Fällen b., d. treten enantiomorphe Formen auf.

---

1) a. a. O. S. 365 u. ff.

Das monokline System[1]).

a. Holoëdrische Formen.

D. $\{C, D\}$.

b. Hemimorphie.

$\{C\}$.

Die Gruppen sind im Fall a. von der 4., im Fall b. von der 2. Ordnung.

Die z-Axe ist in beiden Fällen 2-zählige Symmetrieaxe. Im Fall a. ist ein Centrum der Symmetrie und eine zur Symmetrieaxe senkrechte Symmetrieebene vorhanden. Im Fall a. ist die Symmetrieaxe 1-seitig von der 1. Art, im Fall b. polar. Im Fall b. treten enantiomorphe Formen auf.

Das trikline System[2]).

Hier fehlen alle Symmetrien. Ein trikliner Krystall ohne Centrum der Symmetrie ist bisher nicht beobachtet worden. Den beobachteten Krystallen entspricht also die Gruppe 2. Ordnung

E. $\{D\}$.

§ 9.

Ueberblickt man die Gruppen der Unterabtheilungen der vier letzten Krystallsysteme, so bemerkt man, daß in mehreren Fällen die nämlichen Gruppen auftreten, daß also gewisse in verschiedenen Systemen vorkommende Krystallformen die nämlichen Symmetrieverhältnisse besitzen. Ich stelle sie hier zusammen.

Die Gruppe

$$\{A, B, C\}$$

ist die des Falles e. des tetragonalen, und des Falles b. des rhombischen Systems.

Die Gruppe

$$\{C\}$$

ist die des Falles k. des tetragonalen, des Falles d. des rhombischen und des Falles b. des monoklinen Systems.

Dazu kommen noch die Fälle i. des tetragonalen und c. des rhombischen Systems, denen die Gruppen

$$\{H, C\} \text{ und } \{C, AD, BD\}$$

---

1) a. a. O. S. 380 u. ff.

2) a. a. O. S. 394 u. f.

entsprechen. In diesen beiden Fällen sind eine 2-zählige polare Symmetrieaxe und zwei sich in ihr rechtwinklig durchschneidende Symmetrieebenen vorhanden und weiter keine Symmetrieeigenschaften. Die Symmetrieverhältnisse sind also dieselben; die Gruppen erscheinen nur verschieden, weil im 1. Fall die Coordinatenebenen xz und yz die Winkel der Symmetrieebenen halbiren, im 2. Fall mit ihnen zusammenfallen.

Einige Krystallographen nehmen auch eine »monosymmetrische Hemiëdrie des rhombischen Systems« an, die mit der holoëdrischen Abtheilung des monoklinen Systems die Symmetrieeigenschaften gemein hat. Sollte ihre Existenz unzweifelhaft nachgewiesen werden, so müßte man ihr die Gruppe

$$\{C, D\}$$

entsprechen lassen.

Die genannten Fälle sind verwechselbar, so lange nur die Symmetrieverhältnisse in Betracht gezogen werden. Die Krystallographie besitzt aber noch andere Hülfsmittel zur Trennung der ähnlichen Fälle, die jetzt zu erörtern sind. Die Längen der drei krystallographischen Axen stehen im rhombischen System in von der Temperatur abhängigen Verhältnissen, im tetragonalen System ist eines derselben von der Temperatur unabhängig; ich vermeide den öfters gemachten Zusatz, daß diese von der Temperatur abhängigen Verhältnisse irrational seien, weil in dem Fall, wo ein Verhältniß sich mit der Temperatur, und zwar stetig, ändert, zwischen zwei noch so nahen Temperaturgrenzen unendlich viele Fälle vorhanden sind, bei denen dasselbe einer rationalen Zahl genau gleich ist. Diese Umstände finden wenigstens statt, so lange durch Veränderung der Temperatur die Structurverhältnisse des Krystalls nicht geändert werden. Die Richtungen und Längen der krystallographischen Axen können aber berechnet werden, sobald die Winkel bekannt sind, welche 4 Flächen des Krystalls mit einander bilden, und die Werthe der Indices dieser Flächen festgesetzt werden. Ferner können bei Krystallen des tetragonalen Systems specielle Flächen auftreten, die bei rhombischen und monoklinen Krystallen unmöglich sind; es sind dies solche Flächen, bei deren alleinigem Vorkommen Unterabtheilungen des tetragonalen Systems nicht von einander zu unterscheiden sind[1]; in solchen Fällen ergibt sich die Entscheidung ohne Weiteres. Beim tetragonalen und rhombischen System stehen die krystallographischen Axen senkrecht auf einander, während man beim monoklinen System die Axen-

1) S. Liebisch, a. a. O. S. 355.

richtungen so wählen kann, daß wenigstens nur einer der Winkel, welche sie einschließen, ein von $\frac{\pi}{2}$ verschiedener ist[1]). Dieses Verhalten kann dann zur Entscheidung benutzt werden.

Außer den genannten Hülfsmitteln kann noch das optische oder auch thermische Verhalten eines Krystalls zu Hülfe genommen werden. Da ich mich im Folgenden auf die Krystalloptik stützen werde, so schicke ich einige auf sie bezügliche Bemerkungen voraus. Die Symmetrieverhältnisse im optischen Verhalten eines Krystalls können für jede Farbe mit Hülfe eines Ellipsoides angegeben werden. Die Längen der Hauptaxen sind in allen Fällen für verschiedene Farben verschieden, beim triklinen System sind auch die Richtungen derselben für verschiedene Farben verschieden.

Beim monoklinen System ist die Richtung einer der Hauptaxen für alle Farben dieselbe; sie fällt mit der Richtung der krystallographischen Symmetrieaxe zusammen, während die beiden andern Hauptaxen in der dazu senkrechten Ebene liegen und für verschiedene Farben verschiedene Richtungen besitzen. Beim rhombischen System fallen die Richtungen der Hauptaxen für alle Farben mit den krystallographischen Symmetrieaxen zusammen. In allen diesen Fällen sind die Längen der drei Hauptaxen der Ellipsoide von einander verschieden; im tetragonalen und hexagonalen System sind zwei der Axen einander gleich, die Umdrehungsaxe des Ellipsoids fällt mit der Richtung der krystallographisch bevorzugten Symmetrieaxe zusammen. Für das reguläre System wird das Ellipsoid zu einer Kugel.

§ 10.

Bei der Aufstellung des Potentials der elastischen Kräfte eines Krystalls stütze ich mich auf den Erfahrungssatz, daß krystallographisch gleichwerthige Richtungen auch physikalisch gleichwerthig sind. In physikalischer Beziehung kommen den Krystallen alle Symmetrieeigenschaften ihrer Form zu; ein Theil der physikalischen Eigenschaften besitzt aber noch höhere Symmetrieen.

Jeder Symmetrieeigenschaft entspricht eine bestimmte Substitution (siehe § 3), und durch eine oder mehrere gleichzeitig vorhandene Substitutionen wird jedesmal eine Gruppe bestimmt. In der Auffassungsweise der vorliegenden Abhandlung ist also der an die Spitze dieses § gestellte Erfahrungssatz folgendermaßen zu formuliren: die Gruppe der Form eines Krystalls ist in der Gruppe jeder seiner physikalischen Eigenschaften enthalten. Man kann hiernach die physikalischen Eigenschaften eines Krystalls

1) S. ebendaselbst S. 209.

in Classen theilen, indem alle Eigenschaften, denen dieselbe Gruppe zukommt, in eine Classe vereinigt werden. Sohncke[1]) hat die physikalischen Eigenschaften der Krystalle in 2 Classen getheilt und die hierauf bezüglichen Verhältnisse eingehend erörtert; durch das Vorstehende ergeben sich für diesen Gegenstand neue Gesichtspunkte. Ich behalte mir weitere Entwicklungen für eine andere Gelegenheit vor und bemerke nur, daß man mit zwei Classen nicht ausreicht.

Ich lege dem Folgenden die bekannte Formel für das Potential der elastischen Kräfte für den allgemeinsten Fall, das trikline System, zu Grunde. Das Potential hängt in diesem Fall für jede Substanz von 21 Constanten ab, deren Werthe im einzelnen Fall durch Beobachtungen zu ermitteln sind. Um hieraus das Potential für die Unterabtheilungen der übrigen Krystallsysteme abzuleiten, unterwerfe ich dasselbe der Bedingung, denjenigen Symmetrieeigenschaften zu genügen, die der betreffenden Krystallform zukommen. Dieses muß stattfinden aus den oben angegebenen Gründen; ich füge auch weiter nichts hinzu, wenn die Krystallform durch ihre Symmetrieeigenschaften vollständig charakterisirt ist. Ist dies aber nicht der Fall, so nehme ich die Hülfe der Optik in Anspruch. Liegen zwei Körper vor, welche die nämlichen Symmetrieverhältnisse besitzen, aber verschiedenen Krystallsystemen angehören, so weist die große Verschiedenheit ihres optischen Verhaltens auf Verschiedenheiten der Structur und der wirkenden Kräfte hin, die bei anderen physikalischen Eigenschaften ebenfalls hervortreten müssen; für die hier in Betracht kommenden Fälle schließe ich folgendermaßen weiter. Bei dem Uebergang aus dem rhombischen System in das tetragonale werden die für die einzelnen Farben charakteristischen Ellipsoide Umdrehungsellipsoide; die Hauptaxen eines Ellipsoides mit drei ungleichen Axen sind aber 2-zählige Symmetrieaxen desselben, von denen eine ∞-zählig wird, wenn zwei Axen gleich werden. Da die ∞-zähligkeit schon eintritt, wenn eine der 2-zähligen Hauptaxen des Ellipsoides mehr als 2-zählig wird und beim tetragonalen System überhaupt nur 2- und 4-zählige Symmetrieaxen vorkommen, so nehme ich an, daß in den oben angeführten Fällen, wo Krystalle des tetragonalen und des rhombischen Systems in geometrischer Beziehung gleiche Symmetrieverhältnisse besitzen, den tetragonalen Krystallen in elastischer Beziehung eine 4-zählige Symmetrieaxe zukommt. Bei dem Uebergang aus dem monoklinen System in das rhombische fallen die Richtungen der Hauptaxen der Ellipsoide, die verschiedenen Farben entsprechen, zusammen; ich nehme in Folge dessen an, daß im

1) Entwicklung einer Theorie der Krystallstructur, S. 211 u. ff.

hier vorhandenen oben angeführten zweifelhaften Fall in elastischer Beziehung bei den dem rhombischen System angehörigen Krystallen 3 auf einander senkrechte 2-zählige Symmetrieaxen vorhanden sind.

Diese Schlußweise entbehrt der mathematischen Strenge, indem nur eine Analogie benutzt wird; eine andere ist aber bei dem jetzigen Stand der Elasticitätslehre nicht möglich; denn in den singulären hier auftretenden Fällen den Krystallformen von höherer Symmetrie dieselben Potentiale entsprechen zu lassen, wie weniger regelmäßigen Krystallformen, ist ganz unzulässig. Jedenfalls aber ergibt sich eine zweckmäßige Grundlage für die Discussion anzustellender Beobachtungen, die allein obige Schlußweise rechtfertigen können. Messungen über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle in großem Maßstabe sind aber nicht bloß für diese Ausnahmefälle, die in den meisten Fällen noch gar nicht einmal beobachtet sind, sondern für alle Fälle in hohem Grade wünschenswerth.

Fügt man nun den Gruppen der Unterabtheilungen der einzelnen Krystallsysteme die dem Centrum entsprechende Substitution D da hinzu, wo sie nicht schon vorkommt, so vereinigen sich mehrere vorher getrennte Fälle und im tetragonalen System wird die z-Axe in allen Fällen 4-zählig, wo sie es nicht schon ist, indem dann die Substitution HAD in den Gruppen vorkommt, die singulären Fälle ausgenommen; in diesen aber füge ich sie hinzu. Auch im rhombischen System zeigt sich in entsprechender Weise Uebereinstimmung, wenn D und im singulären Fall auch noch A und B zugefügt werden.

Ich lasse nun eine Uebersicht der einzelnen Fälle folgen; in den Tabellen A bis E ist überall die Substitution D zugefügt und in den singulären Fällen in der angegebenen Weise verfahren.

Das reguläre System.

Classe I. { a. Holoëdrische Formen.
b. Plagiëdrisch-hemiëdrische Formen.
d. Tetraëdrisch-hemiëdrische Formen. }

F. $\{K, A, B, C, D, H\}$.

Classe II. { c. Pentagonal-hemiëdrische Formen.
e. Tetartoëdrische Formen. }

$\{K, A, B, C, D\}$.

Das tetragonale System.

Classe I.
- a. Holoëdrische Formen.
- b. Trapezoëdrische Hemiëdrie.
- d. Sphenoidische Hemiëdrie.
- e. Rhombotype Tetartoëdrie.
- g. Erste Hemimorphie.
- i. Dritte Hemimorphie.

$$\{H, A, B, C, D\}.$$

F.

Classe II.
- c. Pyramidale Hemiëdrie.
- f. Sphenoidische Tetartoëdrie.
- h. Zweite Hemimorphie.
- k. Vierte Hemimorphie.

$$\{HA, HB, C, D\}.$$

Das rhombische System.

$$\{A, B, C, D\}.$$

Das monokline System.

$$\{C, D\}.$$

Das trikline System.

$$\{D\}.$$

In den letzten drei Systemen treten keine Unterabtheilungen mehr auf.

§ 11.

Ein regelmäßig ausgebildeter Krystall ist ein homogener Körper, d. h. kein Punkt desselben ist vor dem andern ausgezeichnet. Man kann daher statt der Substitutionen, welche die Symmetrieverhältnisse der Richtungen bestimmen, andere der Untersuchung zu Grunde legen, die sich auf die Coordinaten x, y, z von Punkten beziehen. Ich führe eine dem Bisherigen analoge Bezeichnung ein, lasse aber die auf die negativen Coordinaten bezüglichen Substitutionen in der Bezeichnung weg, wenn nicht positive und negative Coordinaten unter einander vertauscht werden. Es sei

$$K = (x, y, z), \quad H = (x, y),$$
$$A = (y, \bar{y})\,(z, \bar{z}), \quad B = (z, \bar{z})\,(x, \bar{x}), \quad C = (x, \bar{x})\,(y, \bar{y}),$$
$$D = (x, \bar{x})\,(y, \bar{y})\,(z, \bar{z}).$$

Ich bezeichne durch u, v, w die Componenten der unendlich klei-

nen relativen Verschiebung eines Punktes, dessen Coordinaten vor der Einwirkung von äußeren Kräften und im Ruhezustand x, y, z sind. Wird

$$
\begin{aligned}
x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_z = z_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\\
y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},\\
z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
$$

gesetzt und das auf die Volumeneinheit bezogene Potential der durch die relativen Verschiebungen hervorgerufenen elastischen Kräfte durch $-\Phi$ bezeichnet, so ist Φ eine wesentlich positive homogene Function 2. Grades der Argumente x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y, für die Substitutionen vorhanden sind, die den oben angegebenen entsprechen und demgemäß auch bezeichnet werden sollen, so daß

$$
K = (x_x, y_y, z_z)\,(y_z, z_x, x_y), \quad H = (x_x, y_y)\,(y_z, z_x),
$$

$$
A = (z_x, \bar{z}_x)\,(x_y, \bar{x}_y), \quad B = (x_y, \bar{x}_y)\,(y_z, \bar{y}_z), \quad C = (y_z, \bar{y}_z)\,(z_x, \bar{z}_x),
$$

$$
D = 1
$$

wird.

Ich zähle nun die einzelnen Fälle auf, indem ich mich auf die Zusammenstellung F des § 10 stütze und entwickle die zugehörigen Potentiale.

Das trikline System.

Hier gilt die allgemeinste Form mit 21 Constanten. Ich setze in diesem Fall

$$
\begin{aligned}
2\Phi = {} & c_{11} x_x^2 + 2 c_{12} x_x y_y + 2 c_{13} x_x z_z + 2 c_{14} x_x y_z + 2 c_{15} x_x z_x + 2 c_{16} x_x x_y\\
& + c_{22} y_y^2 + 2 c_{23} y_y z_z + 2 c_{24} y_y y_z + 2 c_{25} y_y z_x + 2 c_{26} y_y x_y\\
& + c_{33} z_z^2 + 2 c_{34} z_z y_z + 2 c_{35} z_z z_x + 2 c_{36} z_z x_y\\
& + c_{44} y_z^2 + 2 c_{45} y_z z_x + 2 c_{46} y_z x_y\\
& + c_{55} z_x^2 + 2 c_{56} z_x x_y\\
& + c_{66} x_y^2.
\end{aligned}
$$

Das monokline System.

Hier kommt das Bestehen der Substitution C hinzu, woraus folgt, daß die Coëfficienten



$$c_{14},\ c_{15},\ c_{24},\ c_{25},\ c_{34},\ c_{35},\ c_{46},\ c_{56}$$

sämmtlich gleich Null sind. Es folgt daraus

$$\begin{aligned}2\Phi = c_{11}x_x^2 &+ 2c_{12}x_x y_y + 2c_{13}x_x z_z + 2c_{16}x_x x_y \\ &+ c_{22}y_y^2 \quad + 2c_{23}y_y z_z + 2c_{26}y_y x_y \\ &\qquad + c_{33}z_z^2 \quad + 2c_{36}z_z x_y \\ &\qquad + c_{44}y_z^2 \quad + 2c_{45}y_z z_x \\ &\qquad + c_{55}z_x^2 \quad + c_{66}x_y^2.\end{aligned}$$

Hier kommen 13 Constante vor.

Das rhombische System.

Man braucht nur auf das Potential für das monokline System die Substitutionen A oder B anzuwenden, die zeigen, daß hier noch

$$c_{16},\ c_{26},\ c_{36},\ c_{45}$$

verschwinden müssen. Man erhält also

$$\begin{aligned}2\Phi = c_{11}x_x^2 + 2c_{12}x_x y_y + 2c_{13}x_x z_z + c_{22}y_y^2 + 2c_{23}y_y z_z \\ + c_{33}z_z^2 + c_{44}y_z^2 + c_{55}z_x^2 + c_{66}x_y^2.\end{aligned}$$

In diesem Fall hängt also das Potential von 9 Constanten ab.

Das tetragonale System.

Beachtet man, daß

$$HA = (x_x,\ y_y)\ (y_z,\ \bar{z}_x,\ \bar{y}_z,\ z_x)\ (x_y,\ \bar{x}_y)$$

und das Bestehen von HB schon aus dem von HA und C folgt, so sieht man, daß im Potential des monoklinen Systems für

Die Classe II.

$$c_{11} = c_{22},\quad c_{13} = c_{23},\quad c_{16} + c_{26} = 0,\quad c_{36} = 0,\quad c_{44} = c_{55},\quad c_{45} = 0$$

gesetzt werden muß. Folglich ist

$$\begin{aligned}2\Phi = c_{11}(x_x^2 + y_y^2) + 2c_{12}x_x y_y + 2c_{13}(x_x + y_y)z_z + 2c_{16}(x_x - y_y)x_y \\ + c_{33}z_z^2 + c_{44}(y_z^2 + z_x^2) + c_{66}x_y^2;\end{aligned}$$

diese Formel mit 7 Constanten ist bisher nicht bekannt gewesen.

Die Classe I.

Hier kommt zu den Substitutionen des vorigen Falls noch H hinzu; es ergibt sich also

$$c_{16} = 0$$

und man findet folgenden Ausdruck mit 6 Constanten

$$2\Phi = c_{11}(x_x^2 + y_y^2) + 2c_{12}x_x y_y + 2c_{13}(x_x + y_y)z_z$$
$$+ c_{33}z_z^2 + c_{44}(y_z^2 + z_x^2) + c_{66}x_y^2.$$

Das reguläre System.

Führt man im Potential des rhombischen Systems das Bestehen der Substitution K ein, so findet man

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66}.$$

Hieraus erhält man ohne Weiteres das Potential der Classe II.; bei der speciellen hier zu Grunde gelegten Form des Potentials besteht aber, nachdem K eingeführt ist, H von selbst, so daß man für alle Fälle folgende Formel mit 3 Constanten erhält

$$2\Phi = c_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2c_{12}(x_x y_y + x_x z_z + y_y z_z)$$
$$+ c_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2).$$

§ 12.

Stellt man zum Schluß die Frage, wie die einzelnen Krystallsysteme zu charakterisiren sind, so ist vom Standpunkt, der hier eingenommen wird, folgendes maßgebend. Ein Krystallsystem ist charakterisirt durch die größte Gruppe, die in allen Gruppen seiner Unterabtheilungen enthalten ist; sie soll die Gruppe des Systems heißen und ergibt sich in den einzelnen Fällen aus den Tabellen A. bis E. Von den singulären Fällen aber, die ihren Symmetrieverhältnissen nach verschiedenen Krystallsystemen entsprechen, muß hierbei abstrahirt werden.

Die Gruppe des regulären Systems ist demnach

$$\{K, A, B, C\},$$

in Worten: es sind 3 geradezählige, cyklisch vertauschbare Symmetrieaxen parallel den Kanten und 4 3-zählige Symmetrieaxen parallel den Diagonalen eines Würfels für dieses System charakteristisch. Es sei noch erwähnt, daß diese Eigenschaften geometrisch nicht unabhängig von einander sind; aus den 3 cyklisch vertauschbaren geradezähligen Symmetrieaxen ergeben sich die 3-zähligen, aus zweien von diesen alle übrigen, wie unmittelbar aus den Substitutionen hervorgeht.

Die erste Abtheilung des tetragonalen Systems besitzt die Gruppe

$$\{HAD\},$$

d. h. charakteristisch für sie ist das Vorhandensein von einer 4-zähligen Symmetrieaxe.

Die zweite Abtheilung des tetragonalen Systems ist durch die Gruppe

$$\{HA\}$$

charakterisirt, die einer 2-zähligen und 1-seitigen Symmetrieaxe der 2. Art entspricht.

Das rhombische System ist in 2 Abtheilungen zu zerlegen der ersten entspricht die Gruppe

$$\{A, B, C\},$$

der zweiten die folgende

$$\{AD, BD, C\}.$$

Beiden gemeinsam ist eine 2-zählige Symmetrieaxe, senkrecht zu ihr und zu einander zwei ausgezeichnete Richtungen, die im ersten Fall auf zwei 2-zählige Symmetrieaxen, im zweiten auf zwei Symmetrieebenen hinweisen.

Das monokline System ist durch die Gruppe

$$\{C\}$$

charakterisirt, der eine 2-zählige polare Symmetrieaxe entspricht.

Das trikline System ist für alle beobachteten Substanzen durch die Gruppe

$$\{D\}$$

charakterisirt. Es ist ein Centrum der Symmetrie vorhanden.

Der Vollständigkeit wegen führe ich noch an, daß die erste Abtheilung des hexagonalen Systems durch eine 6-zählige, die zweite durch eine 3-zählige Symmetrieaxe charakterisirt wird.

Bravais[1]) hat zuerst auf die Symmetriaxen der Krystalle aufmerksam gemacht; die Krystallographen haben aber, wenn sie überhaupt Symmetrieeigenschaften der Krystalle zur Charakterisirung der Krystallsysteme angewandt haben, meistens nur die Symmetrieebenen benutzt, die in vielen Unterabtheilungen gar nicht vorhanden sind. Nur Liebisch hat, nachdem auch Sohncke[2]) auf ihre Vorzüge aufmerksam gemacht hatte, in seiner Geometrischen Krystallographie durchweg die Symmetrieaxen der Behandlung zu Grunde gelegt; die hier entwickelte Darstellung ist im Wesentlichen mit der von ihm gegebenen in Uebereinstimmung, der hauptsächlichste Un-

1) Journal de l'école polytechnique. T. XXX. Cah. 33. S. 88 u. ff.

2) Entwicklung einer Theorie der Krystallstructur. S. 184.

terschied ist der, daß hier in der zweiten Abtheilung des tetragonalen Systems die Einseitigkeit der 2. Art der 2-zähligen Symmetrieaxe hervorgehoben ist.

Die hier gegebene Darstellung zeigt, wenn es überhaupt noch eines Nachweises bedurfte, wie ich glaube, unwiderleglich, daß die Charakterisirung der Krystallsysteme durch Symmetrieaxen einen unbedingten Vorzug vor der durch Symmetrieebenen verdient.

Ueber die Einwirkung künstlich erzeugter Nebel auf direktes Sonnenlicht.

Von

Kiessling,

Professor am Johanneum in Hamburg.

Wenn direktes Sonnenlicht künstlich erzeugten Nebel durchdringt, entstehen unter bestimmten günstigen Verhältnissen Farbenerscheinungen von großer Intensität. Wegen der meteorologischen Bedeutung dieser Farbenbildungen habe ich die Bedingungen ihrer Entstehung einer eingehenden experimentellen Prüfung unterworfen, deren Ergebnisse ich im Folgenden kurz anzugeben mir erlaube.

1) Die Versuche sind in einer sphärischen, 30 Cm. weiten Glasglocke angestellt, deren unten abgeschliffener Rand auf einer durchbohrten, matt geschliffenen Glasplatte steht. Die Durchbohrung der letzteren ist mit einem Gummistopfen verschlossen, durch welchen hindurch 4 Glasröhren eine Verbindung mit der Wasserluftpumpe, einem mit Baumwolle gefüllten Luftfilter, einer Waschflasche zur Durchfeuchtung der zu untersuchenden Gase und einem Gasometer gestatten.

2) Leitet man in diesen Diffraktionsraum größere Mengen Ammoniakgas und schwefliger Säure, so bilden sich dichte weiße Wolken eines Staubnebels, welcher aus kleinen Körnchen von schwefelsaurem Ammoniak besteht. Das durch eine solche Staubwolke hindurch sichtbare, das Auge durchaus nicht blendende Sonnenbild im Heliostatenspiegel zeigt einen merkwürdigen Farbenwechsel. Im ersten Moment der Staubwolkenbildung erscheint dasselbe glänzend rothbraun; diese Farbe erhält aber bald einen bläulichen Schimmer und geht dann ziemlich schnell durch Blauviolet in ein glänzendes Azurblau über. Läßt man zu gleicher Zeit in den Diffraktionsraum feuchte Luft eintreten, und wird in derselben durch

plötzliche Druckverminderung eine Condensation hervorgerufen, so vollzieht sich dieser Farbenwechsel in kaum 10 Sekunden. In vollkommen trockener Luft dauert dieser Proceß fast 2 Minuten. Derselbe läßt sich sehr schön objektiv darstellen, indem aus dem Diffraktionsraum ein Kegel schwach divergirender Sonnenstrahlen von intensiv leuchtender blauer Farbe austritt. Ganz dieselbe Erscheinung zeigen auch Staubnebel von Phosphorsäure, Salmiak, sowie Schießpulverdampf.

3) Läßt man die vom Heliostatenspiegel reflektirten Sonnenstrahlen durch die Wasserdampfwolken gehen, welche sich aus den Dämpfen heftig siedenden Wassers bilden, wenn dieselben durch ein enges Rohr in die atmosphärische Luft ausströmen, so kann man einen ähnlichen Farbenwechsel zwischen Braunroth und einem dunkeln Grau blau beobachten, welcher aber wegen der Flüchtigkeit der immer schnell wieder verschwindenden Wolkengebilde, einer sehr schnellen Aenderung unterworfen ist. Um Dampfwolken von hinreichender Dichtigkeit zu erzielen, muß man den Dampf horizontal ausströmen, und einen schwachen Strom über Eis geleiteter kalter Luft hinzutreten lassen.

4) Beide, experimentell dargestellten Erscheinungen sind wiederholt in der Atmosphäre beobachtet worden. In Folge der submarinen vulkanischen Ausbrüche am 11. und 12. Juni 1831 in der Nähe der Insel Pantellaria, welchem später noch mächtige Aschenausbrüche namentlich vom 1. bis 5. August folgten, wurde eine blaue Färbung der Sonne am 10. August 1831 in Saint-Séver beobachtet. Dieselbe Erscheinung ist auch in denselben Tagen in Bordeaux, Perpignan und im ganzen südlichen Frankreich und nördlichen Italien, und ferner Ende September auch in Würzburg gesehen worden; unter gleichen Verhältnissen (Ausbruch auf Barbados) auch am 11. August 1831 in Bermuda, Venezuela und in Centralmexiko; ferner beim Ausbruch des Krakatoa am 21. und 22. Mai von S. M. Corvetta Elisabeth aus in der Sunda-Straße und später am 9.—13. September auf der Insel Ceylon. Viele Berichte über die im vergangenen Winter beobachteten Erscheinungen sind im letzten Jahrgang der englischen Zeitschrift »Nature« enthalten. Die blaue Färbung der Sonne durch Einwirkung des in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdampfes ist eingehend untersucht worden von Laugier (1854), Lissajous (1858), Fournet (1858 und 1859) und Poëy (1859).

5) Ist der Diffraktionsraum mit feuchter, vollkommen filtrirter, also »dunstfreier«[1]) Luft gefüllt, so entsteht bei jeder Temperatur-

1) cf. p. 124.

erniedrigung Nebel, welcher aber nur in direktem Sonnenlicht bemerkbar ist. Derselbe besteht aus feinkörnigen, sehr zerstreut umherliegenden Nebelkörperchen, welche im durchgehenden Licht nicht die geringste Spur von Farbenentwicklung zeigen, offenbar weil sie in zu geringer Dichtigkeit im Raum auftreten. Es scheint hiernach sehr zweifelhaft, ob das von Aitken ausgesprochene Gesetz, »daß, wenn überhaupt Wasserdampf, in der Atmosphäre condensirt, dies stets auf einem festen Kern geschieht, und daß diese Kondensations-Kerne von den in der atmosphärischen Luft vorhandenen Dunsttheilchen gebildet werden«, vollkommen zutreffend ist.

6) Läßt man in einen mit vollkommen filtrirter Luft gefüllten Raum den Dampfstrahl aus einem kleinen Dampfkessel ausströmen, so verschwindet sehr bald der die ersten Dampfwolken begleitende feine, rauchartige Nebel und nach kurzer Zeit entwickelt sich die Erscheinung eines »Regens ohne Nebel«, d. h. ziemlich große, aber sehr zerstreut umherfliegende Regentröpfchen schlagen gegen die Wandungen des Gefäßes und bilden so eine vollkommen durchsichtige Schicht herabfließenden Wassers, durch welche hindurch man die Bewegung der Regentropfen im direkt einfallenden Sonnenlicht sehr leicht beobachten kann. In der freien Atmosphäre ist »Regen ohne Wolken« verhältnißmäßig selten beobachtet worden.

7) Läßt man jetzt eine nur geringe Menge dunsthaltiger Zimmerluft in den Diffraktionsraum eintreten, so bilden sich sofort neben den größeren Regentropfen rauchartige Nebelwolken. Wird unmittelbar hinter das Diaphragma des Heliostatenspiegels ein Schirm von Pauspapier gestellt, so entsteht auf diesem eine hellglänzende, etwa 2 Cm. breite Scheibe. Betrachtet man nun diese durch das Gemisch von Regen und Nebel hindurch, so sieht man einen gelblichen Hof, mit röthlich braunem Rande von ganz derselben Färbung und Größe, wie bei den gewöhnlichen Mondhöfen. Wird aber (nach vorherigem Abschluß sämmtlicher Zuleitungsröhren) durch Druckverminderung außerdem noch eine plötzliche Temperaturerniedrigung erzeugt, so entsteht ein der Größe der nun sich bildenden Nebelkörperchen entsprechendes System größerer, verschiedenfarbiger Diffraktionsringe, ohne daß das schon vorhandene Diffraktionsbild im geringsten dadurch alterirt wird. Daraus folgt, daß die bei dem beschriebenen Condensationsproceß zuerst gebildeten Nebelkörperchen keine Bläschen, sondern massive Wasserkügelchen sind. Denn würde der unter dem Atmosphärendruck zuerst entstandene Nebel aus Bläschen gebildet, so müßte die plötzliche Erniedrigung des Druckes um 30 bis 40 mm nothwendiger Weise eine Ausdehnung dieser Bläschen, also eine Verkleinerung des Durchmessers der

Diffraktionsringe zur Folge haben. Dieses Experiment ist für die Zulässigkeit der von Clausius entwickelten (Pogg. Ann. Bd. 76. 84 und 88) und von Burkhart-Jezler (Pogg. Ann. Bd. 145) erweiterten Theorie der Dämmerungsfarben von entscheidender Bedeutung.

8) Zur Bildung intensiver Diffraktionsfarben ist ein aus Nebelkörperchen von möglichst gleicher Größe gebildeter Nebel erforderlich. Derselbe entsteht aber nur, wenn außer dem »lichtgünstigsten Dunstbetrag« auch im Diffraktionsraum zugleich das Maximum des Feuchtigkeitsgehaltes vollkommen hergestellt ist. Am leichtesten gelingt dies, wenn die Luft vor ihrem Eintritt in denselben durch Wasser geleitet wird, welches auf 30° bis 40° Celsius erwärmt ist. Sind die beiden genannten Bedingungen erfüllt, so ist die Farbenentwicklung so intensiv, daß der aus dem Diffraktionsraum austretende Kegel von Diffraktionsstrahlen auf einem etwa 1 Met. entfernten Schirm von weißem Pauspapier, ein intensiv gefärbtes Querschnittsbild liefert, dessen Farben unter besonders günstigen Verhältnissen an Intensität fast den Farben eines objektiv dargestellten Sonnenspektums von großer Dispersion gleichkommen.

Die Amplitude dieses von der Größe der Nebelkörperchen abhängigen Lichtkegels schwankte zwischen 10° und 30°.

9) Das Diffraktionsbild zeigt einen merkwürdigen Farbenwechsel. Derselbe tritt jedoch nur im Anfang der Nebelbildung auf und durchläuft im Allgemeinen zwei Perioden, nach deren Beendigung die Färbung nahezu konstant bleibt. Die Schnelligkeit, mit welcher dieser Farbenwechsel sich vollzieht ist abhängig vom Sättigungsgrade und der Veränderung der durch Druckverminderung erzeugten, aber durch die Wände des Diffraktionsraumes wesentlich beeinflußten Temperaturerniedrigung. Die Abhängigkeit der Erscheinung von diesen zwei Faktoren ist eine sehr empfindliche. Die genaue Bestimmung derselben muß weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Der Farbenwechsel zeigt sich im centralen Felde sowohl, wie in sämmtlichen dasselbe umgebenden, concentrischen Ringen. Derselbe kann auf dreifache Weise beobachtet werden: objektiv, an dem auf einem weißen, möglichst durchscheinenden Schirm erzeugten Querschnitt, subjektiv im direkten, durch den Diffraktionsraum gehenden Sonnenlicht, wobei aber das vom Heliostatenspiegel kommende Licht durch ein höchstens 1 Cm. breites Diaphragma abgeblendet werden muß, oder durch direkte Beobachtung des Lichtbildes, welches auf einem vor das Diaphragma des Heliostaten gestellten Papierschirm entsteht. Da die anhaltende Beobachtung der Wirkung des direkten Sonnenlichtes die Augen sehr angreift, habe ich vorläufig die genaue Bestimmung des Farbenwechsels nur nach der zuletzt genannten Me-

thode ausgeführt. Die Farben erscheinen aber dann nicht so glänzend und erleiden auch eine, jedoch nicht erhebliche Aenderung im Farbenton, namentlich bei den sehr verschiedenen gelben und rothen Uebergangsfarben. Außerdem treten der Beobachtung der Farben bei direktem Sonnenlicht noch andere Schwierigkeiten entgegen, indem die in Folge der Erwärmung der Gefäßwandungen sehr bald sich bildenden Schichten von verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt, also auch verschiedener Farbe durcheinander fließen, so daß sich das ursprünglich aus verschiedenfarbigen contrentrischen Ringen bestehende Diffraktionsbild in lauter verschiedenfarbige, durcheinanderfließende Wolkengebilde auflöst.

Im ersten Moment der Temperaturerniedrigung bildet sich ein silberweißglänzender, überaus feiner, vollkommen durchsichtiger Nebel, dessen erste sehr schnell vorübergehende Färbung ein ganz blasses mit einem bläulichen Schimmer übergossenes Orange zu sein scheint. Der Durchmesser dieses centralen Feldes schwankt je nach dem Dunstgehalt zwischen 20 und 60°. Nun folgen bei andauernder Druckverminderung, also centinuirlicher Abnahme der Temperatur, in schneller Aufeinanderfolge, die nur durch sehr langsam eintretende Druckverminderung im Diffraktionsraum verzögert werden kann, folgende Färbungen des allmählich kleiner werdenden centralen Feldes:

blaß Lila, blass Blauviolet, leuchtend Hellblau, bläulich Grün, glänzend Smaragdgrün, gelblich Grün, grünlich Gelb, Hell-Orange, dunkler Orange, blass Scharlachroth, blass Purpurroth. Damit ist die erste Periode vollendet.

Jede neu entstehende Farbe schiebt sich vom Centrum aus über die frühere, welche dann zugleich an Durchmesser zunimmt, so daß allmählich ein vielfarbiges, aus concentrischen Ringen bestehendes Bild entsteht. Alle Farben tragen den Charakter von Mischfarben, sind aber mit einem so eigenartigen, mattglänzend metallischen Schimmer übergossen, daß es überaus schwierig ist, dieselben nur annähernd in einem in Aquarellfarben ausgeführten Bilde wiederzugeben. Da mir kein Gypskeil zur Verfügung steht, habe ich nicht konstatiren können, in wie weit diese Farben mit den Newton'schen Farben erster und zweiter Ordnung übereinstimmen. Die Beobachtung dieser Farbenentwicklung ist besonders dadurch erschwert, daß in Folge der fortgesetzt von den nahen nassen Wänden des kleinen Diffraktionsraumes ausgehenden Neubildung von Nebelkörperchen verschiedener Größe, die Färbung oft schnell erblaßt, während zugleich, auch in Folge der Temperaturveränderung, die Farbe in sämmtlichen Ringen sich ändert. Ist daher eine bestimmte Farbe im centralen Felde ausgebildet, so kann man dieselbe durch Unterbrechung der Druck-

verminderung (Abschluß der Wasserluftpumpe) nur verhältnißmäßig kurze Zeit hindurch erhalten. Immer vollkommener gelingt dies gegen Ende der ersten Periode, so daß z. B. das Diffraktionsbild blass purpurroth, breit grün, schmal blau und violet, im centralen Felde und den beiden ersten Ringen sich fast 10 Sekunden lang unverändert erhält.

11) Die zweite Periode des Farbenwechsels im centralen Felde zeigt eine viel geringere Zahl von Farben, nämlich:

Blass Purpur, (nach hinzutretendem blaßvioletten Schimmer) Steingrau, (nach hinzutretendem grünlichen Schimmer) leuchtend Olivgrün, Smaragdgrün (sehr stationär), gelblich Grün, leuchtend Broncegelb, Orange.

Wird die Druckverminderung, also die Temperaturerniedrigung fortgesetzt, so treten zum Orange immer mehr rothe Farbentöne hinzu, und allmählig bildet sich wieder die Anfangsfarbe der zweiten Periode, ein blasses Purpurroth aus, worauf in einer 3. und ev. auch 4. Periode ganz derselbe Farbenwechsel wie in der zweiten Periode sich wiederholt, natürlich mit immer blasser werdenden und trüberen Farben.

12) Aus einer großen Reihe von Beobachtungen welche unter sehr verschiedenen Verhältnissen angestellt worden sind, hat sich ergeben, daß diese zwei Perioden der Farbenfolge im centralen Felde bei ganz verschiedenen Durchmessern ganz regelmäßig auftreten. Nicht so der Farbenwechsel in den Ringen, bei welchen je nach der Größe des Durchmessers und der Ordnungszahl, Abweichungen, aber nur in den Uebergangstönen eintreten, für welche ich ein bestimmtes Gesetz noch nicht habe finden können. Nur das ist bestimmt ersichtlich: je größer der Durchmesser des centralen Feldes ist, desto schärfer erscheinen die Uebergangsfarben von einander getrennt, und desto bestimmter befolgen sie die Reihenfolge der Farben im Spektrum.

13) In hervorragendem Grade stationär ist die Phase der Farbenentwicklung, bei welcher das centrale Feld alle Schattirungen zwischen Gelb und Orange, der erste Ring ein leuchtendes Grün und Blaugrün und der zweite ziemlich breite Ring alle Abstufungen zwischen Blau violet und Roth umfaßt. Die gesammte Oeffnung des aus dem Diffraktionsraum austretenden Lichtkegels schwankt dann zwischen 40° und 70°. Läßt man innerhalb dieses Kegels Wolken von Salmiaknebel aufsteigen, so erscheinen diese leuchtend grün, blau oder purpurroth, je nachdem sie in den Bereich der betreffenden Lichtstrahlen eintreten. Weniger stationär ist die unmittelbar vorherge-

hende Phase, bei welcher das centrale Feld glänzend smargdgrün erscheint, der erste auffallend schmale Ring blass blau violet und der dann folgende breite, sehr lichtstarke, ziemlich gleichmäßig purpurroth (Blass crimson).

14) In besonders hohem Grade ist, wie schon oben erwähnt wurde, die Farbenentwicklung vom Feuchtigkeitsgehalt abhängig. Erzeugt man daher, während im Diffraktionsraum ein nasser Schwamm sich befindet, eine Temperaturerniedrigung, nachdem vorher in schneller Aufeinanderfolge Ströme trockener staubiger Zimmerluft und über heißes Wasser geleiteter, übersättigter Luft eingetreten sind, so zeigt sich ein oft 10 bis 15 Sekunden lang anhaltendes Gemisch, von fast in allen prismatischen Farben erglänzender, durcheinanderlaufender Wirbelfäden verschiedenfarbiger Nebelwolken. Es scheinen dann zweifellos dieselben Bedingungen vorhanden zu sein, wie beim Eintritt des in Brasilien unter dem Namen arrebol bekannten Dämmerungsphänomens, welches ausführlich von Burkhart-Iezler in Pogg. Ann. B. 145 beschrieben ist.

Besonders deutlich ausgeprägt läßt sich die Abhängigkeit der Farben von der specifischen Beschaffenheit des Nebels beobachten, wenn mit einer Gasflamme der obere Theil der den Diffraktionsraum bildenden Glasglocke erwärmt wird. Dann wird durch die von der Glaswand ausströmenden Wärme die Bildung größerer Nebelkörperchen verhindert, so daß der obere, wärmere Theil des Diffraktionsraumes entweder nebelfrei bleibt oder höchstens bei andauernder Druckverminderung (also Temperaturerniedrigung) sich mit ganz feinkörnigem, überaus durchsichtigem Nebel anfüllen kann. Ist dann z. B. das centrale Feld während der ersten Periode des Farbenwechsels unten orange gefärbt, so erscheint der obere Theil an der Basis grün und an der Spitze blau und läßt außer dem frappanten, scharf abgegränzten Farbenwechsel deutlich den größeren Radius erkennen.

Wird diese Erwärmung so ausgeführt, daß eine mindestens 10 Cm. hohe Calotte eine Temperatur von etwa 40° bis 50° Celsius erhält, und befindet sich am Boden des Diffraktionsraums ein nasser kalter Schwamm, so bildet sich ganz von selbst Nebel, welcher zuerst an der Gränze zwischen der oberen, wärmeren und unteren, kälteren Luft entsteht, und sich allmählich nach unten hin ausbreitet, während der obere Theil der Glocke vollkommen klar bleibt. Läßt man nun parallel zu dieser Gränzschicht direktes Sonnenlicht einfallen, so erscheinen allmählich die übereinander liegenden Nebelschichten in überaus intensiven Farben, welche je nach der Größe der Nebelkörperchen in den einzelnen Schichten verschieden sind, und welche da, wo diese Schichten horizontal übereinander gelagert er-

scheinen, die Reihenfolge der Farben im Spektrum zeigen; dann ist offenbar derjenige Zustand der Luft im Diffraktionsraum hergestellt, wie er als ein regelmäßig auftretender von Alluard auf dem Gipfel des Puy de Dôme im vergangenen Winter beobachtet worden ist, wo die Temperatur in der Ebene 1,3° und am Gipfel 8° betrug. Alluard berichtet, daß beim Aufgang und Untergang der Sonne bei ganz ruhiger Luft über der Sonne am Horizont in allen Richtungen die Regenbogenfarben sich entwickelt hätten, und daß zugleich am entgegengesetzten Theil des Himmels »une veritable illumination« sichtbar gewesen sei. (C.R. Bd. 98. p. 161.)

15) Welche Bedeutung die im vorstehenden mitgetheilten Erscheinungen für die Erklärungder vielfarbigen Dämmerungsphänome haben, liegt auf der Hand. Eine einfache geometrische Konstruktion läßt unter Berücksichtigung der meteorologischen Verhältnisse der Atmosphäre erkennen, warum diese Erscheinungen nur dann beobachtet werden können, wenn die Sonnenstrahlen den parallel zur Erdoberfläche liegenden Nebelschichten selbst parallel sind d. h. also bei Sonnenaufgang und Sonnenuntergang; ferner, warum die Farbenbildung nur kurz vor Sonnenaufgang und kurz nach Sonnenuntergang sich entwickeln kann. Namentlich aber finden die zuerst von Poëy untersuchten, auch im vergangenen Winter häufig beobachteten »prismatischen Dämmerungen« (C. R. Bd. 48) nach Farbenfolge und Farbenwechsel eine vollkommen ausreichende Erklärung.

Die königliche Gesellschaft der Wissenschaften hat in ihrer Sitzung am 3ten Mai d. J. den Staatssecretär Herrn Dr. Heinrich Stephan zu ihrem Ehrenmitgliede erwählt.

Universität.

Beneke'sche Preisstiftung.

I.

In der Aufgabe der Beneke'schen Preisstiftung für das Jahr 1884 verlangte die philosophische Facultät, daß ein allgemeiner Ueberblick über die Entwicklung der Cultur der italischen Völker gegeben und dann im Besonderen gezeigt werde, was die bildenden und zeichnenden Künste bei den Italern den Künsten der Nichtitaler verdanken, und hinwiederum, wo sie außerhalb der italischen Länder Wurzel getrieben und wiefern sie einen Einfluß auf die Entwicklung der Künste bei Nichtitalern gehabt haben.

Diese Aufgabe hat eine Bewerbungsschrift veranlaßt, welche unter dem Titel »Cultur und Kunst der Italer in ihrem Verhältniß zum Auslande, eine historisch-archäologische Untersuchung« wesentlich rechtzeitig eingegangen ist, aber leider nur als Fragment. Der Verfasser hatte das Ganze ausgearbeitet, konnte aber bei dem großen Umfange des Werkes, »das neben zahlreichen Geschäften und Pflichten eines verantwortungsreichen Amtes fertig gestellt werden mußte«, die Reinschrift nicht ermöglichen, sondern mußte sich damit begnügen, nur die Dispositionen der folgenden Bücher und Abschnitte mitzutheilen.

Die Schrift geht weit über das in der Aufgabe Geforderte hinaus. Ueber die Cultur der italischen Völker ist umständlich und im Detail gehandelt, selbst hinsichtlich einiger Zweige, die mit Kunsthandwerk und Kunst nur in entferntem Zusammenhange stehen. Von den Künsten sind nicht bloß die bildenden und zeichnenden, sondern ist auch die Architektur eingehend behandelt oder berücksichtigt, während es nach der Aufgabe genügt haben würde, auf diese in dem culturhistorischen Ueberblick und in sofern, als sie als Trägerin der bildenden und zeichnenden Künste erscheint, Rücksicht zu nehmen. Ferner erlaubte es die Aufgabe, die Untersuchung auf die heidnische Kunst Italiens und auf die sie beeinflussende oder von ihr beeinflußte außeritalische heidnische Kunst zu beschränken, ja es ist geradezu vermieden, die Behandlung auch der altchristlichen Kunst zu beanspruchen, obgleich sich diese an die heidnische Kunst des Alterthums anschließt und christliche Gedanken und Symbole in antiken Kunstformen verbreitet hat; schon aus dem Grunde, weil es nicht räthlich schien, die Schwierigkeit und den Umfang der Arbeit durch diese Forderung noch zu vergrößern. Der Verfasser der Preisschrift hat sich aber nicht enthalten können, auch die Kunstdenkmäler der Heidenchristen auf dem Schauplatze der classischen Welt heranzuziehen und zu prüfen, wie die der neu aufgetretenen keltischen und germanischen Völker. Hinsichtlich dieser stellt sich freilich die Sache anders. Wir wollen es ausdrücklich anerkennen, daß der Verfasser selbst in Betreff der Halbculturen der transalpinen Völkerwelt bis hinauf nach dem scandinavischen Norden mit ihrem durch die prähistorischen und anthropologischen Forschungen des letzten Menschenalters so staunenswerth bereicherten Materiale den Versuch gemacht hat, das im Zusammenhange vorzutragen, was sich ihm bisher bei einschlägigen Forschungen an sicheren Forschungen ergeben hatte. Aber freilich liegt davon in dem ausgearbeitet eingereichten Theile der Preisschrift nichts vor; wie denn überall der Umstand, daß der Verfasser möglichst viel hat leisten wollen, ihn verhindert

hat, seiner Arbeit selbst in den Hauptsachen die gehörige Vollendung zu geben. Daß derselbe aber ein Gelehrter ist, welcher sich besonders berufen fühlen durfte, die Aufgabe ihrem hauptsächlichsten Theile nach zu lösen, geht auch aus dem hervor, was ausgearbeitet vorliegt, wenn auch alle Abschnitte desselben nicht gleichwerthig sind und der Verfasser durch die Eile, in welcher er das gewaltige verschiedenartige Material bearbeiten mußte, verhindert worden ist, in der Behandlung des Einzelnen stets Genauigkeit, in der des Ganzen die gehörige Harmonie zu Tage treten zu lassen. Man findet mehrfach unnöthige Wiederholungen; andererseits, freilich nur selten, auch Nichtberücksichtigung von Solchem, was nicht unwichtig erscheint. Es liegt auf der Hand, daß der Verfasser selbst die ausgeführten Partien seiner Schrift der gehörigen Durchsicht nicht hat unterziehen können.

Dem Ganzen ist eine Einleitung voraufgeschickt, welche als sehr gelungen bezeichnet zu werden verdient.

Es ist in zwei Theile zerlegt, von denen der erste die Cultur der Italer, der andere die Kunst derselben, beide an sich und in ihrem Verhältniß zum Auslande, betrifft.

Von dem ersten Theile bezieht sich Cap. I auf Italiens Bodenbeschaffenheit, geographisch-geschichtliche Aufgabe, Klima und Vegetation. Wir finden hier in gut gewähltem, gedrungenem und lebendigem Ausdruck manche treffende Bemerkung. Flora und Fauna sind auch im zweiten Cap. des ersten Theils und wiederum im ersten Buche des zweiten besprochen. Es wäre doch wohl zweckmäßiger gewesen, wenn sie gleich an der ersten Stelle vollständig in historischer Uebersicht behandelt worden wären. Der Verfasser hält das Vorhandensein des Weinstockes schon in der Urzeit nach den prähistorischen Funden in Pfahldörfern der Emilia und den sprachvergleichenden und antiquarischen Beweisen F. O. Weise's für ausgemacht. In Betreff der wilden Rebe hat die Sache auch nicht das mindeste Bedenken. Auch die Feige soll schon in gräco-italischer Zeit dagewesen sein. Die genau eingehenden Untersuchungen des Grafen Solms sind dem Verfasser noch nicht bekannt gewesen. Nach den Fundergebnissen in den Pfahldörfern sollen diese schon Oel und Weizen gebaut haben. Der Verfasser berücksichtigte diese Meinung mit Recht gar nicht. Den Oelbaum läßt er richtig von Hellas über Großgriechenland nach Latium und zwar zur Zeit der Tarquinier kommen; über den Weizen schweigt er gänzlich. Wir heben sonst nur noch hervor die Bemerkung, daß das Huhn uns zuerst in dem Bilde einer punischen Münze von Solus in Sicilien entgegen trete. Die betreffende, auf dem Avers einen Hahn zeigende Silbermünze

gehört der Zeit der besten Kunstübung an. In dieselbe Periode fällt auch der Hahn auf Kupfermünzen von Himera. Aelter sind die Silbermünzen von Himera mit Hahn allein oder Hahn und Henne. Daß die Hühner aber von Norden aus in den Gesichtskreis der Römer getreten seien, hat soeben Nissen Italische Landeskunde I, S. 444 mit Wahrscheinlichkeit vermuthet. Von den Fischen wird eigenthümlicherweise nur der Delphin hervorgehoben, »der mit dem Apollokultus nach Rom gelangt zu sein scheine, lange ehe man in Folge des regen Seeverkehrs zwischen Sicilien und Latium der Fischkost und Fischzucht in Rom größere Aufmerksamkeit zuwendete.« Der Verfasser meinte doch sicherlich nicht, daß hier Delphine für den Apollokultus gezüchtet seien.

In Cap. II erhalten wir eine lobenswerthe Uebersicht über den Zustand in der Urzeit nach den Schriften über die prähistorischen Funde.

Cap. III betrifft die Einwanderung der Italer und der Etrusker. Es hebt an mit der Besprechung der Wanderung der Indogermanen, in welcher Vieles sehr problematisch ist. Es wird angenommen, daß das griechische Volk sich zuerst aus dem Verbande der europäischen Indogermanen gelöst habe, daß die Italer noch längere Zeit mit den nördlichen Stämmen, d. h. den Germanen, Slaven und Letten verbunden gewesen seien. Dabei ist doch von den gemeinsamen Stammvätern der Griechen und Italer die Rede, welche in Kleinasien, an den Küsten des ägäischen Meeres und der Propontis festen Fuß gefaßt hätten (S. 60 fg.) und, während es S. 63 heißt, das Altlateinische zeige in seiner Grammatik nirgends eine speciellere Verwandtschaft mit dem Griechischen, vielmehr in mehreren Punkten eine entschiedene Hinneigung zu den nordischen Sprachen, lesen wir S. 172, die Sprache der Italer stehe unter den indogermanischen der griechischen am nächsten. — Die Italer sollen nach dem Verfasser sämmtlich zu Lande vom Norden eingewandert sein und die erste Bevölkerung der Terramare ausgemacht haben. Er erwähnt zwar mit einem Worte die Meinung, daß die späteren Iapyger oder Apuler überhaupt die ersten Einwanderer in Italien gewesen seien, denkt auch weiter unten darauf zurückzukommen (S. 74), was aber nicht geschehen ist. Die Veneter hat er ganz unberücksichtigt gelassen. Iapyger und Veneter gelten angesehenen Forschern als von der Italiens Ostküste gegenüberliegenden zur See herübergekommen. Aus ihren Sitzen in der Poebene wurden die Italer nach dem Verfasser durch die Etrusker vertrieben. Ueber die Hauptfrage, ob es wirklich diese waren, welche die Terramare-Bewohner verdrängten, hätte man gern Genaueres gehört. — Was der Verfasser über die früheren Wanderungen der Etrusker sagt, beruht nur auf Vermuthungen, für welche uns die ge-

nügenden Haltpunkte fehlen. In Italien, nimmt er an, seien sie vom Hämus her ziehend, in der Gegend von Verona aufgehalten und nordwärts zunächst in das Etschthal gedrängt. In Folge wiederholter Versuche von Seiten der Etrusker sich südwärts Platz zu schaffen, seien die Italer über den Po hinübergegangen und die meisten Etrusker ihnen bis zu diesem nachgerückt, doch habe sich ein Theil der Italer in dem Gebiete nördlich von Mailand zwischen Adda und Ticino gehalten. Dies kann man immerhin als gewagte Hypothesen betrachten, wenn auch der Unterschied zwischen nördlichen und südlichen Etruskern durchaus feststeht. Was der Verfasser hierüber sagt, sowie über die älteste Cultur der Etrusker überhaupt, ihre Kriegszüge, die Ausdehnung ihrer Herrschaft, die Zwölfstädte, die Besitznahme Etruriens, die Falisker und campanischen Etrusker, endlich über den Sturz der Etruskermacht, läßt sich alles sehr wohl hören. In Betreff der campan. Etrusker hat er das Verdienst, die Behauptung Fr. von Duhn's, daß die Anwesenheit der Etrusker in Campanien trotz der Angaben der Alten nicht zu beweisen sei, schlagend zurückgewiesen zu haben.

Cap. IV »die griechischen Colonien in Italien« betreffend, gehört zu den schwächsten Partien der Schrift. Der Hauptgrund dafür, daß die Hellenen sich zuerst im Westen Süditaliens niederließen, liegt darin, daß die ihnen stammverwandten Iapyger nebst ein paar anderen minder bedeutenden Stämmen schon vorher den Südosten in Besitz genommen hatten. Ueber Einzelheiten, die in diesem Capitel aufstoßen, kann hinweggegangen werden, da der Verfasser sie bei nochmaliger prüfender Durchsicht selbst gewahren wird.

Auch Cap. V, über die Kelten, genügt nicht. Woher weiß der Verfasser, daß die Lingonen und Bojer Stämme der Senonen seien, und daß die Bojer im zweiten punischen Kriege in Etrurien sich festzusetzen versuchten?

In Cap. VI wird die Religion der Italer ausführlicher besprochen. Wir erhalten noch mehr als eine gute Uebersicht. Gegen einige Punkte lassen sich allerdings Bedenken erheben, z. B. gegen das, was über die latinischen und sabinischen Elemente der Römischen Religion gesagt wird, und gegen die Behauptung, daß die religiöse Verherrlichung des Kaiserhauses seit Augustus mehr und mehr Hauptsache des öffentlichen Gottesdienstes geworden sei. Wenn der Verfasser den Einfluß der etruskischen Religion auf die römische für viel geringer erachtet als bisher angenommen wurde, wie denn die römisch-latinische Cultur sich auf Grund der neuesten Entdeckungen viel unabhängiger von der etruskischen zeige als man bisher geneigt war zu glauben, so müssen wir das dahingestellt sein lassen.

Cap. VII beschäftigt sich in mehr als genügender Ausführlichkeit mit Sprache und Litteratur. Es bringt manches Ansprechende. Wenn der Verfasser den Einbruch der Gallier wesentlich als Grund dafür betrachtet, daß die danach entstehende Litteratur so wenig Sinn für die nationale Vergangenheit zeige, so dürfte das kaum wahrscheinlich sein.

In Cap. VIII wird in passender und nützlicher Darstellung über Schrift, Zahl, Maß, Zeitrechnung, Münze gehandelt, in Anlehnung an die neueren Forschungen, von denen nur die neueste von Bahrfeldt dem Verfasser noch nicht bekannt geworden ist.

Die wichtigen Cap. IX, über die Lebensweise, und X, »Handel und Schiffahrt«, konnten bis zum gesetzten Termin noch nicht vollständig in Reinschrift geliefert werden, was, nach der mitgetheilten Disposition zu schließen, recht zu bedauern ist.

Der zweite Theil des Ganzen ist der Behandlung der Kunst der Italer in ihrem Verhältniß zum Auslande gewidmet. Sie ist mit einer Einleitung eröffnet und in drei Bücher getheilt (1, die Italer und der Orient, 2, Italer und Hellenen, 3, Italer, Kelten und Germanen), deren drittes wiederum in drei Abtheilungen zerfällt (1, älteste Berührungen, 2, Rom und das heidnische Abendland, 3, das christliche Rom und seine Einflüsse auf die Künste). Dem zweiten Buche ist ein Anhang zugedacht, welcher den litterarischen Apparat wissenschaftlicher Auseinandersetzung mit abweichenden Ansichten oder archäologisch-philologischer Einzelnheiten enthalten soll.

Die Einleitung behandelt übersichtlich und im Zusammenhange die ersten Anfänge der Kunst in Italien, welche zum Theil schon früher berührt sind. Besonders beachtenswerth, daß Conze's Annahme einer mitgebrachten indogermanischen Kunst mit guten Gründen zurückgewiesen wird, dagegen in Folge des festgestellten Vorkommens von Bernsteinperlen in der Terramare von Castione angenommen, daß sich während der Rast der Italer vor ihrer Einwanderung in die Apenninhalbinsel Beziehungen zu den benachbarten Kelten gebildet hatten, welche auch wohl auf die gewerbliche Cultur jener eingewirkt haben könnten.

Das zweite Buch giebt erstens eine geschichtliche Uebersicht der Beziehungen Italiens zum Orient, behandelt dann zweitens die Einwirkungen des Orients auf italische Kunstübung und drittens die römischen Einflüsse auf die bildenden Künste des Orients. Dieses Buch verdient besondere Anerkennung. Der Verfasser beginnt mit der Besprechung der großen Hieroglypheninschrift, welche neben bildlich dargestellten Kriegsscenen den Schmuck eines kleines Hofes südlich von der Außenmauer des Tempels zu Karnak bildete (Text

und Abbildung jetzt am besten bei Dümichen Histor. Inschriften I, Taf. 1—6). Während namhafte Aegyptologen und Historiker bis in die neueste Zeit hinab unter den hier genannten, von Westen her unter Führung eines Lebu-Fürsten in Aegypten eingedrungenen Völkern auch die Etrusker, Sardinier und Siculer erwähnt erachten, macht der Verfasser durchaus wahrscheinlich, daß dem nicht so sein könne. »Wir haben also kein urkundliches Zeugniß für die Beziehungen Italiens zu Aegypten im 14. Jahrhundert.« Die ältesten Träger der Kultur des Orients sind für Italien die Phöniker, und zwar etwa vom J. 1000 v. Chr. an. Doch fehlt es auch nicht an Spuren alter und starker Beziehungen Aegyptens zu Italien, auf welche besonders aufmerksam gemacht zu haben, ein Verdienst des Verfassers ist. Auch Persien stand in einem bisher noch nicht bekannten alten Zusammenhange mit Etrurien, da in der Zeit von c. 550—450 persische Gold- und Silbermünzen hier in großer Zahl umliefen.

Das zweite Buch stellt sich zunächst die Aufgabe, eine Geschichte der Hellenischen Cultureinflüsse auf Italien zu geben. Als Hauptheerd jener wird mit Recht Kyme mit den übrigen chalkidischen Kolonien an der Südwestküste betrachtet. Daß diese auch für die Metallkunst eine Rolle gespielt haben, giebt der Verfasser zu, aber er stellt es in Abrede, daß dieses in dem Maße stattgehabt habe, wie es von Duhn, Helbig und Löschke angenommen wird. Hinsichtlich Roms macht der Verfasser schließlich darauf aufmerksam, daß schon durch die ersten Jahrhunderte der Stadt ein Parallelismus der Erscheinungen mit gleichzeitigen Vorgängen bei den Hellenen, namentlich auch den Athenern, nachweisbar ist, der kein Spiel des Zufalls sei, sondern eine Reflexwirkung lebendigen Völkerverkehrs.

Leider mußte der Verfasser hier abbrechen. Es fehlt also die wichtige Partie des zweiten Buches, in welcher die besonderen Hellenischen Einflüsse auf Architektur, Plastik und Malerei der Italer, das Römisch-Italische in griechischer Kunstübung, Rom und Alexandrien behandelt werden sollten, nebst dem Anhange, so wie das ganze dritte Buch in ausgeführter Darlegung.

Bei so bewandten Umständen kann dem Verfasser trotz seiner anerkennungswerthen Bemühungen keiner der beiden Preise zugesprochen werden; doch hat er sich durch sein Streben und seine wirklichen Leistungen wohl das Anrecht erworben, daß die Aufgabe, als außerordentliche, für das Jahr 1887 wiederholt werde, und da ihre gehörige Lösung auch für die Wissenschaft besonders viel werth sein würde, so erlaubt sich der Ref. die Wiederholung dringend zu befürworten. —

Der Vorschlag des Ref. wurde von der Facultät angenommen und

bei dem Magistrate der K. Haupt- und Residenzstadt Berlin befürwortet. Doch mußte dieser zu seinem Bedauern in Folge der Statuten abschlägige Antwort ertheilen.

II.

Die Aufgabe für das Jahr 1887 ist folgende:

»Seit Thomas Young (Lectures on Natural Philosophy, London 1807, Lecture VIII) wird den Körpern von vielen Physikern Energie zugeschrieben, und seit William Thomson (Philosophical Magazine and Journal of Science, IV Series, London 1855 p. 523) wird häufig das Princip der Erhaltung der Energie als ein für alle Körper gültiges ausgesprochen, worunter dasselbe Princip verstanden zu werden scheint, was schon früher von Helmholtz unter dem Namen des Princips der Erhaltung der Kraft ausgesprochen war.

Es wird nun zunächst eine genaue historische Entwicklung der Bedeutung und des Gebrauchs des Wortes Energie in der Physik verlangt; sodann eine gründliche physikalische Untersuchung, ob verschiedene Arten der Energie zu unterscheiden und wie jede derselben zu definiren sei; endlich in welcher Weise das Princip der Erhaltung der Energie als allgemein gültiges Naturgesetz aufgestellt und bewiesen werden könne.«

Bewerbungsschriften sind in Deutscher, Lateinischer, Französischer oder Englischer Sprache mit einem versiegelten Briefe, welcher den Namen des Verfassers enthält, bis zum

31. August 1886

an uns einzusenden. Das Titelblatt der Schrift und die Außenseite des Briefs müssen mit einem übereinstimmenden Spruche versehen sein und es muß ersteres außerdem die Bezeichnung der Adresse enthalten, an welche die Schrift für den Fall, daß sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist.

Der erste Preis beträgt 2500 Mark, der zweite 1000 Mark.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1887, dem Geburtstage des Stifters. Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1884 und bis zum 31. August 1885 einzusenden sind, finden sich bezw. im Jahrg. 1882 S. 200 und Jahrg. 1883 S. 67 dieser Nachrichten.

Göttingen, den 16. April 1884.

Die philosophische Facultät

W. Henneberg, z. Z. Decan.

Preisstiftung der Wittwe Petsche geb. Labarre.

Die medicinische Facultät verlangt zur Bewerbung um den ihr für dieses Jahr zustehenden Preis von 152 R.-Mark (hundertzweiundfünfzig Mark) eine Arbeit aus dem Gebiete der allgemeinen Pathologie oder pathologischen Anatomie.

Der Preis kann nur den Arbeiten solcher zuerkannt werden, die entweder in diesem oder in dem nächsten Semester als Studirende unserer Universität angehört haben. Die Preisarbeiten müssen spätestens bis zum 1. Januar 1885 mit einem, gleichlautend auf einem versiegelten inwendig den Namen des Verfassers enthaltenden Zettel zu setzenden, Motto versehen, dem Dekan der Fakultät übergeben werden.

In der ersten Woche des März 1885 wird der Erfolg der Preisbewerbung durch Anschlag am schwarzen Brett und durch die »Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Universität« bekannt gemacht. Der Verfasser der Arbeit, welcher der Preis zuerkannt ist, hat sich bei dem Dekan zu melden und von ihm den Preis in Empfang zu nehmen.

Göttingen, den 1. Juni 1884.

Der Dekan der medicinischen Fakultät
Orth.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März 1884.

Nature No. 748. 749. 750. 751. 752.
Bulletin of the museum of comparative zoology at Harvard's college. Vol. XI. No. 9.
Bulletin de l'académie roy. de Belgique. 3e Série. T. VI. No. 12.
Bulletin astronomique et météorologique de l'observatoire impér. de Rio Janeiro. 1883. No. 10.
Revista Euskara. Año VI. No. 66.
Mittheilungen aus dem Jahrbuch der k. ungarischen geologischen Anstalt. Bd. VI. Hft. 9. 10.
Zeitschrift der ungarischen geologischen Gesellschaft. Bd. XIII. Hft. 11. 12.
v. Kokscharow, Materialien zur Mineralogie Rußlands. Bd. IX. S. 1—80.
Royal microscopical society. List of fellows. 1884.
A. v. Jochmus gesammelte Schriften, herausgegeben von G. M. Thomas. Berlin 1883. Bd. I—IV.
Censo general de la provincia de Buenos Aires. 1883.
Politische Correspondenz Friedrichs des Großen. Bd. XI. Berlin 1883.

Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. März.
Leopoldina. Hft. XX. No. 3. 4.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. XXXIV. No. 1.
Vandstands observationer udgivet af den norske gradmaalingskommisson. Hefte II.
Sitzungsberichte der mathematisch-physicalischen Classe der k. bair. Academie der Wissenschaften. 1883. Hft. 3.
— der philosophisch-philolog. u. histor. Classe der k. bair. Academie der Wissenschaften. 1883. Hft. 4.
Anzeiger zur Kunde der deutschen Vorzeit. 30. Jahrgg. No. 1—12.
29. Jahresbericht des germanischen Nationalmuseums. Nürnberg 1883.
Jahresbericht der historisch-antiquarischen Gesellschaft in Graubünden. Jahrg. 1881. 1882.
Memorie del r. istituto lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere. Vol. XIV. fasc. 3. Vol. XV. fasc. 1.
— — Classe di scienze matemat. e natur. Vol. XV. fasc. 1.
Rendiconti del r. istituto lombardo di scienze e lettere. Ser. II. Vol. XV.
Atti della fondazione scientifica cagnola dalla sua istituzione in poi. Vol. VII.
Mémoires de l'academie impér. des sciences de St. Petersbourg. T. XXXI. No. 9.
Proceedings of the cambridge philosoph. society. Vol. IV. P. 6.
Transactions of the cambridge philosoph. society. Vol. XIII. P. 3.
Boncompagni, bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matemat. e fisiche. T. XVI. Maggio. (Für die Gauß-Bibliothek).
Memoirs of the museum of comparative zoology at Harvard College. Vol. X. No. 1.
W. Hittorf, über die Electricitätsleitung der Gase. S.-A. a. d. Annalen der Physik u. Chemie.
R. Wolf, astronomische Mittheilungen. 1884. Febr.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. I.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVII. Entr. 2.
Verhandelingen der koninklijke Akademie van Wetenschapen. Afdeeling Letterkunde. Deel XIV. Afd. Natuurkunde. D. XXIII.
Verslagen en mededeelingen der koninklijke akademie van wetenschapen. Afd. Letterkunde. D. XII. Afd. Natuurkunde. D. XVIII.
Jaarboek van de konikl. akademie van wetenschapen gevestigd te Amsterdam 1882.
Processen-verbaal van de gewone vergaderingen der koninkl. akademie van wetenschapen. Afd. Natuurkunde. Mei 1882—April 1883.
Naam- en Zaakregister op de verslagen en mededeelingen der koninkl. akademie van wetenschapen. 2e Reeks. D. I—XII.
Actas de la academia nacional de ciencias en Cordoba. T. V. Entr. 1.
American Journal of mathematics. Vol. VI. No. 3.
Hermite et Lipschitz, sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques. S.-A. aus Mittag-Leffler, Acta mathemat.
Irmischia. 3. Jahrgang. No. 11. 12. Titel.
Abhandlungen des thüringischen botanischen Vereins Irmischia. Hft. III. Bogen 1.
Monthly notices of the royal astronomical society. Vol. XLIV. No. 4.
Mittag-Leffler, Acta mathematica. 3, 2. 3.
Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft in Würzburg. Jahrgg. 1883.
Journal de l'école polytecnique. Cah. 53.
Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. XIX. Hft. 1.
Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. 1882/83.
Bulletin de l'academie roy. des sciences etc. de Belgique. 3e Série. T. VII. No. 1.
Atti della r. accademia dei Lincei. Ser. 3a. Transunti. Vol. VIII. fasc. 4—6.
Records of the geological survey of India. Vol. XVII. P. 1.
Jahresbericht der Rede- u. Lesehalle der deutschenu Stdenten in Prag. 1883/4.
Memorie della r. accademia delle scienze di Torino. Serie 2a. T. XXXII—XXXV.
Atti della r. accademia della scienze di Torino. Vol. XV—XVIII.
Mittheilungen aus dem Jahrbuch der k. ungarischen geolog. Anstalt. Bd. VI. Hft. 1.
Zeitschrift der k. ungarischen geologischen Gesellschaft. Jahrg. XIV. Hft. 1—3.

1884.

Transunti. Vol. VIII. Fasc. 7. 8. 9. 10.
schaft. Jahrgg. XVIII. Hft. 4.
rausgg. im Auftr. des naturwissenschaftl.
Bd. LVI. Hft. 6.
hia. 1884.

aturali. Processi verbali. Vol. IV. In-

15 Marzo 1884. Commemorazione del de-

aft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens.

Keimblätter des Kaninchens. Festschrift

und Geruchsorgans menschl. Embryonen.

und die Gewebe. S. A. aus der Zeitschr.

Vol. III. No. 29.
Meteorologie. Bd. XIX. April.
Landeskunde. N. F. Bd. XVII. Hft.

bürgische Landeskunde für das Vereinsjahr

ional sciences of Philadelphia. Part III.

grafia e di storia delle scienze matemat. e
(Für die Gauß-Bibl.)
amarilla. Culiacan 1884.
mical society. Vol. XLIV. No. 5.
tical society. No. 214. 215.
ociety. Ser. II. Vol. IV. P. 2.
in der Provinz Hannover aufgefundenen
rtärer Säugethiere. (S. A. aus dem Jahres-

losoph. society of Liverpool. Vol. XXXVI.

society. Vol. XLVII.
etc. de Belgique. 3e Sér. T. VII. No. 2. 3.

esellschaft in Zürich. XLVIII.
logique de l'observatoire impér. de Rio Ja-

l-Observatoriums in St. Petersburg. Jahrg.

Morgenlandes. Bd. VIII. No. 3.
of sciences. No. 1.
sciences physiques et naturelles. T. XI. No. 4.
brazileira realizada pelo Museu do Rio de

scienze di Torino. Serie 2a. T. XXXV.
di Torino. Vol. XIX. dist. 1a.
delle scienze di Torino, Torino 1883.
impériale archéologique pour l'année 1881.

Serie Aa. No. 98. 90. Ser. Ab. No. 7. 9.
53—60.

April 1884.

Nature No. 753. 754. 755. 756.
Atti della reale accademia dei Lincei. Transunti. Vol. VIII. Fasc. 7. 8. 9. 10.
Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrgg. XVIII. Hft. 4.
Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgg. im Auftr. des naturwissenschaftl. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. LVI. Hft. 6.
XL. bis XLII. Jahresbericht der Pollichia. 1884.
Acta mathematica. 3 : 4.
Atti della societa toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. IV. Indice del Vol. I.
Atti parlamentari. Tornata di sabato 15 Marzo 1884. Commemorazione del deputato G. Sella.
Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Hft. 30.
A. Kölliker, die Entwicklung der Keimblätter des Kaninchens. Festschrift zum würzburger Jubiläum.
Ders., zur Entwicklung des Auges und Geruchsorgans menschl. Embryonen. Festschrift zum züricher Jubiläum.
Ders., die embryonalen Keimblätter und die Gewebe. S. A. aus der Zeitschr. für wissenschaftliche Zoologie.
Johns Hopkins university circulars. Vol. III. No. 29.
Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. April.
Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. XVII. Hft. 1—3. Bd. XVIII. Hft. 1. 2.
Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde für das Vereinsjahr 1881/82.
Proceedings of the academy of national sciences of Philadelphia. Part III. (Novbr. und Decbr. 1883).
Boncompagni, bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matemat. e fisiche. T. XVI. Giugno Luglio. (Für die Gauß-Bibl.)
J. Praslow, Apuntes sobre la fiebre amarilla. Culiacan 1884.
Monthly notices of the royal astronomical society. Vol. XLIV. No. 5.
Proceedings of the London mathematical society. No. 214. 215.
Journal of the royal microscopical society. Ser. II. Vol. IV. P. 2.
C. Struckmann, über die bisher in der Provinz Hannover aufgefundenen fossilen und subfossilen Reste quartärer Säugethiere. (S. A. aus dem Jahresbericht der naturhist. Gesellsch.)
Proceedings of the literary and philosoph. society of Liverpool. Vol. XXXVI. XXXVII.
Memoirs of the royal astronomical society. Vol. XLVII.
Bulletin de l'acad. roy. des sciences etc. de Belgique. 3e Sér. T. VII. No. 2. 3.
Leopoldina. Hft. XX. No. 5. 6.
Mittheilungen der antiquarischen Gesellschaft in Zürich. XLVIII.
Bulletin astronomique et météorologique de l'observatoire impér. de Rio Janeiro. 1881. No. 3. 1883. N. 11.
Annalen des physicalischen Central-Observatoriums in St. Petersburg. Jahrg. 1882. Thl. II.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. VIII. No. 3.
Bulletin of the California academy of sciences. No. 1.
Bibliothèque universelle. Arch. des sciences physiques et naturelles. T. XI. No. 4.
Guia de exposiçao anthropologica brazileira realizada pelo Museu do Rio de Janeiro. 1882.
Memorie della r. accademia delle scienze di Torino. Serie 2a. T. XXXV.
Atti della r. accademia delle scienze di Torino. Vol. XIX. dist. 1a.
Il primo secolo della r. accademia delle scienze di Torino, Torino 1883.
Compte rendu de la commission impériale archéologique pour l'année 1881. St. Petersbourg. avec Atlas.
Sveriges geologiska undersökning. Serie Aa. No. 98. 90. Ser. Ab. No. 7. 9. Ser. Bb. No. 3. Ser. C. No. 53—60.

Mai 1884.

Nature No. 757. 758. 759. 760.
Λογοδοσια των κατα το ιη' ετος γενομενων (1882—1883). *εν Αθηναις* 1884.
R. accademia di scienze lettere ed arti in Modena. Opere presentate nell' anno 1883.
Publications de l'Institut royal grand-ducal de Luxembourg (Section des sciences naturelles et mathematiques). T. III.
Abhandlungen des thüringischen botan. Vereins Irmischia. Hft. 1 u. 2. Hft. 3. Bogen 1. 2.
Annali della scuola normale superiore di Pisa. Della serie Vol. IV—VI.
Mémoires et documens pubiiés par la société d'histoire et d'archéologie de Genève. T. I. Cah. 1. 2.
Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellsch. in Wien. Bd. XXXIII. Nebst Beiheft A. v. Pelzehn, brasilische Säugethiere.
Irmischia. No. 1. 2.
Sitzungsberichte der k. preußischen Academie der Wissenschaften. 1884. I—XVII.
Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Mai.
Atti della r. accademia delle scienze di Torino. Vol. XIX. Disp. 2.
Boekgesch. der Kon. Akademie van Wetenschapen. Bl. 4—8.
Proceedings of the london mathematical society. No. 216—218.
Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgg. im Auftrage des naturwissenschaftl. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. LVII. Hft. 1.
Johns Hopkins university circulars. Vol. III. No. 30.
Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. XXXVIII. Hft. 1
Monthly notices of the royal astronomical society. Vol. XLIV. No. 6.
Bulletin de la société impériale des naturalistes de Moscou. T. LVIII. No. 3.
Beilage zum Bulletin de la soc. impér. des naturalistes de Moscou. T. LIX. Meteorolog. Beobachtungen ausgeführt am meteorolog. Observatorium der landwirthschaftl. Akademie. 1883. 1. Hälfte.
Atti della societa toscana di scienze naturali in Pisa. Memorie. Vol. VI. fasc. 1. Processi verbali. Vol. IV. Indice del volume II e III.
Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. VII. Hft. 2. Anhang: die basler Mathematiker Daniel Bernoulli u. Leonh. Euler.
Acta mathematica 4 : 3.
Rendiconti delle sessioni dell' accademia delle scienze dell' istituto di Bologna. 1879—80.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVII. Entr. 3.
Patrick Geddes, a re-statement of the celltheory. S.-A. aus Proceedings of the r. soc. of Edinburgh.
American Journal of mathematics. Vol. VI. No. 4.
Mémoires de l'acad. impér. des sciences de St. Petersbourg. 7e Sér. T. XXXI. No. 10—14.
Annual report of the comptroller of the currency to the united states. Decbr. 4. 1882.
Henry Phillips Jr. poems from the spanish of Fra Luis Ponce de Leon. Philad. 1883.
Proceedings of the american philosoph. society. No. 113. 114.
Publications of Cincinnati Observatory. Observations of Comets. 1880—82.
Bulletin of the Essex institute. Vol. XIV. No. 1—12.
The North Shore of Massachusetts bay. 6th edit. Salem 1883.
Plummer Hall, its Libraries, its collections, its historical associations. Salem 1882.
Proceedings of the Davenport academy of natural sciences. Vol. III. P. 3.
Transactions of the new-york academy of sciences. Vol. II. No. 1—8.
Annals of the new-york academy of sciences. Vol. II. No. 10—13.
Bulletin of the buffalo society of natural sciences. Vol. IV. No. 4.
Sitzungsberichte der philosophisch-philolog. u. histor. Classe der k. k. Academie d. Wissensch. 1884. Hft. 1.

(Fortsetzung folgt).

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

23. Juli. № 7. 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 5. Juli.

Henle, über Bau und Wachsthum des Nagels und Hufs. (Erscheint in den Abhandlungen).

E. Schering, zur Auflösung der Keppler'schen Gleichung.

H. Wagner, über die Bevölkerung der asiatischen Türkei.

H. A. Schwarz, über die Lösung einer von Delaunay behandelten Aufgabe der Variationsrechnung. (Ligne de courbure constante dont la longueur entre deux points est un maximum ou un minimum).

Riecke, über die electrodynamische Kettenlinie.

Voigt, über die Theorie der Dispersion und Absorption, speciell über die optischen Eigenschaften des festen Fuchsins.

Derselbe, über die Bestimmung der Brechungsindices absorbirender Medien.

F. Lindemann (Correspondent), über die Auflösung der algebraischen Gleichungen durch transcendente Functionen.

Schiefferdecker, 1) Beiträge zur Kenntniß des Stützgewebes der Retina. 2) Beiträge zur Kenntniß des Baus der Drüsen des Magens und Duodenums. (Vorgelegt von Henle).

K. Schering, das Quadrifilar-Magnetometer. (Vorgelegt von E. Schering).

Ueber die Auflösung der algebraischen Gleichungen durch transcendente Functionen.

Von

F. Lindemann.

Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch elliptische Functionen, wie sie Hermite und Kronecker gelehrt haben, erfordert bekanntlich die Ausführung folgender Operationen:

1) Auflösung von Gleichungen niedrigeren Grades,
2) Berechnung der Periodicitäts-Moduln eines elliptischen Integrals erster Gattung,

3) Berechnung der Thetafunctionen einer Veränderlichen für gewisse besondere Werthe der letzteren.

Die unter 2) genannte Berechnung bestimmter Integrale kann ersetzt werden durch die Lösung derjenigen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche von den Periodicitäts-Moduln erfüllt wird; und sie kann geschehen, ohne daß man die Nullpunkte des unter dem Integralzeichen auftretenden Radicals einzeln kennt. Letztere von Herrn Bruns[1]) gemachte Bemerkung war für diejenigen Untersuchungen von besonderer Wichtigkeit, deren Resultate ich im Folgenden mitzutheilen denke. Die Verallgemeinerung derselben auf hyperelliptische Integrale ließ nemlich erkennen, daß die Auflösung einer beliebigen algebraischen Gleichung durch folgende Operationen ermöglicht wird:

1) Auflösung von Gleichungen niedrigeren Grades;
2) Lösung von linearen Differentialgleichungen, deren singuläre Punkte bekannt sind;
3) Passende Bestimmung der Integrations-Constanten durch Berechnung der Periodicitäts-Moduln gewisser hyperelliptischer Integrale, für welche die Verzweigungspunkte der zu integrirenden Function bekannt sind;
4) Berechnung von Theta-Functionen mehrerer Variabeln für besondere Werthe der Argumente.

Der Gedankengang, welcher zu diesem Ergebnisse führt, soll im Folgenden kurz bezeichnet werden. Ist die zu lösende Gleichung in der Form

$$\varphi(x, a_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

gegeben, so betrachten wir in ihr $a_n = u$ als variabeln Parameter und untersuchen die Periodicitäts-Moduln der p Integrale

$$\int \frac{x^s dx}{\sqrt{\varphi(x, u)}} \text{ für } s = 0, 1, 2, \ldots p-1,$$

wobei $2p+2 = n$ oder $2p+1 = n$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Dieselben genügen als Functionen von u nach Herrn Fuchs[2]) einer linearen Differentialgleichung $(2p)$ter Ordnung, deren Coëfficienten rationale Functionen aller Coëfficienten a_i sind und ohne Einführung irgendwelcher Irrationalität gefunden werden, und

1) Dorpater Festschrift 1875; vrgl. Klein, Math. Annalen, Bd. 14, p. 124.
2) Borchardt's Journal, Bd. 71.

deren singuläre Punkte bestimmt werden, indem man die Discriminante von $\varphi(x, u)$ gleich Null setzt. Diese singulären Punkte hängen daher nur von einer Gleichung $(n-1)$ten Grades in u ab und können als bekannt angesehen werden. Die zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalgleichungen haben nur rationale Zahlen zu Wurzeln; nach den Untersuchungen der Herren Fuchs, Thomé und Anderer ist sonach die Lösung einer solchen Differentialgleichung als ein erledigtes Problem zu betrachten.

Die unbekannten Periodicitätsmoduln des vorgelegten Integrals sind nunmehr lineare homogene Functionen der gewonnenen particulären Integrale mit unbekannten constanten Coëfficienten. Die letzteren wird man bestimmen können, wenn man für einen bestimmten Werth von u die Periodicitätsmoduln kennt; und letzteres ist in der That der Fall. Man braucht nemlich u nur gleich einer Wurzel α der soeben erwähnten Gleichung $(n-1)$ten Grades zu setzen; dann wird

$$\varphi(x, \alpha) = (x-\delta)^r \psi(x),$$

worin $\psi(x)$ eine ganze Function $(n-r)$ten Grades bezeichnet, die den Factor $(x-\delta)$ nicht mehr enthält, und wo $r \geq 2$. Die Bestimmung der Periodicitäts-Moduln dieses dem Werthe $u = \alpha$ entsprechenden Integrals erfordert nur die Auflösung einer Gleichung $(n-r)$ten Grades; sie können also als bekannt angesehen werden. Die unbekannten Integrationsconstanten bestimmen sich somit schließlich durch lineare Gleichungen, man hat nur, ehe man $u = \alpha$ setzt, diese Gleichungen theilweise mit passenden Potenzen von $(u-\alpha)$ und von $\log(u-\alpha)$ zu multipliciren, um so das Unendlichwerden unserer particulären Integrale sowie einiger der zu $u = \alpha$ gehörigen particulären Periodicitäts-Moduln auszugleichen [1]).

Für jedes der p Integrale, welche den Werthen $s = 0, 1, 2, \ldots p-1$ entsprechen, hat man diese Operationen auszuführen, um ihre Periodicitätsmoduln zu finden; für alle hat man aber nur eine Gleichung $(n-1)$ten Grades und eine $(n-2)$ten (oder niedrigeren) Grades zu lösen.

Jetzt lassen sich die Doppelverhältnisse von je vier unbekannten Wurzeln $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_i$ sofort berechnen. Man hat nemlich die Gleichung:

---

1) Man kann statt dessen auch ein Verfahren benutzen, welches analog dem von Herrn Fuchs in Nr. 14 des citirten Aufsatzes angewandten ist; man hat dann nicht ein System von linearen Gleichungen zu lösen, sondern es ist nur eine gewisse Anzahl einzelner Factoren zu bestimmen; auch hierbei muss man die Wurzeln der Gleichung $\psi = 0$ benutzen.

$$\frac{\delta_i-\delta_1}{\delta_i-\delta_2}\cdot\frac{\delta_3-\delta_2}{\delta_3-\delta_1}=\left(\frac{\vartheta w_k(\delta_i)-w_k(\delta_1)}{\vartheta w_k(\delta_i)-w_k(\delta_2)}\cdot\frac{\vartheta w_k(\delta_3)-w_k(\delta_2)}{\vartheta w_k(\delta_3)-w_k(\delta_1)}\right)^2$$

für $i = 4, 5, \ldots n$.

In derselben bedeuten $w_1, w_2, \ldots w_p$ die sogenannten Normalintegrale erster Gattung, welche aus den p gegebenen hyperelliptischen Integralen in bekannter Weise zu bilden sind; das Symbol ϑw_k steht zur Abkürzung für $\vartheta(w_1, w_2, \ldots w_p)$ und bedeutet die bekannte ϑ-Function. Die Gleichung selbst entsteht durch Particularisation aus einer allgemeineren Relation, welche von Herrn C. Neumann auf Seite 504 seiner Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale gegeben ist.

Die Differenz $w_k(\delta_i)-w_k(\delta_k)$ ist ein Integral w_k erstreckt von einem Verzweigungspunkte zu einem andern; also das Doppelte der Differenz ist gleich einem Periodensysteme. Die in den Thetafunctionen auftretenden Argumente sind folglich bekannt; und aus der auf Seite 440 des Neumann'schen Werkes gegebenen Tabelle ersieht man leicht, welche halben Periodicitäts-Moduln man einzusetzen hat, um die den Werthen $i = 4, 5, \ldots n$ entsprechenden Doppelverhältnisse zu finden.

Endlich erübrigt nur, aus den Doppelverhältnissen die Wurzeln selbst zu finden, eine Aufgabe, von der man leicht nachweist, daß sie immer durch Wurzelausziehen (ev. durch eine Ikosaëder-Gleichung) zu lösen ist.

Hiermit ist in der That die Auflösung einer beliebigen Gleichung auf lauter ausführbare Operationen zurückgeführt.

Königsberg i. Pr., den 29. Juni 1884.

Zur Lösung der Keppler'schen Gleichung.

Von

Ernst Schering.

Nachdem Gauss in seiner *Theoria motus corporum coelestium* 1809 gezeigt hat, wie die Keppler'sche Gleichung durch eine bestimmte folgeweise Annäherung an den gesuchten Werth der excentrischen Anomalie aufgelöst werden kann, art. 11,

oder wie die entsprechende Aufgabe für solche Bahntheile, welche wenig von einer parabolischen Bahn verschieden sind, auf die Anwendung der für letztere vorhandenen Tafeln zurückgeführt werden kann, art. 37—42,

ist doch wiederholt der Versuch gemacht worden, ein Verfahren aufzustellen, welches namentlich für kleinere Excentricitäten rascher zum Ziele führt als die schon bekannten Methoden.

Encke hat 1850 in den Astronomischen Nachrichten Nr. 714. Bd. 30 mit Benutzung eines ähnlichen Gedankens, wie der von Lalande 1792 in seiner Astronomie Edit. III. t. II. § 1247 angewendete, ein Verfahren angegeben, welches rasch zum Ziele führt, welches aber für die Rechnung mit Logarithmen etwas weitläufig ist. Bemerkenswerth erscheint hierbei der von Herrn Herz 1880 Astr. Nachr. Nr. 2354 Bd. 99 hervorgehobene Umstand, daß man den gesuchten Werth, wenn man von kleinen Größen wie die siebente Potenz der Excentricität absieht, durch eine Summe von sechs sehr einfach zu bildenden Gliedern darstellen kann.

Grunert findet in seiner »neuen näherungsweisen Auflösung der Keppler'schen Gleichung« Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien 1856 Januar Bd. XIX Heft I Seite 3 die zu berechnenden Ausdrücke in einer für die Anwendung der Logarithmentafel vortheilhafteren Form, indem er einen Hülfswinkel benutzt, welcher selbst einen Näherungswerth für die excentrische Anomalie bildet und sich von ihr nur um kleine Größen von der Ordnung der dritten Potenz der als sehr klein angenommenen Excentricität unterscheidet.

Herr Howe hat 1880 in den Astr. Nachr. No. 2322 Bd. 97 und 1884 in den Astr. Nachr. No. 2592 Bd. 108, unter Benutzung des von Grunert angewendeten Hülfswinkels eine einfache Formel aufgestellt zur Berechnung eines noch weiter angenäherten Werthes, welcher sich von der gesuchten excentrischen Anomalie nur um Größen wie die fünfte Potenz der Excentricität unterscheidet.

Hier will ich die einfache Ableitung einer Formel mittheilen, welche für die Rechnung mit logarithmisch trigonometrischen Tafeln vortheilhaft ist und welche für Excentricitäten bis etwas über $\frac{1}{2}$ bei allen Orten in der Bahn, dagegen für große Excentricitäten bei Orten in der Gegend des Aphels, wo also die Zurückführung auf die Parabel nicht möglich ist aber auch eine directe Berechnung der wahren Anomalie sich empfiehlt, schneller zur Lösung der Keppler'schen Gleichung führt als die bisher bekannten Methoden.

Die Keppler'sche Gleichung

$$\text{I)} \qquad E - e \sin E = M$$

kann in der Form

$$\text{II)} \qquad e \sin E - \sin(E - M) = e \sin E - \sin(e \sin E)$$

dargestellt werden.

Für jeden Werth von E wird

$$\text{III)}\quad e\sin E - \sin(E-M) = \sin M\cos E - (\cos M - e)\sin E = $$
$$= \frac{\sin M}{\sin E_2}\sin(E_2 - E)$$

wenn E_2 auf geeignete Weise durch e und M bestimmt ist.

Setzen wir in Gleichung III für die darin von e, M, E_2 unabhängige Größe E der Reihe nach die Werthe 0°, 90°, M, $90^\circ + M$, $\frac{1}{2}M$, $90^\circ + \frac{1}{2}M$ so erhalten wir

$$\text{III*)}\quad \frac{e\sin E - \sin(E-M)}{\sin(E_2 - E)} = \frac{\sin M\cos E - (\cos M - e)\sin E}{\sin E_2\cos E - \cos E_2\sin E} =$$
$$= \frac{\sin M}{\sin E_2} = \frac{\cos M - e}{\cos E_2} = e\,\frac{\sin M}{\sin(E_2 - M)} = \frac{1 - e\cos M}{\cos(E_2 - M)} =$$
$$= (1+e)\,\frac{\sin\frac{1}{2}M}{\sin(E_2 - \frac{1}{2}M)} = (1-e)\,\frac{\cos\frac{1}{2}M}{\cos(E_2 - \frac{1}{2}M)}$$

Die zur Berechnung von E_2 geeignetste Gleichung ist also die auch schon von Grunert angewendete:

$$\text{IV)}\quad \operatorname{tang}(E_2 - \tfrac{1}{2}M) = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M$$

oder

$$\text{V)}\quad \operatorname{tang}(E_2 - \tfrac{1}{2}M) = (\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi))^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M \quad \text{für } e = \sin\varphi$$

Verbindet man die Gleichung (III) mit der zweiten Form der Keppler'schen Gleichung (II), so erhält man, mit Benutzung der durch (IV) oder (V) eingeführten Hülfsgröße E_2, als eine dritte Form der Keppler'schen Gleichung:

$$\text{VI)}\quad \frac{\sin M}{\sin E_2}\sin(E_2 - E) = e\sin E - \sin(e\sin E)$$

oder

$$\text{VII)}\quad \sin(E_2 - E) = \frac{1}{6}\,\frac{\sin E_2}{\sin M}(e\sin E)^3\,\mathfrak{K}(e\sin E)$$

worin

$$\text{VIII)}\quad \mathfrak{K}(e\sin E) = 6\,\frac{(e\sin E) - \sin(e\sin E)}{(e\sin E)^3}$$

gesetzt ist.

Da die zweite Seite der Gleichung (VII) für kleine Excentricitäten e eine Größe von der Ordnung wie e^3 ist, so folgt, daß E_2 einen

Werth bedeutet, welcher von der durch die Keppler'sche Gleichung zu bestimmenden excentrischen Anomalie E nur um Größen von höherer Ordnung als e^3 abweicht.

Wollte man die goniometrische Auflösung der Gleichungen dritten Grades anwenden, so könnte man, indem man in $\mathfrak{R}(e \sin E)$ die excentrische Anomalie E durch den Näherungswerth E_3 ersetzt, aus der Gleichung (VII) unmittelbar für E einen neuen Näherungswerth berechnen, welcher sich von dem wahren E nur um eine Größe von der Ordnung wie e^6 unterscheidet. Diese Rechnung würde aber nicht nur wegen der dabei vorkommenden dreigliedrigen Summen ziemlich umständlich sein, sondern würde auch eine sehr genaue Zwischenrechnung erfordern, um zu einem genügenden Näherungswerthe von E zu gelangen.

Aus dem Umstande, daß die zweite Seite der Gleichung (VII) eine Größe von der Ordnung wie e^3 ist, folgt auch, daß wenn E_ν einen Werth bedeutet, welcher von der gesuchten excentrischen Anomalie nur um Größen höherer Ordnung als e^ν abweicht, die durch eine der Gleichungen:

$$\text{IX)} \qquad \sin(E_3 - E_{\nu+3}) = \tfrac{1}{6} \frac{\cos(E_3 - \frac{1}{2}M)}{(1-e)\cos\frac{1}{2}M} (e \sin E_\nu)^3 \, \mathfrak{R}(e \sin E_\nu)$$

wenn der Planet sich in der Gegend des Perihels befindet, oder

$$\text{X)} \qquad \sin(E_3 - E_{\nu+3}) = \tfrac{1}{6} \frac{\sin E_3}{\sin M} (e \sin E_\nu)^3 \, \mathfrak{R}(e \sin E_\nu)$$

wenn der Planet sich in der Gegend der mittleren Entfernung von der Sonne befindet, oder

$$\text{XI)} \qquad \sin(E_3 - E_{\nu+3}) = \tfrac{1}{6} \frac{\sin(E_3 - \frac{1}{2}M)}{(1+e)\sin\frac{1}{2}M} (e \sin E_\nu)^3 \, \mathfrak{R}(e \sin E_\nu)$$

wenn der Planet sich in der Gegend des Aphels befindet, für

$$\text{XII)} \qquad \mathfrak{R}(e \sin E_\nu) = 6 \, \frac{(e \sin E_\nu) - \sin(e \sin E_\nu)}{(e \sin E_\nu)^3}$$

oder

$$\text{XIII)} \qquad \mathfrak{R}(e \sin E_\nu) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4.5}(e \sin E_\nu)^2 + \frac{1}{4.5.6.7}(e \sin E_\nu)^4 - \frac{6}{\Pi(9)}(e \sin E_\nu)^6 + \ldots$$

zu bestimmende Größe $E_{\nu+3}$ von der gesuchten E nur um einen Werth von höherer Ordnung als $e^{\nu+3}$ abweicht.

Ist die Excentricität e nicht sehr klein, sondern liegt sie der

Einheit nahe, so bedarf es einer eingehenderen Untersuchung über die Anwendbarkeit der Gleichungen (IX), (X), (XI).

Ist allgemein $E_{\nu+8}$ eine solche Function von E_ν so daß, wenn man für E_ν den gesuchten Werth E setzt, auch $E_{\nu+8} = E$ wird und bezeichnen nun E_ν und $E_{\nu+8}$ zwei solche Näherungswerthe für die gesuchte Größe E, so daß man, mit jenen beginnend, durch Anwendung des von Newton angegebenen Interpolations-Verfahren der indirecten Auflösung einer Gleichung zu beständig mehr genäherten Werthen für E gelangt, dann wird der aus E_ν und $E_{\nu+8}$ zunächst sich ergebende weitere Näherungs-Werth $E'_{\nu+8}$

$$\text{XIV)} \qquad E'_{\nu+8} = E_{\nu+8} + \frac{E_\nu - E_{\nu+8}}{1 - \dfrac{\partial E_\nu}{\partial E_{\nu+8}}}$$

sein.

Damit der Werth $E_{\nu+8}$ dem gesuchten E näher als der Werth E_ν liegt, muß im vorliegenden Falle der absolute Betrag der zweiten Seite der Gleichung

$$\text{XV)} \qquad 1 - \frac{\partial E_\nu}{\partial E_{\nu+8}} =$$

$$= 1 + \frac{\cos(E_2 - E_{\nu+8})}{\frac{1}{3}\dfrac{\sin E_2}{\sin M} e^3 \sin E_\nu^2 \cos E_\nu \left\{ \mathfrak{K}(e \sin E_\nu) + \frac{1}{3} e \sin E_\nu \dfrac{\partial \mathfrak{K}(e \sin E_\nu)}{\partial (e \sin E_\nu)} \right\}}$$

die Zahl 2 übertreffen.

Die Untersuchung kann auf Werthe von M, E, E_2, E_ν, $E_{\nu+8}$ in den ersten beiden Quadranten beschränkt werden, denn befindet M sich dort, so werden die zugehörigen E, E_2, E_ν, $E_{\nu+8}$ dort auch liegen, ferner werden zu $360^\circ - M$ die Werthe $360^\circ - E$, $360^\circ - E_2$, $360^\circ - E_\nu$, $360^\circ - E_{\nu+8}$ gehören.

Der Werth der Größe $\dfrac{\sin E_2}{\sin M}$ nimmt beständig ab, wenn M innerhalb der beiden ersten Quadranten beständig zunimmt und zwar

$$\text{für } M = 0 \text{ wird } E_2 = 0, \quad \frac{\sin E_2}{\sin M} = \frac{1}{1-e}$$

$$\text{für } 0 < M = 90^\circ - \arcsin e \leqq 90^\circ \text{ wird } E_2 = 90^\circ, \quad \frac{\sin E_2}{\sin M} = \frac{1}{\sqrt{1-ee}}$$

$$\text{für } 0 < M = 90^\circ - \arcsin \frac{e}{2} \leqq 90^\circ, \text{ wird } E_2 = 180^\circ - M, \quad \frac{\sin E_2}{\sin M} = 1$$

$$\text{für } M = 180^\circ \text{ wird } E_2 = 180^\circ, \ \frac{\sin E_2}{\sin M} = \frac{1}{1+e}$$

wie sich unmittelbar aus den Gleichungen (III*) ergiebt.

Eine einfache Untersuchung der übrigen Theile der zweiten Seite der Gleichung (XV) führt zu der Ueberzeugung, daß, wenn der Werth von e nicht erheblich über $\frac{1}{2}$ hinausgeht, für alle Orte des Himmelskörpers in seiner Bahn oder, wenn e der Einheit näher kommt, doch noch für Orte in entsprechender Nähe des Aphels eine der Gleichungen (IX) (X) (XI) rascher die Berechnung von E ergiebt als die Gleichung

$$E_{\nu+1} = M + e \sin E_\nu$$

welche dem von Gauss in art. 11 der *Th. M. C.* aufgestellten Verfahren zu Grunde liegt.

Benutzt man die bei der Rechnung nach einer der Gleichungen (IX) (X) (XI) unmittelbar vorliegenden Differenzen der Functionalwerthe in den angewendeten Logarithmen-Tafeln nemlich unter Zugrundelegung von s Decimalstellen die Größen:

$$\text{XVI)} \quad 10^s \log \sin(1'' + E_2 - E_{\nu+3}) - 10^s \log \sin(E_2 - E_{\nu+3}) = \\ = \Delta \log \sin(E_2 - E_{\nu+3})$$

$$\text{XVII)} \quad 10^s \log \sin(1'' + E_\nu) - 10^s \log \sin E_\nu = \Delta \log \sin E_\nu$$

so wird der nach Anwendung der Newton'schen Interpolations-Methode auf (IX) oder (X) oder (XI) sich ergebende weiter genäherter Werth $E'_{\nu+3}$ durch die zu dem vorliegenden Zwecke hinreichend genaue Formel:

$$\text{XVIII)} \quad E'_{\nu+3} = E_{\nu+3} + \frac{E_\nu - E_{\nu+3}}{1 + \dfrac{\Delta \log \sin(E_2 - E_{\nu+3})}{[3 + 2 \log \mathfrak{R}(e \sin E_\nu)] \,.\, \Delta \log \sin E_\nu}}$$

dargestellt.

Entspricht dieser Werth von $E'_{\nu+3}$ noch nicht der für die gesuchte excentrische Anomalie geforderten Genauigkeit, so hat man denselben als E_μ in eine der Gleichungen (IX) (X) (XI) statt E_ν einzuführen und einen neuen genäherten Werth $E_{\mu+3}$ zu berechnen. Weichen E_μ und $E_{\mu+3}$ noch merklich von einander ab, so sind dieselben an Stelle von E_ν und $E_{\nu+3}$ in der Gleichung (XVIII) wieder zur Berechnung eines $E'_{\mu+3}$ anzuwenden.

Die Anzahl der bei der Berechnung von E_2 nach Gleichung (IV) zu berücksichtigenden Decimalstellen der Logarithmentafel muß vollständig der für E geforderten Genauigkeit entsprechen.

Für die Bestimmung von $E_2 - E$ durch die nöthigen Falls wie-

derholte Anwendung einer der Gleichungen (IX) (X) (XI) genügt in den meisten Fällen eine geringere Anzahl s von Decimalstellen der Logarithmentafeln. In Bezug hierauf kann man, wenn man E auf 0,"01 genau erhalten will, Folgendes bemerken:

Es genügen 4 Decimalstellen ($s = 4$), zugleich kann $\mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ durch die Einheit, ferner $\sin(E_2 - E_{\nu+s})$ durch den Bogen ersetzt werden, wenn entweder die Excentricität $e \leqq 0{,}08$ ist oder wenn bei großen Werthen der Excentricität noch $\log(e \sin E_\nu) \leqq 8{,}9030-10$ wird und zugleich

$$\text{XIX)}\quad 0^\circ \leqq 90^\circ - \operatorname{arc}\left(\sin = \tfrac{1}{2}e\right) \leqq M \leqq 270^\circ + \operatorname{arc}\left(\sin = \tfrac{1}{2}e\right) \leqq 360^\circ$$

Es genügen 6 Decimalstellen ($s = 6$) und zugleich kann

XX) $\log \mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ durch $-(e \sin E_\nu)^2 \times \operatorname{num}(\log = 8{,}336754-10)$

ersetzt werden,
wenn entweder die Excentricität $e \leqq \frac{3}{5}$ ist,
oder wenn bei großen Werthen der Excentricität noch $\log(e \sin E_\nu) \leqq 9{,}522-10$ und zugleich die Bedingung (XIX) erfüllt ist.

Die Tafel für $\log \mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ wird man mit $\log(e \sin E_\nu)$ als Argument aufstellen. Die Berechnung kann nach der Reihen-Entwickelung von $\mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ (XIII) oder von $\log \mathfrak{K}(e \sin E_\nu)$ oder auch mit Benutzung der Tabula I in Gauss *Th. Mot. Corp.* ausgeführt werden, setzt man nemlich in art. 37 und art. 40

$$\text{XXI)}\qquad \sqrt{T} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2} e \sin E_\nu)$$

so wird

$$\text{XXII)}\qquad e \sin E_\nu = 2.B.\sqrt{A}.(1 + \tfrac{1}{15}A)$$

$$\text{XXIII)}\qquad \mathfrak{K}(e \sin E_\nu) = \frac{1}{BB.(1 + \frac{1}{15}A)^2}$$

Will man auch noch Tafeln mit zwei Argumenten anwenden, wie Sig. de Gasparis solche mit den Argumenten M und E für die Functional-Werthe von e aufgestellt hat, so würden die Argumente M und $E_2 - M$ für die Functional-Werthe $E_2 - E$ sehr zweckmäßig erscheinen.

Zur Auflösung der Keppler'schen Gleichung hat man also aus der gegebenen Excentricität e und der gegebenen mittleren Anomalie M nach Gleichung (IV) oder (V) den Hülfswinkel E_2 zu berechnen.

Es liegt E_2 immer zwischen M und 180°.

Es wird E zwischen M und E_2 liegen.

Das gefundene E_2 ist für E_ν in Gleichung (IX) od. (X) od. (XI)

ein sehr brauchbarer Werth, wenn e kleiner als $\frac{1}{3}$ ist, oder wenn für größere Excentricitäten e doch die Bedingung (XIX) erfüllt wird.

Der auf solche Weise (IX) sich ergebende Werth von $E_{\nu+3}$ gleich E_{2+3} wird näher an E liegen als der Winkel E_2.

Befindet sich E_2 im ersten oder im vierten Quadranten, und liegt ein E_ν nicht weiter von E ab als E_2,
so wird E zwischen E_ν und dem zugehörigen $E_{\nu+3}$ liegen.

Befindet sich M im zweiten oder dritten Quadranten, und liegt ein E_ν nicht weiter von E ab als E_2, so wird das zu diesem zugehörige $E_{\nu+3}$ zwischen E und E_ν liegen.

Göttingen 1884. Juli 3.

Ueber die elektrodynamische Kettenlinie.

Von

Eduard Riecke.

(Mit einer Tafel).

Bei der Untersuchung der elektrodynamischen oder elektromagnetischen Wirkungen, welche von einem geschlossenen und unveränderlichen galvanischen Strom oder von einem festliegenden Magnet auf einen veränderlichen Stromkreis ausgeübt werden, können drei verschiedene Einrichtungen des letzteren in Betracht gezogen werden. Derjenige Theil desselben, dessen Verschiebungen den Gegenstand der Beobachtung bilden, kann dargestellt sein durch einen geschlossenen Stromring von unveränderlicher Gestalt; derselbe kann in einem linearen oder körperlichen Leiter bestehen, welcher beiderseits begrenzte nicht in sich zurückkehrende Abschnitte der Strömungskurven in sich enthält, und welcher bei seiner Bewegung durch Gleitstellen mit den festliegenden Theilen des Stromkreises leitend verbunden bleibt; der dritte Fall endlich wird gebildet durch einen biegsamen Leiter, welcher mit seinen Endpunkten in den übrigens festliegenden Stromkreis eingeschaltet ist.

Der erste dieser 3 Fälle ist der weitaus wichtigste, seit Weber gezeigt hat, wie derselbe zu genauen Messungen benutzt werden kann, und seitdem wir in Folge hievon das Gesetz der Wechselwirkung geschlossener Ströme von unveränderlicher Gestalt als das sicherste Fundament der Elektrodynamik betrachten. Daß auch der zweite Fall unter gewissen Bedingungen zu der Ausführung quantitativer Bestimmungen Veranlassung giebt, habe ich an einen speciellen Beispiel gezeigt, auf welches ich am Schlusse der vorliegenden Mit-

theilung noch einmal zurückkommen werde. Der dritte Fall hat bisher noch nicht den Gegenstand der Messung gebildet; so gering man die Bedeutung desselben auch anschlagen mag, schien es mir doch nicht überflüssig, auch für diesen ein einfaches Beispiel zu geben.

Wenn der biegsame von dem galvanischen Strom durchflossene Leiter gleichzeitig als nicht ausdehnsam betrachtet werden darf, so kann man das Problem, die Gestalt desselben unter der Wirkung irgend welcher elektrodynamischer oder elektromagnetischer Kräfte zu bestimmen, als das Problem der elektrodynamischen Kettenlinie bezeichnen. Die Lösung dieses Problems bietet sich in einem speciellen Falle sehr leicht dar; dann nämlich, wenn der Faden sich in einem homogenen magnetischen Felde befindet und seine Endpunkte auf einer zu der Richtung der Kraftlinien senkrechten Linie gelegen sind. Man übersieht, daß in diesem Falle die Gestalt des Fadens die eines Kreisbogens sein muß. Dies bestätigt sich, wenn man die allgemeinen Differentialgleichungen der Kettenlinie auf den vorliegenden Fall in Anwendung bringt.

Die rechtwinkligen Componenten der in dem magnetischen Felde herrschenden ganzen Intensität seien A, B, C; x, y, z seien die Coordinaten irgend eines Punktes der Kettenlinie, ds ein Element des Bogens, dx, dy, dz die Projektionen desselben auf die Coordinatenaxen; T sei die in dem Faden herrschende Spannung. Die Stärke des galvanischen Stromes werde gleich 1 gesetzt. Die Bedingungen des Problems sind dann folgende.

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = C\frac{dy}{ds} - B\frac{dz}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = A\frac{dz}{ds} - C\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = B\frac{dx}{ds} - A\frac{dy}{ds}$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Multipliciren wir die drei Gleichungen beziehungsweise mit $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$ so ergiebt sich durch die Addition derselben

$$T = \text{Const.}$$

Es wird ferner

$$A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} + C\frac{dz}{ds} = \text{Const}$$

d. h. die Neigung der einzelnen Elemente der Kettenlinie gegen die Richtung der magnetischen Kraftlinien ist eine konstante. Es gelten außerdem die Gleichungen

$$T\left(\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}-\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}\right)=A-\frac{dx}{ds}\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}+C\frac{dz}{ds}\right)$$

$$T\left(\frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds}-\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}\right)=B-\frac{dy}{ds}\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}+C\frac{dz}{ds}\right)$$

$$T\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}-\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds}\right)=C-\frac{dz}{ds}\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}+C\frac{dz}{ds}\right).$$

Der Krümmungshalbmesser ρ der Kettenlinie ist somit durch die Gleichung bestimmt

$$\frac{T^2}{\rho^2}=A^2+B^2+C^2-\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}+C\frac{dz}{ds}\right)^2$$

Derselbe ist konstant und somit die Kettenlinie entweder eine Schraubenlinie oder ein Kreis.

Die im Vorhergehenden aufgestellten Differentialgleichungen stimmen im Wesentlichen mit denjenigen überein, welche für die Bewegung eines elektrischen Theilchens in einem homogenen magnetischen Felde gelten. In der That erhält man von gewissen konstanten Faktoren abgesehen die letzteren wenn man in den Differentialgleichungen der elektrodynamischen Kettenlinie $T=\frac{ds}{dt}$ setzt. Diese Linie ist somit identisch mit der Bahnlinie eines elektrischen Theilchens in einem homogenen magnetischen Felde [1]).

Um eine experimentelle Prüfung für die Richtigkeit des vorhergehenden Resultates zu erhalten, wurde ein Ring aus Holz abgedreht und in denselben durch zwei diametral einander gegenüberliegende Durchbohrungen zwei verschiebbare Elektroden aus Messing eingeführt. Dieselben waren an ihrem vorderen Ende aus zwei der Länge nach verbundenen Stücken zusammengesetzt, welche an der dem Innern des Ringes zugekehrten Seite abgerundet waren. Zwischen diese Stücke wurden die Enden eines Goldblattes eingeklemmt, so daß dasselbe bei der größten Distanz der Elektroden nahezu gespannt war. Die beiden Seitenflächen des Ringes wurden durch aufgekittete ebene Glasplatten verschlossen. (Fig. 1).

Die ganze Vorrichtung wurde auf die obere Fläche eines vertikal aufgestellten Elektromagnets aufgelegt, so daß die Fläche des

1) Riecke, Goett. Nachr. 1881. S. 17. Wied. Ann. Bd. 13. S. 191.

Goldblattes vertikal stand. Der Elektromagnet wurde durch 4 Bunsensche Elemente erregt, während durch das Goldblatt der Strom von zwei Bunsen geleitet wurde. Beim Schluß des Stromes fand eine Biegung des Goldblattes statt von um so stärkerer Krümmung, je mehr die Elektroden einander genähert wurden. Zum Zweck der Aufnahme der Curven wurde auf die den Ring bedeckende Glasplatte eine durchsichtige Hornplatte gelegt und auf dieser einzelne Punkte der Curven markirt; der Fehler der Parallaxe wurde dadurch vermieden, daß unter den Ring ein Spiegel gelegt und jederzeit so visirt wurde, daß die vertikale Mantellinie des Goldblattes mit ihrem Spiegelbilde zusammenfiel.

Eine Uebersicht der beobachteten Kettenlinien giebt Fig. 2. Die Reihenfolge der Beobachtungen war die, daß erst sämmtliche Curven der einen Seite von der wenigst gekrümmten bis zu der am stärksten gekrümmten aufwärts beobachtet wurden; hierauf wurde der Pol des Elektromagnets umgekehrt und in derselben Weise die Curven der anderen Seite bestimmt. Die Figuren 3—8 geben die bei den einzelnen Linien markirten Punkte. Die Prüfung, ob diese Punkte auf der Peripherie eines Kreises liegen, wurde in folgender Weise ausgeführt. Es wurden 2 an den Enden, 2 in der Mitte jeder Reihe liegende Punkte ausgewählt und für die Verbindungslinien 13 und 24 die Mittellothe konstruirt. Aus dem Schnittpunkt der letzteren als Mittelpunkt wurde dann ein den genannten Punkten sich möglichst anschließender Kreis konstruirt. Bei den Figuren 3 und 4 fallen für die oberen Punktreihen die Punkte 2 und 3 zusammen; hier sind also die Kreise aus nur 3 Punkten konstruirt. Die erhaltenen Kreise schließen sich den Punktreihen sehr gut an. Nur bei dem oberen Kreise der Figur 8 findet nach den Elektroden hin eine größere Abweichung statt, welche durch eine gewisse Steifigkeit des Goldblattes bedingt ist.

Um eine weitere Prüfung für die Uebereinstimmung der Theorie und Beobachtung zu erhalten, wurden die in Fig. 6 dargestellten Punktreihen aufgezeichnet. Die Punkte 1 wurden zu Anfangspunkten rechtwinkliger Coordinatensysteme gemacht, die Linien 14 zu den x-Axen derselben. Für jeden einzelnen Punkt wurden sodann die Coordinaten gezeichnet und durch Anlegen eines in halbe Millimeter getheilten Maaßstabes gemessen. Es wurden die Coordinaten der Mittelpunkte und die Halbmesser der beiden Kreise berechnet, welche durch die Punkte 124 und 134 hindurchgehen. Die Mittel aus den berechneten Werthen wurden als Halbmesser r und Mittelpunktskoordinaten desjenigen Kreises genommen, welcher der beobachteten Punktreihe sich anschließen sollte. Bis zu welchem Grade

dies der Fall war, kann beurtheilt werden, wenn die Entfernungen d der beobachteten Punkte von dem Mittelpunkt des Kreises und damit ihre Abweichung $d - r$ von der Peripherie des Kreises berechnet werden. In den folgenden Tabellen sind diese Werthe für die beiden Curven der Fig. 6 zusammengestellt.

I. Obere Curve der Fig. 6.

$a = 18.27 \qquad b = 7.71 \qquad r = 19.83.$

x	y	d	$d - r$
— 1.25	— 2.45	20.22	+ 0.40
— 0.85	— 1.2	20.20	0.38
0.0	0.0	19.85	0.03
+ 0.7	+ 1.2	19.70	— 0.12
1.5	2.45	19.61	— 0.21
3.1	4.45	19.44	— 0.38
3.95	5.5	19.48	— 0.34
5.3	6.85	19.50	— 0.32
6.0	7.55	19.58	— 0.24
7.1	8.45	19.64	— 0.18
8.35	9.2	19.60	— 0.22
9.75	9.9	19.56	— 0.26
11.05	10.6	19.68	— 0.14
12.95	11.25	19.69	— 0.13
14.5	11.55	19.62	— 0.20
16.0	12.0	19.84	+ 0.02
17.7	12.1	19.82	0.00
19.45	12.1	19.84	0.02
21.2	12.0	19.92	0.10
22.95	11.65	19.92	0.10
24.75	11.15	19.94	0.12
26.4	10.45	19.95	0.13
28.25	9.55	19.94	0.12
29.7	8.7	20.00	0.18
30.95	7.9	20.11	0.29
32.05	6.8	20.01	0.19
33.05	5.7	19.95	0.13
34.0	4.65	20.00	0.18
34.9	3.5	20.06	0.24
35.5	2.2	19.88	0.06
36.55	0	19.80	— 0.02

II. Untere Curve der Fig. 6.

$a = 20.17 \qquad b = 10.65 \qquad r = 22.78.$

x	y	d	$d-r$
— 1.1	— 2.05	22.94	+ 0.16
0	0	22.81	0.03
+ 1.1	+ 1.55	22.64	— 0.14
2.1	3.05	22.68	— 0.10
3.05	4.1	22.60	— 0.18
4.0	5.4	22.78	0.0
5.35	6.55	22.70	— 0.08
7.5	8.05	22.59	— 0.19
9.5	9.3	22.62	— 0.16
11.5	10.2	22.58	— 0.20
13.9	11.05	22.59	— 0.19
16.05	11.7	22.94	+ 0.16
18.5	11.95	22.66	— 0.12
20.7	11.9	22.56	— 0.22
23.0	12.0	22.82	+ 0.04
25.55	11.55	22.84	0.06
27.6	10.95	22.84	0.06
29.6	10.05	22.75	— 0.03
31.6	9.05	22.78	0.0
33.0	8.45	23.01	+ 0.23
34.6	7.05	22.84	0.06
35.7	5.95	22.73	— 0.05
36.6	5.05	22.73	— 0.05
37.8	3.7	22.73	— 0.05
39.25	2.4	23.12	+ 0.34
40.35	0	22.82	0.04
41.05	— 1.0	23.00	0.22
41.5	— 2.0	23.02	0.24

Die Uebereinstimmung kann als eine befriedigende bezeichnet werden, wenn man berücksichtigt, daß die obere Curve der Fig. 6 diejenige ist, welche von allen die größte Abweichung von dem gezeichneten Kreise zeigt. Es ergiebt sich überdies aus dem Verlauf der Abweichungen, daß leicht ein Kreis von besserem Anschluß an die gegebene Punktreihe bestimmt werden konnte. Schon der graphisch gefundene Kreis zeigt einen besseren Anschluß als der berechnete; der Halbmesser der letzteren beträgt 20,0 mm der des berechneten 19,83 mm.

Zusatz.

In einem früheren Aufsatze[1]) habe ich Messungen mitgetheilt

1) Riecke, Gött. Nchr. 1881. S. 41. Wied. Ann. Bd. 13. S. 194.

an einem mit einer Gleitstelle behafteten Stromkreise; der bewegliche Theil desselben bestand in einer kreisförmigen Kupferscheibe, welche in ihrem Mittelpunkte an einem Drahte von hartem Messing aufgehängt war. Die horizontal schwebende Scheibe war in ein mit Kupfervitriol gefülltes Gefäß eingetaucht. Es konnte ein galvanischer Strom durch den vertikalen Suspensionsdraht zugeleitet, durch den Rand der Scheibe, die Flüssigkeit und eine der drehbaren Scheibe gegenüberstehende feste Scheibe abgeleitet werden. Gegenstand der Beobachtungen waren die Ablenkungen, welche die vom Strom durchflossene Scheibe durch die Vertikalkomponente des Erdmagnetismus erlitt.

In jenem Aufsatze sind die berechneten Werthe der Ablenkung fehlerhaft geworden durch ein bei der Berechnung der Inklination aus den mitgetheilten Beobachtungen begangenes Versehen, auf welches ich durch Herrn Carl Schering aufmerksam gemacht wurde. Nach der Verbesserung desselben ergiebt sich als Werth der Inklination $j = 66^0\ 34{,}6^1$, als Werth der Vertikalintensität 4,3233. Die am Schlusse mitgetheilte Tabelle zur Vergleichung der beobachteten und berechneten Werthe der in Skalentheilen ausgedrückten Ablenkung ist daher durch folgende zu ersetzen:

n beobachtet	6.60	6.58	9.22	9.07	8.76	9.19	7.72	7.74
n berechnet	6.53	6.54	8.96	9.10	8.77	9.04	7.92	7.76
Differenz	0.07	0.04	0.26	— 0.03	— 0.01	0.15	— 0.20	— 0.02

n bedeutet die Ablenkung der Scheibe in Skalentheilen.

Im Mittel ist:

$$\frac{n \text{ beobachtet}}{n \text{ berechnet}} = 1.004$$

Dies würde einer Erwärmung des Suspensionsdrahtes um 8^0 entsprechen.

Ueber die Theorie der Dispersion und Absorption, speciell über die optischen Eigenschaften des festen Fuchsins.

Von

W. Voigt.

In zwei früheren Abhandlungen [1]) habe ich die allgemeinsten Ge-

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 873, 1833, Nachr. v. d. K. G. d. W. zu Göttingen, 1884, No. 6 p. 137.

setze derjenigen beiden Gattungen von Kräften aufgesucht, welche auf den Lichtäther wirkend bei allen fortgepflanzten Bewegungen deren Energie entweder ungeändert lassen oder vermindern. Nimmt man an, was die Beobachtungen wahrscheinlich machen, daß eine Vermehrung der Energie einer fortgepflanzten Bewegung durch die Wirkung eines ponderabeln Körpers unmöglich ist, so sind die erwähnten Kraftgesetze die allgemeinsten in der Optik möglichen, und eine Erweiterung in dieser Hinsicht erscheint zunächst nicht denkbar.

Wenn nun aber trotzdem die von mir auf jene Kräfte basirte Licht-Theorie noch bei weitem nicht alle beobachteten Erscheinungen darzustellen gestattet, z. B. zwar Dispersion und Absorption ergiebt, aber nicht jedes beliebig complicirte Gesetz für deren Zusammenhang mit der Farbe liefert (was übrigens noch keine Theorie in der ganzen Allgemeinheit gelöst hat), so wird man naturgemäß zunächst die Hülfsannahmen der Theorie darauf hin prüfen, ob sie eine allgemeinere Fassung gestatten.

Da bietet sich aber ganz allein die Annahme verschwindend kleiner Amplituden der ponderabeln Theile, welche bekanntlich anderen Theorien fremd ist. Indessen scheint es mir nicht zulässig, dieselbe fallen zu lassen. Außer der mehrfach erörterten Schwierigkeit, daß man dann, solange man nicht den gesicherten Boden der Elasticitätsgleichungen verläßt, nothwendig stets neben einer Lichtwelle eine Art von Schallwelle erhält, — die bei merklichen Amplituden auch eine beträchtliche lebendige Kraft erhalten muß, aber in ihrer Wirkung noch nicht bemerkt ist, — liegt noch eine andere vor, die bisher zu besprechen weniger Veranlassung war.

Auch diejenigen Theorien, welche merkliche Amplituden der Körpertheilchen annehmen, aber, um jene »Schallwellen« zu vermeiden, statt der gewöhnlichen elastischen Kräfte willkürliche zwischen den ponderabeln Massen wirksam annehmen, ergeben für die ponderabeln Theile Bewegungen, welche ähnlich wie jene Schallwellen nur so lange andauern als eine Lichtwelle den Körper passirt (also jedenfalls nicht die die Absorption begleitende Wärmebewegung). Während also ein Bruchtheil der Energie, welche die in einem Zeitmoment im Körper enthaltene Lichtbewegung besitzt, indem er den Körpertheilchen mitgetheilt wird, genügt, um denselben eine merkliche Bewegung zu ertheilen, die ihrerseits auf die Bewegung des Aethers zurückwirkt, ist der in einem absorbirenden Körper stattfindende Energieverlust der als Energiezuwachs den ponderabeln Theilchen zu Gute kömmt und der bei hinlänglicher Dauer des Vorganges beliebig groß werden kann, ohne jede Wirkung.

Der bedenkliche Widerspruch, der hierin liegt, tritt am auffälligsten hervor, wenn man ein Zahlenbeispiel betrachtet.

In dem absorbirenden Medium falle senkrecht auf eine Schicht von der Dicke 1^{cm} eine Lichtwelle, deren gesammte Energie pro Volumeneinheit gleich E sei. Die Bewegung der ponderabeln Theile enthält darnach eine kinetische Energie, die pro Volumeneinheit kleiner als E, etwa gleich $\alpha . E$ ist, wo $\alpha < 1$. Beim Durchgang durch die Schicht bleibe der Bruchtheil $\beta . E$ in derselben zurück. Da nun die Zeit des Durchganges durch die Schicht von der Dicke Eins gleich $1/\omega$ ist, wenn ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (in Centimetern gegeben) bezeichnet, so gewinnt die Schicht von der Dicke Eins pro Volumeneinheit in jeder Secunde den Energiezuwachs

$$\omega . \beta . E,$$

der ihr auch nicht verloren geht, so lange man von der allmählichen und sehr geringen Wärmeableitung absieht. Nimmt man ein recht durchsichtiges Medium, das auf 1^{cm} Länge nur 1/1000 der Energie absorbirt, so erhält man das Resultat, daß der Zuwachs der innern Energie durch Absorption pro Secunde und Volumeneinheit jedenfalls mehr als 30000000 Mal größer ist, als der Betrag, der in einem Moment in Folge der eben durchgehenden Lichtwelle in Gestalt von lebendiger Kraft der ponderabeln Theile in der Volumeneinheit vorhanden ist. Und dieser enorme Betrag, der bei stärker absorbirenden Körpern und in längerer Zeitdauer noch ganz ungeheuer wächst, soll ohne Einfluß auf die Lichtbewegung sein, während ein dagegen verschwindend kleiner die bedeutendsten Wirkungen giebt?

Ich glaube vielmehr, daß die vorstehende Betrachtung zu folgendem Schluß berechtigt: Da die Beobachtung in den meisten absorbirenden Medien keine merklichen Wirkungen der im Laufe ziemlich langer Zeit beim Hindurchgehen einer Lichtwelle zurückgehaltenen Energie auf die optischen Erscheinungen giebt, so ist es im höchsten Grade unwahrscheinlich, daß in ihnen die so außerordentlich viel kleinere Menge kinetischer Energie, welche in einem Zeitmoment durch die Lichtbewegung selbst in den Körpermolekülen vorhanden ist, irgend eine merkliche Rückwirkung auf die Aetherbewegung üben sollte; wir sind vielmehr gezwungen, in allen jenen Medien die Amplituden der Körpertheile verschwindend klein anzunehmen[1]).

1) Auszunehmen wären nach dem Obigen vermuthlich die phosphorescirenden Körper.

Durch diese Betrachtungen gewinnt es den Anschein, daß die Annahme, »die Materie sei bei der Lichtbewegung als ruhend anzusehen«, nicht nur, wie ich früher glaubte[1]), als ein Nothbehelf einzuführen ist, der zu verwerfen sein wird, wenn wir einmal Mittel gewonnen haben werden, die Wärmebewegung zu behandeln, sondern im Wesen der Sache, also vermuthlich in der gegenüber derjenigen des Aethers außerordentlich großen Dichtigkeit der ponderabeln Materie tief begründet ist.

Da also ein Aufgeben der Annahme ruhender Körpermoleküle nicht zulässig ist, so werde ich ausschließlich zu untersuchen haben, in welchem Sinne die bisher, wie ich glaube, auf streng mechanischer Grundlage entwickelte Lichttheorie sich unter Beibehaltung dieser Annahme erweitern läßt.

Die Wechselwirkung zwischen Materie und Aether ist ein Vorgang der wahrscheinlich zum Theil im Innern, zum Theil an der Oberfläche der ponderabeln Moleküle in Gestalt von Stoß und Reibung vor sich geht, zum Theil auf Fernwirkung beruht. Die mathematischen Ausdrücke, welche ich dafür aus dem Princip der Energie geschlossen habe, beziehen sich nur auf das Gesammtresultat dieses höchst complicirten Processes: d. h. sein Erfolg kann als eine auf den Aether eines Volumenelementes gleichmäßig ausgeübte Kraft angesehen werden, welche nothwendig einem der abgeleiteten Gesetze folgen muß. Jene Gesetze enthalten willkürliche Coëfficienten, die bisher vorläufig (wie ausdrücklich bemerkt) als unabhängig von der Farbe angenommen sind. Wenn sich nun aber durch Beseitigung dieser speciellen Annahme weitere Beobachtungsgebiete in Uebereinstimmung mit der Theorie bringen lassen, so sehe ich nicht, welche Schwierigkeit sich dem entgegenstellen sollte.

Denn derselbe Schritt ist in mehreren Gebieten der Physik ganz ebenso bereits unbeanstandet gethan worden[2]). Die innere Leitungsfähigkeit der Körper für die Wärme ist sogar als eine unbekannte Function der Temperatur in die Differentialgleichungen eingeführt worden, obgleich die Temperatur die abhängige Variable ist, während hier nur ein Parameter der Schwingungsbewegung in der Constante auftreten soll. Ueberdies sind ja in der Optik Erscheinungen bekannt, bei welchen Vorgänge im Innern eines Körpers eine Wirkung nach Außen üben, welche von der Farbe abhängig ist, — warum soll der Vorgang im Innern eines Moleküles nicht ähnlich zu denken sein.

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19 p. 873. 1883.

2) In der Optik in ganz ähnlichem Sinne wie oben z. B. von Mac Cullagh, Phil. Mag. III Bd. 21 p. 298. Pogg. Ann. Bd. 58, p. 268 bes. 278, 1843.

Bietet sich hiernach also keine principielle Schwierigkeit für die Annahme, daß die Constanten der in einem ponderabeln Körper auf den Aether wirkenden Kräfte mit der Farbe variiren, so hat dieselbe doch einige Uebelstände zur Folge, welche nachdrücklich an die Spitze gestellt werden sollen [1]).

Erstens führt sie von Differentialgleichungen, welche für alle Bewegungen gelten, auf solche, die nur für periodische Bewegungen einen Sinn haben. Für nicht periodische Bewegungen müßte die ursprüngliche Form mit constanten Coëfficienten gewählt werden. Für eine solche Verschiedenheit des Verhaltens periodischer und nicht periodischer Bewegungen könnte man die optischen Erscheinungen an dünnen Blättchen als Analogie anführen.

Zweitens enthält sie naturgemäß das Aufgeben einer befriedigenden Begründung eines allgemeinen Gesetzes für die Abhängigkeit der Dispersion und Absorption von der Farbe. Denn nur für solche Körper, für welche man aus irgend welchen Gründen, z. B. weil sie einatomige Moleküle enthalten, annehmen möchte, daß die von ihnen auf den Aether ausgeübten Kräfte von der Schwingungsdauer unabhängig sind, würden sich die früher abgeleiteten Gesetze der Dispersion und Absorption als nothwendig ergeben.

Diese Consequenz wird vermuthlich Physiker, welche gerade die Aufsuchung des wahren Dispersions- und Absorptionsgesetzes mit besonderer Vorliebe betreiben, gegen die besprochene Erweiterung und vielleicht gegen meine ganze Theorie einnehmen. Ich halte es aber für ungleich wichtiger, eine mechanisch sichere Grundlage zu besitzen, welche für eine Gruppe von Erscheinungen die allgemeinsten Gesetze unbestimmt läßt, als eine mechanisch nicht haltbare, welche von jenen Erscheinungen immerhin nur einen kleinen Theil zu behandeln gestattet; denn die vorliegende Aufgabe in solcher Allgemeinheit anzugreifen, daß daran zu denken wäre, auf diesem Wege Absorptionsspectra von der Complication derjenigen der Metalldämpfe abzuleiten, hat noch keine Theorie vermocht.

Ich meine auch, die vielfach ausgesprochene Ansicht, daß bei den Vorgängen der Absorption und Dispersion intermoleculare Vorgänge mitspielen, müßte zusammen mit der Erkenntniß, daß die in-

1) Es ist wohl kaum nöthig ausdrücklich hervorzuheben, daß sämmtliche Gesetze, welche ich für die verschiedensten Medien aus meiner Theorie abgeleitet habe, auch bei Einführung der besprochenen Erweiterung unverändert bleiben und man nur die unbekannten Constanten darin als Functionen der Schwingungsdauer zuzulassen hat. Daß die Grundlagen der Theorie ungeändert bleiben und es sich nur darum handelt, unnöthig beschränkende Nebenannahmen fallen zu lassen, ist schon im Eingang dieser Zeilen erörtert.

termolecularen Bewegungen uns noch vollständig verschlossen sind mit einer gewissen Nothwendigkeit zu der Folgerung drängen, daß demnach die vollständige Erklärung jener Erscheinungen noch unmöglich und der einzige Weg, die theoretische Optik zu erweitern, der oben vorgeschlagene ist: die mechanisch begründeten Gesetze der wirkenden Kräfte als unbekannte Functionen der Schwingungsdauer zuzulassen.

Damit hätte die Untersuchung der Abhängigkeit der Dispersion und Absorption von der Farbe in unserer Theorie jetzt nur noch das Ziel, jene unbekannten Functionen zu bestimmen und die Fälle zu constatiren, in welchen sie sich als Constanten ergeben. Das größere theoretische Interesse würde aber die Verknüpfung der verschiedenen derselben Farbe in einem im Allgemeinen anisotropen, absorbirenden Medium entsprechenden Erscheinungen wecken.

In der letzteren Hinsicht versucht die folgende Abhandlung einen Beitrag zur Erforschung des optischen Verhaltens gewisser Körper zu bringen.

Von Körpern mit Eigenfarben kömmt bisher für eine Vergleichung ihrer optischen Eigenschaften mit der Theorie nur das feste Fuchsin in Betracht, insofern nur für dieses Beobachtungen in verschiedener Richtung hin angestellt sind. E. Wiedemann[1]), P. Glan[2]), E. Schenk[3]) und J. Merkel[4]) haben die elliptische Polarisation des in Luft reflectirten Lichtes untersucht, W. Wernicke hat die Aenderung der Absorption mit der Farbe und dem Einfallswinkel[5]) (leider nicht diese selbst in absoluten Zahlen) und die absolute Phasenänderung des reflectirten Lichtes[6]) bestimmt. Außerdem liegen Beobachtungen von G. Lundquist[7]) über elliptische Polarisation und Intensität des in Crownglas an Fuchsin reflectirten Lichtes vor.

Die Vergleichung der Resultate der vier ersten Physiker zeigt leider große Widersprüche.

Herr Wiedemann findet für zwei Fuchsinspiegel die Werthe des Haupteinfallswinkels $\bar{\varphi}$ (in der Bezeichnung der früheren Arbeit) und des Amplitudenverhältnisses $\bar{\rho}$ der wiederhergestellten linearen

1) E. Wiedemann, Pogg. Ann. Bd. 151 p. 1. 1874.
2) P. Glan, Wied. Ann. Bd. 7. p. 321, 1879.
3) E. Schenk, Wied. Ann. Bd. 15. p. 177, 1882.
4) J. Merkel, Wied. Ann. Bd. 19. p. 1. 1883.
5) W. Wernicke, Pogg. Ann. Bd. 155. p. 87. 1875.
6) W. Wernicke, Pogg. Ann. Bd. 159. p. 198. 1876.
7) G. Lundquist, Pogg. Ann. Bd. 152, p. 571, 1874.

Polarisation bei dem Haupteinfallswinkel und dem Azimuth 45° die folgenden Werthe für gewisse Fraunhofer'sche Linien:

		C	D	$E\frac{1}{2}b$	F	$F\frac{1}{2}G$
I	$\bar{\varphi}$	66° 3′	64° 45′	59° 48′	53°0′	50° 23′
	$\bar{\rho}$	0,084	0,225	0,340	0,320	0,065[1]
II	$\bar{\varphi}$	64° 52′	64° 22′	58° 51′	52° 14′	$<$ 49° 5′
	$\bar{\rho}$	0,114	0,250	0,350	0,315	$<$ 0,076

welche mit einander recht befriedigend stimmen. Herr Glan hingegen theilt für verschiedene Wellenlängen, denen die beigeschriebenen Fraunhofer'schen Linien ungefähr entsprechen, mit:

λ	657,2	589	530,6	469,8
	C	D	E	$F\frac{1}{2}G$
$\bar{\varphi}$	68° 32′	68° 31′	66° 44′	60° 36′
$\bar{\rho}$	0,203	0,188	0,315	0,589.

In dieser Zusammenstellung fällt ganz besonders der abweichende Verlauf der Werthe $\bar{\rho}$ gegenüber den Wiedemann'schen auf. Während in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Annahme, daß die größere oder geringere Durchsichtigkeit $\bar{\rho}$ kleiner oder größer macht (bei vollständiger Durchsichtigkeit zu Null), bei Wiedemann den rothen und violetten Strahlen, für welche Fuchsin ziemlich durchsichtig ist, die kleinsten $\bar{\rho}$ entsprechen, ist's bei Glan fast umgekehrt.

Zwischen beiden Angaben halten sich etwa die Resultate Herrn Schenks in der Mitte:

	C	D	E	F	$F\frac{1}{2}G$	G
$\bar{\varphi}$	67° 1′	66° 53′	62° 45′	56° 39′	45° 7′	53° 26′
$\bar{\rho}$	0,073	0,261	0,394	0,496	0,492	0,265;

aber sie bringen andere Schwierigkeiten. Es soll nämlich für das äußerste Violett (*G*) die gegenseitige Verzögerung der beiden Componenten parallel und normal zur Einfallsebene die entgegengesetzte sein, als für alle anderen Farben und soll eine Farbe zwischen *F* und *G* überhaupt gar nicht reflectirt werden. Wie weit die Unterschiede der Resultate von der verschiedenen chemischen Zusammensetzung der Fuchsinpräparate herrühren, kann ich natürlich nicht entscheiden; jedenfalls liegt da eine ziemliche Unsicherheit vor, denn Herr Glan bezeichnet »reines salzsaures Rosanilin«, Herr Lundquist »ein Gemisch von essig- und arsenigsaurem Rosanilin« als

1) Vergl. unten p. 275.

Fuchsin. Auch scheinen mit der Zeit Veränderungen in den Präparaten vor sich zu gehen, theils in Folge allmähligen Austrocknens, theils chemischer Zersetzung der Oberflächenschicht. Da die größten Abweichungen sich für rothes und violettes Licht finden, für welches Fuchsin sehr durchsichtig ist, so liegt außerdem die Vermuthung nahe, daß die verschiedenen Beobachter verschieden dicke Schichten benutzt haben, und zwar solche, die für die mittleren Spectralfarben nahe undurchsichtig waren, aber von den äußeren verschieden viel durchließen, also für diese auch ein sehr abweichendes Verhalten des reflectirten Lichtes ergeben mußten. Vielleicht würden sich dann die Schenk'schen Beobachtungen durch die Interferenz der an der Vorder- und Hinterfläche entweder der ganzen Schicht oder eines chemisch veränderten Oberflächenhäutchens reflectirten Strahlen erklären lassen.

Endlich giebt Herr Merkel an:

	$C\frac{1}{2}D$	D	$E\frac{1}{2}b$	F	$F\frac{1}{2}G$
$\bar{\varphi}$	64°	67°	64° 30′	60° 0′	48° 0′
$\bar{\rho}$	0,092	0,170	0,396	0,536	0,507,

Werthe, welche den Schenk'schen nahe parallel laufen, bis auf die negative Reflexion, die Herr Merkel nicht gefunden zu haben scheint.

Jedenfalls zeigt die obige Zusammenstellung, daß die Anwendung von Constanten, welche von einem Beobachter gefunden sind, zur Erklärung der Erscheinungen die Andere gemessen haben, äußerst unsicher ist und man schon mit einem geringen Grade der Uebereinstimmung zufrieden sein muß.

Ich habe für die Vergleichung mit der in der früheren Arbeit entwickelten allgemeinen Theorie absorbirender isotroper Medien die Wiedemann'schen Beobachtungen (I) gewählt, weil sie sich durch große Vollständigkeit und einen besonders stetigen Verlauf der gefundenen Zahlen auszeichnen; die Glan'schen kamen, da sie für jede Farbe nur einen Zahlwerth geben, nicht in Betracht. Freilich hat sich nachträglich ergeben, daß die Wernicke'schen Beobachtungen vollständiger durch diejenigen Constanten erklärt werden, welche aus den Merkel'schen Zahlen folgen; da indeß die zur Durchführung der Vergleichung nöthige Rechnung ganz außerordentlich umständlich und zeitraubend ist, und eine wirklich vollständige Prüfung nur mit Beobachtungen, die an demselben Präparat angestellt sind, (also gegenwärtig überhaupt nicht) zu erreichen ist, so habe ich Bedenken getragen, die Rechnung noch einmal anzustellen.

Die von mir entwickelte allgemeine Theorie absorbirender iso-

troper Medien [1]) ergab in der Vereinfachung, welche eintritt, wenn man die Grenzbedingungen für die Verrückungen genau in der Neumann'schen Form anwendet, folgende Resultate für das Problem der Reflexion an der Oberfläche innerhalb eines durchsichtigen Mediums.

Sei α der Sinus, γ der Cosinus des Einfallswinkels φ der auffallenden Welle, n der Brechungscoëfficient des absorbirenden Mediums gegen das durchsichtige und $\varkappa$ seine Absorptionsconstante; sei ferner

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha/n \\ 2\gamma_1^2 &= \sqrt{4\varkappa^2+(1-\alpha_1^2-\varkappa^2)^2}+(1-\alpha_1^2-\varkappa^2) \\ 2\beta_1^2 &= \sqrt{4\varkappa^2+(1-\alpha_1^2-\varkappa^2)^2}-(1-\alpha_1^2-\varkappa^2) \end{aligned}\right| \quad 1.$$

und bezeichne

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\gamma_1^2(1-\varkappa^2)+2\varkappa^2}{\gamma_1^2(1+\varkappa^2)^2}, \quad & \sigma_p &= \frac{\gamma_1^2}{\beta_1^2+\gamma_1^2} \\ \delta_s &= \frac{\varkappa(2\gamma_1^2+\varkappa^2-1)}{\gamma_1^2(1+\varkappa^2)^2}, \quad & \delta_p &= \frac{\varkappa}{\beta_1^2+\gamma_1^2}, \end{aligned}\right| \quad 2.$$

so sind die sämmtlichen Resultate ausdrückbar durch die vier Hülfswinkel μ_s, ν_s, μ_p, ν_p, die folgen aus

$$\left.\begin{aligned} tg\,\mu_s &= \frac{\gamma_1\delta_s}{n\gamma+\gamma_1\sigma_1} \quad & tg\,\nu_s &= \frac{\gamma_1\delta_s}{n\gamma-\gamma_1\sigma_s} \\ tg\,\mu_p &= \frac{\gamma\delta_p}{n\gamma_1+\gamma\sigma_p} \quad & tg\,\nu_p &= \frac{\gamma\delta_p}{n\gamma_1-\gamma\sigma_p}. \end{aligned}\right| \quad 3.$$

Es ist nämlich

$$\mu_s+\nu_s = \eta_s, \quad \mu_p+\nu_p = \eta_p \quad | \quad 4.$$

die absolute Verzögerung, welche der senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisirte Strahl bei der Reflexion erleidet, also

$$\mu_s+\nu_s-\mu_p-\nu_p = \Delta \quad | \quad 5.$$

die Verzögerung des senkrecht gegen den parallel polarisirten.

Ferner sind

$$R_s = E_s\frac{\sin\mu_s}{\sin\nu_s}, \quad R_p = E_p\frac{\sin\mu_p}{\sin\nu_p} \quad | \quad 6.$$

die Amplituden des reflectirten Lichtes, welche man aus den einfal-

1) W. Voigt, Nachrichten v. d. K. G. d. W. zu Göttingen, 1884, No. 6, p. 187, speciell p. 147, 151 und 152.

lenden E_s und E_p erhält, wenn man die durch die Reflexion eintretende elliptische Polarisation in lineäre verwandelt, $\mathfrak{R}_s$ $\mathfrak{R}_p$ die entsprechenden Werthe für $E_s = E_p = 1$; hiernach

$$tg\,\phi_1 = \rho = \frac{\sin\mu_s . \sin\nu_p}{\sin\mu_p . \sin\nu_s} = \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} \qquad 7.$$

ihr Verhältniß, wenn das einfallende Licht im Azimuth 45° polarisirt war, wodurch $E_s = E_p$ wird.

Für den Haupteinfallswinkel, der dadurch definirt ist, daß

$$\Delta = \frac{\pi}{2},$$

sind alle diese Werthe durch einen darüber gesetzten Strich ausgezeichnet, also gleich $\bar{\varphi}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\mathfrak{R}}_s$, $\bar{\mathfrak{R}}_p$.

Die Wiedemann'schen Beobachtungen geben ρ und Δ für eine größere Anzahl von Einfallswinkeln und Farben. Für die Vergleichung mit der Beobachtung sind die jeder Farbe entsprechenden Constanten n und $\varkappa$ des Fuchsins zu bestimmen. Wie früher erörtert [1]), sind die Formeln zu umständlich, um alle Beobachtungen zu deren Berechnung zu combiniren, und es bleibt nichts übrig, als aus zwei herausgegriffenen Werthen — immer den der Hauptincidenz entsprechenden — n und $\varkappa$ durch Probiren zu finden; daß dadurch die Vergleichung an Genauigkeit verliert und die auftretenden Differenzen unverhältnißmäßig groß erscheinen, ist klar. Um so schwerer wiegt also die außerordentliche Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung, die sich in der folgenden Zusammenstellung zeigt.

Der vielfältigen Anwendungen wegen theile ich für jede Farbe und jeden Einfallswinkel die Hülfsgrößen μ_s, ν_s, μ_p, ν_p und γ_1 mit, bevor ich die berechneten Δ und ρ mit den beobachteten Werthen [2]) vergleiche. Die berechneten R_s und R_p haben gleichfalls Interesse, den Jamin [3]) eine Methode angegeben hat, um sie einzeln zu bestimmen.

Die erste Beobachtungsreihe bezieht sich auf Licht von der Frauenhofer'schen Linie C. Herr Wiedemann giebt dafür an:

$$\bar{\varphi} = 66^0\,3', \quad \bar{\rho} = 0{,}084.$$

1) W. Voigt, l. c. p. 155 u. f.

2) Die als beobachtet angegebenen Werthe sind die Mittel aus zwei verschiedenen Bestimmungen. Diese Mittel sind nicht überall richtig bestimmt und daher theilweise von mir corrigirt.

3) Jamin, Ann. de chim. (3) Bd. 19 p. 296. 1847.

Durch Probiren findet sich:

$$n = 2{,}216, \quad \varkappa = 0{,}151$$

und das folgende Werthsystem:

Linie C.

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
44° 4′	2° 51′	10° 51′	2° 23′	4° 45	0,951
46 34	2 54	11 48	2 20	4 31	0,946
49 4	2 56	13 4	2 17	4 17	0,942
51 34	2 59	14 45	2 13	4 2	0,937
54 4	3 3	17 9	2 9	3 47	0,933
56 34	3 7	20 44	2 4	3 31	0,928
59 4	3 11	26 32	1 59	3 15	0,924
61 34	3 17	37 10	1 53	2 59	0,920
64 4	3 23	59 22	1 47	2 43	0,916
66 34	3 30	99 56	1 40	2 26	0,913
69 4	3 38	134 33	1 32	2 10	$0{,}909_5$
71 34	3 48	151 21	1 23	1 53	$0{,}906_5$
74 4	4 0	159 45	1 14	1 37	0,904
76 34	4 13	164 34	1 5	1 21	$0{,}901_5$
79 4	4 30	167 37	0 54	1 5	$0{,}899_5$

φ	Δ ber.[1]	Δ beob.	Diff.
44° 4′	$0{,}036_5$	0,038	$-0{,}001_5$
46 34	$0{,}043_5$	0,047	$+0{,}003_5$
49 4	$0{,}052_5$	0,061	$-0{,}008_5$
51 34	0,064	0,068	$-$ 0,004
54 4	0,078	0,087	$-$ 0,009
56 34	$0{,}101_5$	0,096	$+0{,}005_5$
59 4	0,136	0,154	$-$ 0,018
61 34	0,198	0,213	$-$ 0,015
64 4	$0{,}323_5$	0,316	$+0{,}007_5$
66 34	0,552	0,551	+ 0,001
69 4	0,747	0,705	+ 0,042
71 34	0,844	0,845	$-$ 0,001
74 4	0,883	0,868	+ 0,015
76 34	0,924	0,922	+ 0,002
79 4	0,945	0,930	+ 0,015

φ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ ber.	ρ beob.	Diff.
44° 4′	0,264	0,502	0,526	0,536	+ 0,010
46 34′	0,247	0,517	0,479	0,481	$-$ 0,002
49 4	0,226	0,533	0,424	0,440	$-$ 0,016
51 34	0,204	0,550	0,372	0,373	$-$ 0,001
54 4	0,180	0,569	0,317	0,320	$-$ 0,003
56 34	0,154	0,588	0,261	0,257	+ 0,004
59 4	0,124	0,611	0,204	0,213	$-$ 0,009
61 34	0,095	0,631	0,150	0,153	$-$ 0,003
64 4	0,069	0,657	0,104	0,110	$-$ 0,006
66 34	0,062	0,685	$0{,}090_5$	0,095	$-0{,}004_5$
69 4	0,089	0,708	0,126	0,140	$-$ 0,014
71 34	0,138	0,735	0,188	0,198	$-$ 0,010
71 4	0,202	0,763	0,264	0,271	$-$ 0,007
76 34	0,276	0,802	0,344	0,358	$-$ 0,014
79 4	0,366	0,831	0,440	0,437	+ 0,003

1) Δ ist wie in der vorigen Abhandlung in Theilen von π angegeben, also aus Herrn Wiedemanns Angaben δ erhalten durch $\Delta = 1 - 2\delta$.

Die Uebereinstimmung ist nicht ganz so vollkommen wie bei den folgenden Reihen; das häufige negative Vorzeichen der Differenz in der letzten Tabelle läßt darauf schließen, daß die Constanten n und x sich wohl noch günstiger bestimmen lassen würden. Indeß ist diese Beobachtungsreihe, offenbar der geringen Intensität des reflectirten Lichtes halber auch nicht so genau, wie die folgenden; für Δ finden sich bei den wiederholten Beobachtungen Werthe, die bis zu 0,048 von einander differiren; überdies steigt Δ für mittlere Einfallswinkel sehr stark, so daß die große Differenz von 0,042 für $\varphi = 69^0 4'$ einem Abstand des beobachteten Punktes um nur 0,010 von der Curve entspricht. Für ρ ist die größte Differenz zweier Beobachtungen 0,025, die des Mittels und der Theorie 0,016. Man wird also mit der Uebereinstimmung sehr zufrieden sein können.

Die 2. Reihe bezieht sich auf Licht der Linie *D*. Herr Wiedemann giebt dafür an:

$$\bar{\varphi} = 65^0 45', \quad \bar{\rho} = 0{,}225.$$

Dem entspricht etwa:

$$n = 2{,}00, \quad x = 0{,}40$$

und folgende Zusammenstellung:

Linie *D*.

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
44° 4	7°32′	26°28′	6° 7′	11°38′	0,947₅
46 34	7°35′	28°51	6 0	11 7	0,942
49 4	7 41	32 9	5 49	10 30	0,937₅
51 34	7 52	35 17	5 39	9 52	0,933
54 4	8 1	40 2	5 29	9 16	0,928
56 34	8 12	46 9	5 15	8 37	0,924
59 4	8 24	54 47	5 2	7 58	0,919
61 34	8 40	65 55	4 46	7 14	0,915₅
64 4	8 56	80 40	4 30	6 36	0,911₅
66 34	9 16	97 19	4 11	5 59	0,907₅
69 4	9 36	113 36	3 51	5 18	0,904
71 34	10 2	126 44	3 30	4 39	0,901
74 4	10 35	137 1	3 7	3 47	0,898₅
76 34	11 14	143 59	2 41	3 19	0,896
79 4	11 48	150 25	2 15	2 40	0,894

φ	Δ ber.	Δ beob.	Diff.
44° 4′	0,090	0,090	± 0
46 34	0,108	0,102	+ 0,006
49 4	0,131	0,130	+ 0,001
51 34	0,153₅	0,150	+ 0,003₅
54 4	0,185	0,180	+ 0,005
56 34	0,225	0,218	+ 0,007
59 4	0,279	0,274	+ 0,005
61 34	0,348	0,344	+ 0,004
64 4	0,436	0,434	+ 0,002
66 34	0,535₅	0,530	+ 0,005₅
69 4	0,633	0,628	+ 0,005
71 34	0,714₅	0,724	— 0,009₅
74 4	0,782	0,782	± 0
76 34	0,829	0,840	— 0,011
79 4	0,874	0,880	— 0,006



	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ ber.	ρ beob.	Diff.
44° 4′	0,294	0,520	0,565	0,552	+ 0,013
46 34	$0{,}273_5$	0,542	0,505	0,511	+ 0,006
49 4	$0{,}251_5$	0,587	0,451	0,460	— 0,009
51 34	0,237	0,575	0,412	0,413	— 0,001
54 4	0,217	0,590	0,367	0,364	+ 0,003
56 34	0,198	0,611	0,325	0,327	— 0,002
59 4	0,179	0,633	$0{,}282_5$	0,283	± 0
61 34	0,165	0,660	0,250	0,244	+ 0,006
64 4	0,157	0,683	0,230	0,234	— 0,004
66 34	0,162	0,699	0,232	0,229	+ 0,003
69 4	0,182	0,727	0,250	0,253	— 0,003
71 34	0,217	0,752	0,289	0,283	+ 0,006
74 4	0,269	0,781	0,345	0,339	+ 0,006
76 34	0,331	0,813	0,407	0,412	— 0,005
79 4	0,414	0,843	0,491	0,498	— 0,007

Für Licht zwischen den Frauenhofer'schen Linien *E* und *b* (3. Reihe) giebt Herr Wiedemann an:

$$\bar{\varphi} = 59^0\,48', \qquad \bar{\rho} = 0{,}340.$$

Hieraus würde etwa folgen:

$$n = 1{,}37, \qquad \varkappa = 0{,}56$$

und folgendes Werthsystem:

Linie $E\frac{1}{2}b$.

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
44° 4′	11° 2′	56° 45′	11° 1′	24° 5′	0,902
46 34	10 59	61 34	10 53	22 56	0,893
49 4	11 0	67 18	10 40	21 42	0,885
51 34	11 2	74 12	10 26	20 22	0,876
54 4	11 3	82 34	10 9	19 4	0,868
56 34	11 8	91 55	9 51	17 45	0,860
59 4	11 12	101 50	9 29	16 24	0,852
61 34	11 23	111 48	9 2	14 57	0,845
64 4	11 33	121 17	8 33	13 34	0,839
66 34	11 41	129 17	7 59	12 15	0,831
69 4	11 57	136 30	7 25	10 47	0,826
71 34	12 14	142 7	6 46	9 26	0,820
74 4	12 40	146 49	6 2	8 3	0,816
76 34	13 5	150 40	5 15	6 42	0,813
79 4	13 16	155 5	4 26	5 24	0,808

φ	Δ ber.	Δ beob.	Diff.
44° 4′	0,182	0,168	+ 0,014
46 34	0,215	0,216	— 0,001
49 4	0,255	0,242	+ 0,013
51 34	0,302	0,300	+ 0,002
54 4	0,357	0,352	+ 0,005
56 34	0,419	0,418	+ 0,001
59 4	0,484	0,480	+ 0,004
61 34	0,551	0,546	+ 0,005
64 4	0,615	0,616	— 0,001
66 34	0,671	0,672	— 0,001
69 4	0,724	0,726	— 0,002
71 34	0,768	0,770	— 0,002
74 4	0,808	0,804	+ 0,004
76 34	0,843	0,848	— 0,005
79 4	0,881	0,874	+ 0,007

φ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ ber.	ρ beob.	Diff.
44° 4	0,229	0,468	0,489	0,501	− 0,012
46 34	0,217	0,484	0,448	0,457	− 0,009
49 4	0,207	0,501	0,413	0,418	− 0,005
51 34	0,199	0,515	0,386	0,386	± 0
54 4	0,193	0,539	0,359	0,366	− 0,007
56 34	0,193	0,561	0,344	0,340	+ 0,004
59 4	0,199	0,584	0,340	0,342	− 0,002
61 34	0,213	0,609	0,349	0,352	− 0,003
64 4	0,234	0,634	0,370	0,366	+ 0,004
66 34	0,261	0,655	0,399	0,390	+ 0,009
69 4	0,301	0,689	0,436	0,427	+ 0,009
71 34	0,345	0,719	0,480	0,474	+ 0,006
74 4	0,400	0,752	0,533	0,527	+ 0,006
76 34	0,462	0,785	0,588	0,590	− 0,002
79 4	0,545	0,821	0,665	0,653	+ 0,012.

Die 4. Reihe bezieht sich auf die Linie F. Herr Wiedemann giebt an:

$$\bar{\varphi} = 53^0\ 0', \qquad \bar{\rho} = 0{,}320,$$

woraus folgt

$$n = 1{,}11, \qquad k = 0{,}43$$

und die folgende Zusammenstellung:

Linie F.

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
44° 4′	7° 20	90° 34′	12° 42	38° 35′	0,828
46 34	7 1	99 10	12 46	36 53	0,814
49 4	6 41	110 4	12 45	34 46	0,800
51 34	6 18	121 59	12 44	32 41	0,786
54 4	5 53	132 43	12 40	30 35	0,771
56 34	5 26	142 46	12 32	28 29	0,756
59 4	5 3	150 0	12 18	26 16	0,743
61 34	4 37	157 31	11 55	23 57	0,731
64 4	4 12	162 43	11 30	21 42	0,719
66 34	3 48	166 30	10 58	19 27	0,708
69 4	3 24	169 46	10 17	17 9	0,698
71 34	3 0	172 9	9 33	14 59	0,689
74 4	2 42	173 53	8 37	12 41	0,681
76 34	2 22	175 17	7 38	10 36	0,674
79 4	2 7	176 20	6 27	8 24	0,668

φ	Δ ber.	Δ beob.	Diff.
44° 4′	0,259	$0{,}258_5$	+ 0,001
46 34	0,315	0,316	− 0,001
49 4	$0{,}384_5$	0,374	$+ 0{,}010_5$
51 34	$0{,}460_5$	0,468	$- 0{,}007_5$
54 4	0,530	0,526	+ 0,004
56 34	$0{,}595_5$	0,600	$- 0{,}004_5$
59 4	0,647	0,660	− 0,013
61 34	0,696	0,702	− 0,006
64 4	0,743	0,738	+ 0,005
66 34	0,777	0,774	+ 0,003
69 4	$0{,}809_5$	0,804	$+ 0{,}005_5$
71 34	0,842	0,840	+ 0,002
74 4	0,863	0,864	− 0,001
76 34	0,866	0,886	± 0
79 4	0,909	0,912	− 0,003

φ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ ber.	ρ beob.	Diff.
44° 4′	0,127$_5$	0,352$_5$	0,362	0,355	+ 0,007
46 34	0,124	0,368	0,336$_5$	0,335	+ 0,001$_5$
49 4	0,124	0,387$_5$	0,320	0,317	+ 0,003
51 34	0,129	0,408	0,317	0,319	− 0,002
54 4	0,139$_5$	0,431	0,323$_5$	0,331	− 0,007$_5$
56 34	0,156$_5$	0,455	0,344	0,330	+ 0,014
59 4	0,176	0,481	0,366	0,364	+ 0,002
61 34	0,210$_5$	0,509	0,413	0,370	+ 0,043
64 4	0,246	0,539	0,456	0,432	+ 0,024
66 34	0,283$_5$	0,571	0,496	0,471	+ 0,025
69 4	0,334	0,605	0,551$_5$	0,528	+ 0,023$_5$
71 34	0,382	0,641$_5$	0,596	0,594	+ 0,002
74 4	0,440	0,682	0,641$_5$	0,638	+ 0,003$_5$
76 34	0,503$_5$	0,722$_5$	0,697	0,705	− 0,008
79 4	0,575$_5$	0,768	0,749$_5$	0,750	+ 0,000$_5$

Die Uebereinstimmung ist ebenso vollständig, wie bei den vorigen Reihen, nur die 4 Beobachtungen für ρ, welche den Werthen φ gleich 61° 34′, 64° 4′, 66° 34′, 69° 4′ entsprechen, fallen in so eigenthümlicher Weise neben die die übrigen verbindende stetige Curve, daß man vermuthen möchte, daß bei ihnen eine gemeinschaftliche Störung des Apparates stattgefunden hätte.

Die letzte Beobachtungsreihe, welche sich auf Licht zwischen *F* und *G* bezieht, ist, wahrscheinlich weil für diese Farbe Fuchsin ziemlich durchsichtig ist und nur wenig Licht reflectirt, viel unsicherer als die früheren, wie besonders aus den bei Wiederholung derselben Ablesung erhaltenen Werthen folgt. Ich halte daher die Vergleichung der Theorie mit dem Mittel der beobachteten Werthe allein nicht mehr für geeignet, um eine Vorstellung von der Uebereinstimmung zu geben, sondern werde beide beobachtete Werthe neben die entsprechenden berechneten stellen. Herr Wiedemann giebt $\bar{\varphi} = 50° 23'$ und $\bar{\rho} = 0{,}020$ an; letzteres ist nach den Beobachtungstafeln aber wohl nicht richtig und etwa durch 0,065 zu ersetzen. Dies führt auf

$$n = 1{,}188_5, \qquad \varkappa = 0{,}079$$

und folgende Zusammenstellung.

Linie $F\frac{1}{2}G$.

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
44° 4′	1° 5′	37° 24′	2° 54′	18° 13′	0,661
49 4	0 45	78 34	3 4	17 4	0,600
54 4	0 22	167 13	3 19	15 39	0,541
59 4	− 0 7	181 36	3 31	13 59	0,486
64 4	− 0 42	185 42	3 38	12 2	0,436
69 4	− 1 25	187 7	3 39	9 49	0,392
74 4	− 2 15	187 27	3 25	7 23	0,357
79 4	− 3 56	188 47	2 51	4 53	0,330

φ	Δ ber.	Δ beob.		Mittel	Diff.
44° 4′	$0{,}096_5$	0,056	0,330	0,143	$-\,0{,}046_5$
49 4	0,329	0,154	0,264	0,209	+ 0,120
54 4	0,826	0,696	0,890	0,793	+ 0,033
59 4	0,911	0,924	0,974	0,949	— 0,038
64 4	0,941	0,930	0,936	0,933	+ 0,008
69 4	0,957	0,948	0,952	0,950	+ 0,007
74 4	0,969	0,976	0,992	0,984	— 0,015
79 4	$0{,}988_5$	0,976	0,976	0,976	$+\,0{,}012_5$

φ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ ber.	ρ beob.		Mittel	Diff.
44° 4′	$0{,}031_0$	$0{,}161_7$	0,192	0,085	0,210	$0{,}147_5$	$+\,0{,}044_5$
49 4	$0{,}013_8$	$0{,}182_8$	0,073	0,059	0,092	$0{,}075_5$	$-\,0{,}002_5$
54 4	$0{,}029_5$	$0{,}214_5$	$0{,}137_5$	0,104	0,123	$0{,}113_5$	+ 0,024
59 4	$0{,}069_1$	c,254	$0{,}272_5$	0,272	0,273	$0{,}272_5$	± 0
64 4	$0{,}123_4$	0,304	0,406	0,340	0,390	$0{,}366_5$	$+\,0{,}039_5$
69 4	$0{,}199_8$	0,373	0,534	0,509	0,524	$0{,}516_5$	$+\,0{,}017_5$
74 4	0,303	0,464	0,653	0,648	0,666	0,657	— 0,004
79 4	0,449	0,584	0,769	0,759	0,762	$0{,}760_5$	$+\,0{,}008_5$

Die Abweichungen von den Mittelwerthen sind also im Ganzen bedeutend größer als bei den obigen genaueren Reihen, aber einerseits zeigen ihre häufig wechselnden Vorzeichen, daß sie auf der Ungenauigkeit der Beobachtungen beruhen, andererseits fallen die berechneten Werthe meist zwischen die beobachteten, so daß man die Reihe jedenfalls als eine Bestätigung der Theorie ansehen kann. Ueberdies steigt bei den vier ersten Beobachtungen die Curve für Δ so stark, daß bedeutenden Differenzen von Δ doch nur ganz geringe Abweichungen der beobachteten Punkte von der theoretischen Curve entsprechen, so hier etwa die folgenden:

0,020 0,010 0,008 0,030.

Die Wiedemann'schen Beobachtungen am Fuchsin werden also sämmtlich mit großer Genauigkeit durch die schon früher an den Metallen erprobten Formeln für die Reflexion an absorbirenden Medien dargestellt. Beachtet man die äußerst verschiedenen Werthe, welche die Constanten der Theorie in den verschiedenen Fällen annehmen, so für

Silber rothes Licht		$n = 0{,}23$	$\varkappa = 15{,}0$	$n\varkappa = 3{,}45$
Fuchsin Linie	C	$n = 2{,}22$	$\varkappa = 0{,}151$	$n\varkappa = 0{,}335$
„	$F\tfrac{1}{2}G$	$n = 1{,}19$	$\varkappa = 0{,}079$	$n\varkappa = 0{,}094$

und welche für n um das Zehnfache, für $\varkappa$ um fast das Zweihundertfache variiren, sowie die äußerst verschiedene Form der Curven für Δ und ρ, welche die Construction dieser Fälle ergiebt, so wird man daraus einen günstigen Schluß für die Zuverlässigkeit der Theorie ziehen dürfen. —

Die Wiedemann'schen Werthe lassen sich nun verwenden, um die Kräfte, welche man im Fuchsin auf den Aether wirkend

annehmen muß, näher zu bestimmen. Nach den früheren Bezeichnungen[1]) sind unter Benutzung gewisser specialisirender Hülfsannahmen[2]) die Energie-erhaltenden Kraft-Componenten:

$$A_1 = a\,\Delta^2 u + a'\Delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$B_1 = a\,\Delta^2 v + a'\Delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$C_1 = a\,\Delta^2 w + a'\Delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

und die Energie-vermindernden:

$$A_2 = c\,\Delta^2 \frac{\partial u}{\partial t} \qquad B_2 = c\,\Delta^2 \frac{\partial v}{\partial t} \qquad C_2 = c\,\Delta^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

worin $\Delta^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ ist.

Die Geschwindigkeit ω_1 und der Absorptionscoëfficient $\varkappa$ hängen mit denselben Coëfficienten durch die zwei Gleichungen[3]) zusammen:

$$m\omega_1^2 = A_1(1-\varkappa^2) + 2\varkappa c_1$$
$$0 = 2A_1\varkappa - c_1(1-\varkappa^2)$$

worin $A_1 = e + a - \frac{a'}{\tau^2}$, $c_1 = \frac{c}{\tau}$ und m die Dichtigkeit, e die Elasticitätsconstante des Aethers ist, sodaß im freien Aether $m\omega_0^2 = e$.

Die letzten Gleichungen zusammen ergeben

$$\frac{1}{n^2} = \frac{c(1+\varkappa^2)^2}{2e\varkappa\tau},$$

was durch Einführung von $\frac{c\pi}{\sqrt{em}} = C$, $2\pi\tau\sqrt{\frac{e}{m}} = \lambda_0$ auch wird

$$\frac{1}{n^2} = \frac{C}{\lambda_0}\cdot\frac{(1+\varkappa^2)^2}{\varkappa}.$$

Diese Größe C bestimmt sich nun aus den obigen Werthen $n\varkappa$ und λ_0 (letzteres in Tausendel-Millimetern gegeben) für die einzelnen beobachteten Farben wie folgt:

	C	D	$E\frac{1}{2}b$	F	$F\frac{1}{2}G$.
$C =$	$0{,}019_2$	$0{,}043_8$	$0{,}090$	$0{,}120$	$0{,}025_8$.

1) W. Voigt, Nachrichten von der K. G. d. W. in Göttingen 1884 No. 6, p. 141.

2) W. Voigt, l. c. p. 152.

3) W. Voigt, l. c. p. 142.

C und damit die absorbirende Kraft selbst ist also am größten für Licht der Farbe F. Diese Werthe geben hinwiederum durch die Relation

$$\frac{A_1}{e} = \frac{C}{\lambda_0} \frac{1-\varkappa^2}{\varkappa}$$

leicht die Größen $\frac{A_1}{e}$ für dieselben Farben. Man erhält ungefähr

$$\frac{A_1}{e} = 0{,}189 \qquad 0{,}156 \qquad 0{,}211 \qquad 0{,}467 \qquad 0{,}698,$$

Zahlen, welche keinen besonders regelmäßigen Gang zeigen.

Diese Werthe von C und A_1/e haben natürlich wegen der ungemeinen Verschiedenheit der von verschiedenen Beobachtern gefundenen Resultate keine allgemeine Bedeutung.

Wir gehen nun dazu über, da leider keiner der Physiker, welche die elliptische Polarisation bei der Reflexion an Fuchsin in Luft beobachtet haben, in einer andern Richtung operirt hat, Herrn Wernicke's Beobachtungen über Absorption und absolute Phasenänderung bei der Reflexion durch die Constanten zu erklären, welche aus jenen Beobachtungen folgen. Wie schon oben erwähnt, stimmen die unter Benutzung der Wiedemann'schen Resultate berechneten Werthe nicht sonderlich mit den von H. Wernicke beobachteten, besser wirken die aus Herrn Merkel's[1]) erhaltenen. Der Grund dafür ist leicht erkennbar. Herr Merkel theilt mit, daß er mit frisch bereiteten Fuchsin-Spiegeln, Herr Wiedemann daß er mit alten operirt habe, und eine schnelle Veränderung der Oberflächenschicht ist auch anderweit bestätigt. Herr Wernicke beobachtete die Verzögerung bei der Reflexion an der Grenze von Glas oder Jodsilber gegen Fuchsin und die Absorption beim Durchgang durch eine Fuchsinschicht; selbst wenn er zwischen Herstellung und Beobachtung der Präparate längere Zeit hätte verstreichen lassen, könnte man mit Wahrscheinlichkeit annehmen, daß die oberflächliche Veränderung nicht durch die ganze Schicht bis zu der Grenze gegen Glas oder Jodsilber fortgeschritten gewesen ist, daß also die von Herrn Merkel an frischen Spiegeln erhaltenen Werthe, so gut es bei der Unsicherheit über die Zusammensetzung des Fuchsins möglich ist, auf Herrn Wernicke's Versuche anwendbar sein werden.

Zu der Vergleichung sind noch aus Herrn Merkel's Beobachtungen die Constanten n und $\varkappa$ der Theorie zu bestimmen. Nahe richtig findet sich durch Probiren für die übergeschriebenen Fraunhofer'schen Linien folgendes Werthsystem:

1) Merkel, Wied. Ann. Bd. 19. p. 1. 1883.

	$C\frac{1}{2}D$	D	$E\frac{1}{2}b$	F	$F\frac{1}{2}G$
λ	0,623	0,589	0,522	0,486	0,458
$\overline{\varphi}$	64°0′	67°0′	64°30′	60°0′	48°0′
ρ	0,092	0,170	0,396	0,536	0,507
n	2,20	2,18	1,55	0,94	0,74
$\varkappa$	0,18	0,30	0,74	1,00	0,60

Herrn Schenk's Beobachtungen würden ähnliche Werthe liefern.

Diese Zahlen ergeben den Exponenten $n\varkappa/\lambda$, welcher die Größe der Absorption für die verschiedenen Farben bestimmt:

$$\frac{n\varkappa}{\lambda} = 0{,}08 \qquad 1{,}00 \qquad 1{,}95 \qquad 1{,}93 \qquad 0{,}97.$$

Herrn Wernicke's[1]) Beobachtungen liefern für diese Größen keine absoluten Werthe, sondern nur relative; er erhielt bei drei verschiedenen Platten als dem obigen Ausdruck proportional:

—	1,94	2,52	2,03	1,29
—	0,71	1,11	0,85	0,69
—	0,57	0,99	0,88	0,51.

Der Verlauf der beobachteten, in sich übrigens auch stark differirenden Reihen ist durchaus parallel den berechneten; den Farben $E\frac{1}{2}b$ entspricht der größte Werth, den Grenzfarben des Spectrums der kleinste.

Bei schiefem Durchgang ist die Absorption statt durch $n\varkappa/\lambda$ durch $n\varkappa/\lambda\gamma_1$ gegeben. Die Beobachtungen Herrn Wernicke's über die Absorption bei 0° und 60° Einfall lassen also combinirt γ_1 berechnen, während auch die Merkel'schen Beobachtungen seine Bestimmung gestatten.

Wir erhalten aus ersteren folgende Werthe für γ_1:

—	0,915	0,827	0,813	0,714
—	0,920	0,853	0,833	0,770
—	0,933	0,884	0,848	0,717

aus letzteren:

0,923	0,925	0,902	0,804	0,665

Zwei Werthe stimmen vollkommen, einer ist zu groß, einer zu klein; das gesammte Resultat ist jedenfalls befriedigend zu nennen.

Endlich ist noch die absolute Verzögerung η_0 bei normaler Reflexion aus den obigen Zahlen n und $\varkappa$ zu berechnen und mit den Beobachtungen Herrn Wernicke's[2]) zu vergleichen.

Wir haben für diese Versuche, bei welchen die Reflexion in

1) W. Wernicke, Pogg. Ann. Bd. 159. p. 87. 1875.
2) W. Wernicke, Pogg. Ann. Bd. 159. p. 198. 1876.

Glas vom Brechungscoëfficienten 1,52 am Fuchsin geschah, folgende Formeln aus dem letzten Aufsatz[1]) anzuwenden:

$$\eta_0 = \mu_0 + \nu_0,$$

$$\operatorname{tg} \mu_0 = \frac{\varkappa}{\frac{n}{1{,}52}(1+\varkappa^2)+1}, \quad \operatorname{tg} \nu_0 = \frac{\varkappa}{\frac{n}{1{,}52}(1+\varkappa^2)-1}.$$

Hieraus folgt in Theilen von π die resp. Verzögerung:

0,08 $0{,}19_5$ 0,38 0,56 $0{,}77_5$.

Herrn Wernicke's Beobachtungen ergaben:

0,08 0,18 0,38 0,54 0,72.

Die Uebereinstimmung ist eine derart vollständige, daß an einen Zufall, trotz der Unsicherheit der Combination von Beobachtungen an verschiedenen Fuchsinpräparaten, nicht wohl gedacht werden kann.

Ich komme nun zu den Lundquist'schen[2]) Beobachtungen über die Reflexion an Fuchsin in Crownglas. Dieselben bieten zunächst das von keinem andern Beobachter gefundene Resultat, daß für die Strahlen *B* und *C* die elliptische Polarisation negativ ist und zugleich das Amplitudenverhältniß $\bar{\rho}$ einen äußerst kleinen Werth besitzt, nämlich resp. 0,0105 und 0,0070 d. h. kaum den zehnten Theil der von Herrn Wiedemann und Merkel in Luft gefundenen Zahlen, während die den andern Farben entsprechenden von derselben Ordnung sind, wie die von Jenen gefundenen. Beides muß den Argwohn erregen, daß es sich hier nicht um eine Eigenschaft des Fuchsins handelt, sondern um die Wirkung eines anderen Umstandes. Im vorigen Aufsatz habe ich die elliptische Polarisation bei der Reflexion an durchsichtigen Medien erwähnt[3]) und zu ihrer Erklärung außer auf den schon früher geltend gemachten Einfluß eines allmähligen Ueberganges von dem einen Medium in's andere, auf die Wirkung des Polirmittels aufmerksam gemacht, welches nach verschiedenen Beobachtungen[4]) die Oberfläche der polirten Körper in einer dünnen Schicht überzieht. Welchem der beiden Umstände man nun auch größeren Einfluß gewähren mag, sie führen darauf, daß an der Grenze von Crownglas und einem durchsichtigen Medium vom Brechungscoëfficienten des Fuchsins eine negative Reflexion d. h. eine Verzögerung der Componente in der Einfallsebene stattfinden muß. Wenn nun durch die Wirkung der Absorption im Fuchsin eine Beschleunigung derselben Componente eintritt, so wird diese

1) W. Voigt, l. c. p. 167.
2) G. Lundquist, Pogg. Ann. Bd. 152. p. 565. 1874.
3) W. Voigt, l. c. p. 153.
4) z. B. Conroy, Proc. Roy. Soc. Bd. 28. p. 242. 1879; Bd. 31. p. 486. 1881.

Wirkung durch die vorige vermindert und bei kleinem Werthe des Amplitudenverhältnisses auch aufgehoben werden können. Hierdurch scheint sich ungezwungen die von Herrn Lundquist beobachtete negative Reflexion und zugleich der kleine Werth von $\bar{\rho}$ zu erklären.

Für eine Berechnung nach unsern Formeln würden sich daher nur die Beobachtungen mit den mittlern Farben des Spectrums eignen, wenngleich auch bei ihnen das beobachtete $\bar{\rho}$ kleiner sein muß, als dem Fuchsin allein entsprechend. Es kömmt hier aber noch ein weiterer Umstand in Betracht, der ein sehr ausführliches Eingehen auf jene Beobachtungen nicht räthlich scheinen läßt.

Herr Lundquist beobachtete die Reflexion im Innern eines Crownglasprismas am Fuchsin. Augenscheinlich ist dabei die verschiedene Schwächung der beiden Componenten parallel und normal zur Einfallsebene beim Ein- und Austritt durch die Oberflächen des Prismas in Rechnung zu ziehen. Herr Lundquist giebt auch für die Intensitätsmessungen eine Formel an, in welcher (ohne daß dessen ausdrücklich Erwähnung geschieht) dieser Einfluß berücksichtigt ist, bei den Messungen über die elliptische Polarisation findet sich aber, wenn ich mich nicht täusche, nicht die geringste Bemerkung darüber, ob bei diesen ebenfalls die betr. Correction angebracht ist; ich bin bei der Ausführlichkeit, mit welcher sonst Nebenumstände sich erwähnt finden, daher völlig unsicher, ob die mitgetheilten Zahlen in dieser Hinsicht corrigirt sind oder nicht. Da nun die Berechnung eine äußerst langwierige Arbeit ist, so habe ich mich zunächst auf nur eine Reihe beschränkt, welche von dem fraglichen Fehler wohl weniger beeinflußt ist, als die übrigen, da bei ihr dem Polarisationswinkel ein fast genau senkrechtes Einfallen des Lichtes auf die äußeren Prismenflächen entspricht. Es ist die Reihe, welche mit Licht von der Linie F erhalten ist.

Aus den Beobachtungen über ρ und Δ folgt:

$$\bar{\varphi} = 45^{0}45' \qquad \bar{\rho} = 0{,}32,$$

dem entspricht nahezu:

$$n = 0{,}873 \qquad \varkappa = 0{,}34.$$

Die Berechnung und Zusammenstellung der Resultate mit den Beobachtungen, welche außer Δ und ρ für gewisse Einfallswinkel auch $\mathfrak{R}_p^2 = J_p$ liefern, giebt folgendes Werthsystem:

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1
35°	4° 59′	122° 28′	14° 21′	80° 11′	0,797
37	4 18	129 51	14 57	78 9	0,780
39	3 43	139 15	15 35	76 3	0,753
42	2 22	154 13	16 30	72 16	0,720
44	1 28	165 5	17 8	69 35	0,698
45	1 1	170 15	17 27	68 11	0,687
45 30′	0 46	172 46	17 36	67 28	0,682
46	0 32	175 9	17 45	66 45	0,678
47	0 2	179 40	18 3	65 15	0.665
48	— 0 28	183 45	18 20	63 43	0,655
50	— 1 31	190 41	18 56	59 32	0,634
53	— 3 17	198 56	19 34	55 40	0,602
55	— 4 18	201 22	19 43	52 14	0,586
56	— 4 48	202 50	19 51	50 31	0,575
60	— 7 23	207 34	19 51	43 41	0,542
66	—10 54	209 11	18 31	33 25	0,501
80	—18 49	207 22	9 55	12 22	0,444

φ	Δ ber.	Δ beob.	Diff.
35°	0,183	0,179	+ 0,004
37	0,228	—	—
39	0,284	0,283	+ 0,001
42	0,377	0,381	— 0,004
44	$0,443_5$	$0,445_5$	— 0,002
45	0,476	0,474	+ 0,002
45 35′	$0,491_5$	$0,492_5$	— 0,001
46	0,506	0,507	— 0,001
47	0,536	$0,537_5$	— $0,001_5$
48	0,562	0,565	— 0,003
50	$0,611_5$	0,614	— $0,002_5$
53	0,669	0,677	— 0,008
55	0,695	—	—
56	0,709	0,719	— 0,010
60	0,759	0,765	— 0,006
66	0,816	—	—
80	0,924	—	—

φ	$\mathfrak{R}_s$	$\mathfrak{R}_p$	ρ ber.	ρ beob.	Diff.	J_p ber.	J_p beob.	Diff.
35°	0,103	$0,251_5$	0,409	0,402	+ 0,007	0,063	—	—
37	$0,097_7$	$0,263_5$	0,371	—	—	0,069	0,057	+ 0,012
39	$0,095_2$	0,277	0,344	0,336	+ 0,008	$0,076_5$	—	—
42	$0,094_9$	0,298	0,318	0,316	+ 0,002	0,089	0,087	+ 0,002
44	$0,099_4$	$0,314_5$	0,316	0,312	+ 0,004	0,099	—	—
45	$0,104_2$	0,323	0,323	0,317	+ 0,006	0,104	0,107	— 0,003
45 30′	0,107	$0,327_5$	0,327	0,318	+ 0,009	0,107	—	—
46	$0,109_7$	0,332	0,331	0,327	+ 0,004	0,110	—	—
47	$0,116_4$	0,341	0,341	0,337	+ 0,004	$0,116_5$	0,131	— $0,014_5$
48	$0,124_2$	0,351	0,354	0,349	+ 0,005	0,123	—	—
50	0,147	$0,376_5$	$0,378_5$	0,372	+ $0,006_5$	0,142	0,152	— 0,010
53	$0,176_5$	$0,405_5$	0,435	0,424	+ 0,011	0,164	—	—
55	$0,205_5$	0,427	0,482	—	—	0,191	0,205	— 0,014
56	$0,215_5$	0,440	$0,489_5$	0,489	+ $0,000_5$	0,194	—	—
60	$0,277_5$	$0,491_5$	$0,564_5$	0,544	+ $0,020_5$	$0,241_5$	—	—
66	0,388	0,577	0,672	—	—	0,334	0,385	— 0,051
80	0,702	$0,804_4$	0,873	—	—	0,647	0,692	— 0,045.

Die Uebereinstimmung ist mit Ausnahme der letzten Werthe J_p, die wohl deshalb unsicher sind, weil bei so großen Einfallswinkeln sich die Intensität schnell ändert, durchaus gut, fast besser noch als diejenige, welche Herr Lundquist bei Berechnung seiner Beobachtungen nach der Cauchy'schen Formel erhalten hat. Daß sie vielleicht nicht so vollkommen ist, wie bei den Beobachtungen in Luft, erklärt sich wohl durch die oben erörterten Umstände zur Genüge. Das durchweg positive Vorzeichen der Differenz bei ρ zeigt übrigens, daß das für die Berechnung gewählte $\varkappa = 0,34$ ein wenig zu groß ist.

Sämmtliche berechnete Beobachtungsreihen über die bei der Reflexion an Fuchsin auftretende elliptische Polarisation, über die reflectirte Intensität, über die absolute Phasenänderung sowie über die Absorption bei normalem und schiefem Durchgang zeigen eine vollständige Uebereinstimmung mit der entwickelten Theorie absorbirender Medien.

Göttingen, Juni 1884.

Ueber die Bestimmung der Brechungsindices absorbirender Medien.

Von

W. Voigt.

Die experimentelle Bestimmung der Brechungscoëfficienten absorbirender Medien ist ein vielfach behandeltes und interessantes Problem. Nachdem ich in zwei Aufsätzen [1]) eine Theorie der Absorptionserscheinungen isotroper Medien gegeben habe, welche einerseits streng auf mechanischer Grundlage entwickelt ist[2]) unter Benutzung von fundamentalen Hypothesen, die sich mit einer gewissen Nothwendigkeit aufdrängen, und welche andererseits in ihren Resultaten so vollständig mit den Beobachtungen übereinstimmt, daß man sie sowohl begründet als bestätigt nennen kann, scheint es an der Zeit, die gebräuchlichsten Methoden die Brechungscoëfficienten absorbirender Medien zu bestimmen einmal mit der Theorie zu vergleichen. Den äußeren Anlaß zu dieser Betrachtung giebt mir die soeben er-

---

1) W. Voigt, Nachr. v. d. K. G. d. W. zu Göttingen, 1884, No. 6, p. 137 und No. 7 p. 261.

2) Die Einwände welche Herr E. Ketteler (Wied. Ann. Bd. 22 p. 217. 1884) dagegen erhoben hat, beruhen sämmtlich auf leicht erkennbaren Irrthümern.

schienene Abhandlung von Herrn G. Sieben[1]) »Ueber die Abhängigkeit der Brechungsexponenten anomal dispergirender Medien etc.« in welcher unter Anderem versucht ist, den Beweis zu führen, daß, entgegen Herrn v. Lang's[2]) Behauptung, für stark absorbirende Medien ebensowohl die Prismenmethode als die Methode der totalen Reflexion anwendbar sei. —

Vor allen Dingen ist festzusetzen, was wir unter dem Brechungscoëfficienten verstehen wollen. Bei zwei vollkommen durchsichtigen Körpern definirt man ihn als das Verhältniß der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener Wellen in beiden Medien und meint wohl vielfach, daß dies eine unzweideutige Definition sei. Dem ist aber nicht so, denn diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist keine für dasselbe Medium constante Größe. Einmal kommen bei der totalen Reflexion im dünnern Medium eben Wellen vor, die sich parallel der Grenze mit einer Geschwindigkeit fortpflanzen, die vom Einfallswinkel abhängt, und andererseits werden wir im Folgenden (s. p. 291) Fälle kennen lernen, wo unter andern Umständen ebenfalls variirende Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener Wellen auftreten. Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle unzweideutig zu bestimmen ist noch eine Festsetzung über die Amplituden in der Wellenfläche hinzuzufügen. Bei der obigen Definition macht man stillschweigend diejenige ganz specielle Annahme darüber, welche im Folgenden ausdrücklich hervorgehoben ist.

Wir nennen Brechungsverhältniß eines Körpers (1) gegen einen Körper (2) das Verhältniß derjenigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche in den Körpern (2) und (1) ebene Wellen mit in ihrer ganzen Ausdehnung gleicher Schwingungsamplitude besitzen.

Wenn bei durchsichtigen Körpern diese Annahme bisher immer stillschweigend als selbstverständlich gemacht ist, so ist nicht recht begreiflich, warum eine Anzahl Physiker sie beim Uebergang zu absorbirenden Medien stillschweigend fallen lassen, und bei jenen von nach Umständen wechselnden Brechungsverhältnissen sprechen. Aber die Consequenz verlangt, daß wir diese Definition, wie bei durchsichtigen, so auch bei absorbirenden Medien den völlig gleichen Umständen entsprechend auch in gleicher Weise beibehalten[3]). Dement-

1) G. Sieben, XIII. Ber. der Oberhess. Ges. für Natur- und Heilkunde, p. 140, 1884.

2) V. Lang, Ber. d. Wien. Ak. d. Wiss. Bd. 84 (II) p. 361, 1881.

3) Die zahlreichen Bestimmungen von Brechungsverhältnissen haben ja auch nur einen Sinn, wenn man diese Größe eindeutig definirt.

sprechend habe ich in meiner Theorie der absorbirenden Medien auch die Festsetzungen getroffen [1]).

Was nun die verschiedenen Methoden der Bestimmung des Brechungsindex betrifft, so ist für die meisten die Theorie bereits in meinem ersten bezüglichen Aufsatz [2]) vollständig enthalten; ich kann mich also in Betreff ihrer kurz fassen.

Die Methode der totalen Reflexion an durchsichtigen Medien knüpft daran an, daß bei der Reflexion an einem dünneren Medium die Intensität mit wachsendem Einfallswinkel sich unendlich schnell ändert, wenn man den Einfallswinkel $\varphi = \arcsin(n_1/n)$ passirt. Die Formeln für die Reflexion a absorbirenden Medien geben nichts dergleichen; an Stelle der unendlich schnellen Aenderung der Intensität tritt ein Maximum der Intensitätsänderung für einen bestimmten Einfallswinkel, welches auffällig ist, wenn die Absorption nur gering ist, das aber um so mehr verschwindet, je mehr dieselbe wächst. Darum hat z. B. Herr Sieben (l. c. p. 172) bei totaler Reflexion an einer Cyaninlösung für die am stärksten absorbirten Farben keine sog. Grenze der totalen Reflexion beobachten können.

Aber die Beobachtung jener Stelle stärkster Intensitätsänderung darf nicht ohne Weiteres unter Anwendung der Formel für den ihr entsprechenden Einfallswinkel:

$$\sin\varphi = n_1/n$$

zur Bestimmung des Brechungsindex benutzt werden, denn sie ist gar nicht durch diese Gleichung definirt, sondern entspricht einem ganz andern Einfallswinkel.

Um die merkwürdige Wirkung der Absorption auf den Vorgang der sogenannten totalen Reflexion recht anschaulich zu zeigen, habe ich auf der beiliegenden Tafel I den Verlauf der Amplituden [3]) des reflectirten Lichtes graphisch dargestellt; in Figur 1. wenn parallel der Einfallebene polarisirtes Licht einfällt ($\mathfrak{R}_p$), in Fig. 2. wenn senkrecht polarisirtes ($\mathfrak{R}_s$), in Figur 3. die reflectirte Intensität wenn natürliches Licht einfällt $\left(J_r = \frac{\mathfrak{R}_s^2 + \mathfrak{R}_p^2}{2}\right)$. Die Curven beziehen sich auf absorbirende Medien, welche den Brechungscoefficienten 0,8 gegen das umgebende durchsichtige und die Absorptionsconstante $\varkappa$ resp. gleich 0, 0,02, 0,05 und 0,10 besitzen. Die

1) W. Voigt, Nachr. v. d. K. G. d. W. zu Göttingen, 1884, No. 6, p. 144

2) W. Voigt, l. c. p. 137.

3) Die Figuren stellen die absoluten Werthe der reflectirten Amplituden dar.

Curven sind nur soweit gezeichnet, als sie sich deutlich sondern. Man erkennt, wie die scharfe Ecke, welche bei durchsichtigen Medien den Beginn der totalen Reflexion bezeichnet mit wachsender Absorption verschwindet und anscheinend die Stelle schnellster Aenderung der Intensität zugleich nach höheren Winkelwerthen hinrückt. In Fig. 4 sind dieselben Curven für die Reflexion von Licht der Linie F an Fuchsin in Crownglas dargestellt[1]), entsprechend $n = 0{,}873$, $\varkappa = 0{,}34$. Sie zeigen ein Maximum der Intensitätsänderung bei einem Einfallswinkel von 90 Graden.

Die Methode der totalen Reflexion unter Zugrundelegung der Formel $n_1/n = \sin\varphi$ ist also zur exacten Bestimmung von Brechungscoëfficienten absorbirender Medien nicht wohl anzuwenden. Die dadurch erhaltenen Werthe werden nahe richtig sein, wenn die Absorption gering und demzufolge die sog. Grenze der totalen Reflexion scharf ist, sie werden um so mehr zu groß ausfallen, je stärker die Absorption ist, während gleichzeitig die Grenze an Schärfe verliert. Der letztere Umstand zusammen mit der höchst complicirten theoretischen Definition der beobachteten Grenze läßt auch eine exacte Ausarbeitung der Methode für absorbirende Medien kaum möglich erscheinen.

Größer noch sind die Fehler, welche man begeht, wenn man den beobachteten Polarisationswinkel $\bar{\varphi}$, welcher einer gegenseitigen Verzögerung der reflectirten Componenten um $\pi/2$ entspricht, unter willkürlicher Uebertragung des für durchsichtige Medien gültigen Brewster-schen Gesetzes $tg\,\varphi = n_1/n$ zur Bestimmung des Brechungsindex benutzt. Für Silber gegen Luft giebt sich hierbei z. B. der Werth 3,6, während er in Wirklichkeit etwa 0,23 ist. Es läßt sich zwar aus dem Polarisationswinkel $\bar{\varphi}$ zusammen mit dem Hauptamplitudenverhältniß $\bar{\rho}$ nach den früher mitgetheilten Formeln[2]) sowohl der Brechungsindex als die Absorptionsconstante des Mediums berechnen und somit in allen Fällen das gestellte Problem exact lösen, aber die Methode ist sehr umständlich und die Beobachtung schwierig, sodaß man immer nach einem bequemeren Verfahren suchen wird.

Die, so viel ich weiß, nur von Herrn Wernicke[3]) angewandte Methode, durch Beobachtung der Absorption bei normalem und schiefem Durchgang des Lichts durch eine planparallele Schicht Brechungs- und Absorptionsconstanten zugleich zu bestimmen, ist in der von Herrn Wernicke selbst benutzten Art der Berechnung im Wider-

---

1) Gemäß den im vorigen Aufsatz berechneten Beobachtungen von Lundquist.

2) W. Voigt, Nachr. v. d. K. G. d. W. zu Göttingen, 1884, No. 6, p. 151—2.

3) W. Wernicke, Pogg. Ann. Bd. 155, p. 87, 1825: Ergsbd. 8, p. 75, 1878.

spruch mit der Theorie; die von mir angegebenen Formeln gestatten zwar eine Verwendung derartiger Beobachtungen zur Bestimmung beider Größen, aber die Methode ist dann ebenso umständlich und an sich ebenso schwierig, wie die vorige.

Auch die Prismenmethode, welche bei durchsichtigen Medien die genausten Resultate giebt, darf, wie sich zeigen wird, im Allgemeinen nicht unter Benutzung der gebräuchlichen Formeln dafür auf absorbirende Medien angewandt werden.

Herrn Siebens Beweis für das Gegentheil ist nicht befriedigend. Denn die Beobachtung, daß für die wenig absorbirten Farben die Prismenmethode mit derjenigen der totalen Reflexion nahe gleiche Resultate giebt, gestattet einerseits keine Schlüsse auf das Verhalten der stärker absorbirten Farben, andererseits fehlt der Beweis, daß die Methode der totalen Reflexion selbst einwurfsfrei ist.

Da die Theorie der Prismenmethode für absorbirende Medien noch nicht geliefert ist, so werde ich sie im Folgenden mittheilen und aus ihr die Consequenzen für die Beobachtung ziehen.

Diesem Problem schicke ich die Lösung einer Hülfsaufgabe voraus.

In einem absorbirenden isotropen Medium sei die XY-Ebene künstlich in einer Bewegung nach dem Gesetze:

$$\left.\begin{aligned}(u)_0 &= \mathrm{A}e^{-\frac{\delta x}{\tau\omega}}\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{ax}{\omega}+\vartheta_x\right)\\(v)_0 &= \mathrm{B}e^{-\frac{\delta x}{\tau\omega}}\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{ax}{\omega}+\vartheta_y\right)\\(w)_0 &= \Gamma e^{-\frac{\delta x}{\tau\omega}}\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{ax}{\omega}+\vartheta_z\right)\end{aligned}\right| \quad 1.$$

erhalten; es ist die Fortpflanzung dieser Oscillation nach der Seite der positiven z-Axe zu bestimmen.

Wir betrachten nur die U-Componente.

Die Differentialgleichung, der wir zu genügen haben, ist [1]):

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \Big| \; 2.$$

Sie wird in Uebereinstimmung mit der Nebenbedingung integrirt durch:

1) W. Voigt, l. c. p. 143. In die dortige Gleichung ist bereits die Specialisirung $b = 0$ gemäß p. 152 eingeführt.

$$u = A e^{-\frac{\beta z + \delta x}{\tau \omega}} \sin \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} + \vartheta_x\right) \qquad 3.$$

falls gilt:

$$\begin{aligned} M\omega^2 &= A(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) + 2c_1(\alpha\delta + \gamma\beta) \\ o &= 2A(\alpha\delta + \gamma\beta) - c_1(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2), \end{aligned} \qquad 4.$$

worin kurz $\frac{c}{\tau} = c_1$ gesetzt ist.

Hierin sind die drei Größen ω, β, γ unbestimmt, es ist also über eine von ihnen noch willkürlich zu verfügen. Wir nehmen daher für ω die Definition an, welche durch die Betrachtung der Fortpflanzung einer ebenen Welle mit überall gleichen Amplituden erhalten war [1]), nämlich

$$\begin{aligned} M\omega^2 &= A(1 - \varkappa^2) + 2\varkappa c_1 \\ o &= 2A\varkappa - c_1(1 - \varkappa^2), \end{aligned} \qquad 5.$$

wo aus diesen Gleichungen $\varkappa$ (die Absorptionsconstante) zu eliminiren ist. Die Differenz der beiden Gleichungen (4) und (5) führt auf:

$$\begin{aligned} 1 - \varkappa^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - \delta^2 - \beta^2 \\ \varkappa &= \alpha\delta + \beta\gamma, \end{aligned} \qquad 6.$$

welche die beiden einzigen noch verfügbaren Größen β und γ durch α, δ und $\varkappa$ und wegen (5) durch A und c_1 bestimmen.

Es folgt:

$$\begin{aligned} 2\beta^2 &= \sqrt{4(\varkappa - \alpha\delta)^2 + (1 + \delta^2 - \varkappa^2 - \alpha^2)^2} - (1 + \delta^2 - \varkappa^2 - \alpha^2) \\ 2\gamma^2 &= \sqrt{4(\varkappa - \alpha\delta)^2 + (1 + \delta^2 - \varkappa^2 - \alpha^2)^2} + (1 + \delta^2 - \varkappa^2 - \alpha^2). \end{aligned} \qquad 7.$$

Das Einsetzen dieser Werthe in (3) giebt die gesuchte Lösung u; analoge Ausdrücke folgen für v und w. Gilt der Aether als incompressibel, so müssen die Größen A, Γ, ϑ_x und ϑ_y noch einer Bedingung genügen, die für unser Problem zu discutiren nicht nöthig ist.

Was den Inhalt des Resultates anbetrifft, so sei nur darauf hingewiesen, daß die fortgepflanzte Oscillation in den Ebenen

$$\alpha x + \gamma z = \text{Const.}$$

gleiche Phase, in den Ebenen

$$\delta x + \beta z = \text{Const.}$$

gleiche Amplitude besitzt. Da nach Gleichung (6_2)

$$\alpha\delta + \beta\gamma = \varkappa$$

1) W. Voigt, l. c. p. 142.

ist, so ist der Winkel zwischen den beiden Ebenenschaaren um so mehr von $\pi/2$ verschieden, je größer die Absorption des Mediums d. h. $\varkappa$ ist.

Das Resultat dieser Hülfsaufgabe ist nun bei dem eigentlich gestellten Problem des Durchganges durch ein Prisma einer absorbirenden Substanz zwei Mal in Anwendung zu bringen. Die zweite Grenzfläche des Prismas wird nämlich durch die von der ersten herkommenden Wellen in ebensolche Oscillationen versetzt, wie sie das Hülfsproblem in der XY-Ebene annimmt[1]).

Alle Größen, die sich auf das absorbirende Medium beziehen, sollen, wie früher, durch den untern Index $_1$ ausgezeichnet werden, während die auf das umgebende durchsichtige bezüglichen ohne einen solchen bleiben. Ferner sollen Werthe, die für die zweite Grenzfläche gelten, den obern Index $'$ erhalten, die für die erste geltenden nicht.

Legt man die Y-Axe in die brechende Kante des Prismas, rechnet in der ersten Fläche die X-Axe positiv nach der brechenden Kante hin, in der zweiten die X'-Axe von derselben hinweg, die Z- und Z'-Axe positiv in der Richtung der einfallenden Lichtbewegung und bezeichnet mit χ den brechenden Winkel des Prismas, so ist für einen Punkt p der zweiten Fläche mit der X'-Coordinate x':

$$x_p = -x' \cos\chi, \quad z_p = +x' \sin\chi.$$

Nach dem früher behandelten Problem[2]) ist demnach die auf die zweite Grenze auffallende Verrückung:

$$u_p = A_1 e^{-\frac{\beta_1 x' \sin\chi}{\tau\omega_1}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{x'(\gamma_1 \sin\chi - \alpha_1 \cos\chi)}{\omega_1} + \vartheta_x\right)$$

oder auch:

$$= A_1 e^{-\frac{\delta_1' x'}{\tau\omega_1}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{x' \alpha_1'}{\omega_1} + \vartheta_x\right) \quad \Bigg| \quad 8.$$

wenn man setzt:

---

1) Allerdings erstreckt sie sich nur von $x = 0$ bis $x = \infty$, nicht wie im Hülfsproblem von $-\infty$ bis $+\infty$. Indessen können wir, entsprechend der Erfahrungsthatsache, daß eine ebene Welle bei beliebiger Begrenzung sich nicht anders verhält als eine unbegrenzte, so lange nur ihre Dimensionen groß gegen die Wellenlänge sind, auf die halbe unendliche Ebene dieselbe Betrachtung anwenden, wie auf die volle.

2) W. Voigt, l. c. p. 143.

$$\beta_1 \sin\chi = \delta'_1, \quad \beta_1 \sin\chi - \alpha_1 \cos\chi = \alpha'_1, \qquad | \; 9.$$

also vollständig mit (1) übereinstimmend; ebenso v_p und w_p.

In diesen Ausdrücken ist ω_1 gegeben durch

$$\begin{aligned} M\omega_1^2 &= A_1(1-\varkappa^2) + 2\varkappa c_1 \\ o &= 2A_1\varkappa - c_1(1-\varkappa^2), \end{aligned} \qquad | \; 10.$$

worin A_1 und c_1 Constanten des absorbirenden Mediums sind. Ferner folgt α_1 aus α, dem sinus des Einfallswinkels an der ersten Prismenfläche, nach dem Brechungsgesetz:

$$\alpha/\alpha_1 = \omega/\omega_1 = n, \qquad | \; 11.$$

worin n das Brechungsverhältniß des absorbirenden Mediums gegen das durchsichtige ist; endlich giebt sich β_1 und γ_1 nach den Formeln:

$$\begin{aligned} 2\gamma_1^2 &= \sqrt{4\varkappa^2 + (1-\alpha_1^2-\varkappa^2)^2} + (1-\alpha_1^2-\varkappa^2) \\ 2\beta_1^2 &= \sqrt{4\varkappa^2 + (1-\alpha_1^2-\varkappa^2)^2} - (1-\alpha_1^2-\varkappa^2). \end{aligned} \qquad | \; 12.$$

Die auf die 2. Grenzfläche auffallende Oscillation (8) erregt nun eine in das absorbirende Medium zurückgehende und eine in das umgebende durchsichtige fortschreitende Welle.

Beide lassen sich bis auf die Amplituden und die absoluten Verzögerungen aus dem Hülfsproblem bestimmen.

Die erstere wird genau durch den Ausdruck (3) in Verbindung mit (4) — (7) dargestellt, wenn man die beiden Indices $'_1$ an allen Größen anbringt und außerdem, entsprechend der Fortpflanzung nach der Seite $-z'$, noch β und γ mit $-\beta$ und $-\gamma$ vertauscht.

Die letztere ergiebt sich aus denselben Gleichungen (3) bis (7) durch Anbringen des Index $'$ und Nullsetzen von c, also auch $\varkappa$, entsprechend der Annahme verschwindender Absorption im umgebenden Medium.

Um das Problem vollständig zu lösen wäre nur noch die Bestimmung der Amplituden und absoluten Verzögerungen nöthig, was durch Einsetzen der 3 Gattungen von Lösungen (für die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle) in die Gleichungen der Continuität, der Incompressibilität und des Kirchhoff'schen Princips geschieht. Da unser Problem aber nur auf die Bestimmung der Richtung der austretenden Wellen lautet, so können wir davon absehen und uns mit der Discussion derjenigen Gleichungen für dieselben begnügen, die wir bereits abgeleitet haben.

Nach dem oben Gesagten ist für die austretende Welle nach (3):

$$u' = A' e^{-\frac{\beta' z' + \delta' x'}{\tau\omega}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha' x' + \gamma' z'}{\omega} + \vartheta_a\right) \qquad | \; 13.$$

ebenso v' und w'; dabei aus (5) und (6)

$$\left.\begin{array}{c} M\omega^2 = A, \\ 1 = \alpha'^2 + \gamma'^2 - \beta'^2 - \delta'^2, \; 0 = \alpha'\delta' + \beta'\gamma', \end{array}\right| 14.$$

also

$$\left.\begin{array}{l} 2\beta'^2 = \sqrt{4\alpha'^2\delta'^2 + (1 + \delta'^2 - \alpha'^2)^2} - (1 + \delta'^2 - \alpha'^2) \\ 2\gamma'^2 = \sqrt{4\alpha'^2\delta'^2 + (1 + \delta'^2 - \alpha'^2)^2} + (1 + \delta'^2 - \alpha'^2). \end{array}\right| 15.$$

Zugleich ist α' und δ' gegeben durch

$$\alpha'/\omega = \alpha_1'/\omega_1, \; \delta'/\omega = \delta_1'/\omega_1$$

also:

$$\alpha' = n\alpha_1', \; \delta' = n\delta_1'. \quad |16.$$

Wir erhalten sonach[1]) beim Austritt des Lichtes aus dem absorbirenden Prisma ebene Wellen, da in den Ebenen

$$\alpha'x' + \gamma'z' = \text{Const.}$$

die Phase constant ist. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist $\omega'/\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}$, also, wie bereits oben bemerkt, von der Richtung abhängig. Die Richtungscosinus der Wellennormale gegen die X'- und Z'-Axe sind $\alpha'/\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}$ und $\gamma'/\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}$. Sie bestimmen die Richtung, in welcher man mit einem Fernrohr beobachtend ein Bild der unendlich fernen Lichtquelle wahrnimmt. Nennt man den Winkel dieser Richtung mit der Z'-Axe φ', so ist:

$$\sin\varphi' = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2}}.$$

Die Ebenen gleicher Amplitude

$$\delta'x' + \beta'z' = \text{Const.}$$

stehen hier senkrecht auf denen gleicher Phase wegen

$$\alpha'\delta' + \beta'\gamma' = 0.$$

Man kann sich also die Fortpflanzung des Lichtes nach dem Austritt aus dem Prisma statt durch Wellenebenen auch durch parallele Strahlen stattfindend denken, welche untereinander verschiedene Amplituden haben, aber ihre eignen dauernd beibehalten. Sie machen mit dem Lothe auf der 2. Prismenfläche den Winkel φ'.

Um die Uebersicht zu erleichtern, stelle ich nunmehr aus dem Obigen zusammen, auf welche Weise sich bei einem Prisma aus absorbirender Substanz der beobachtbare Ablenkungswinkel η bestimmt.

Gegeben ist der brechende Winkel χ des Prismas, die Absorptionsconstante $\varkappa$ des absorbirenden Mediums und sein Brechungscoëf-

1) Im Widerspruch mit Herrn Eisenlohrs bezüglicher Bemerkung (Wied. Ann. Bd. 1 p. 204, 1877).

ficient n gegen das umgebende durchsichtige Medium (Luft), endlich der Einfallswinkel φ der auffallenden Wellennormale.

Aus $$\alpha = \sin\varphi,\quad \gamma = \cos\varphi$$
bestimmt sich dann α_1, β_1, γ_1 durch:

$$\alpha_1 = \alpha/n$$
$$2\beta_1^2 = \sqrt{4\varkappa^2 + (1-\alpha_1^2-\varkappa^2)^2} - (1-\alpha_1^2-\varkappa^2)$$
$$2\gamma_1^2 = \sqrt{4\varkappa^2 + (1-\alpha_1^2-\varkappa^2)^2} + (1-\alpha_1^2-\varkappa^2);$$

hieraus α_1' und δ_1' gemäß:

$$\alpha_1' = \gamma_1 \sin\chi - \alpha_1 \cos\chi,\quad \delta_1' = \beta_1 \sin\chi.$$

Aus ihnen folgt α', γ', δ' nach:

$$\alpha' = n\alpha_1',\quad \delta' = n\delta_1'$$
$$2\gamma'^2 = \sqrt{4\alpha'^2\delta'^2 + (1+\delta'^2-\alpha'^2)^2} + (1+\delta'^2-\alpha'^2)$$

und hieraus endlich:

$$\sin\varphi' = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2+\gamma'^2}}.$$

Die gesammte eintretende Ablenkung ist:

$$\eta = \varphi + \varphi' - \chi.$$

Diese Zusammenstellung zeigt, daß es keineswegs richtig ist, die Brechung in absorbirenden Prismen nach denselben Formeln zu berechnen, wie in durchsichtigen. Angenährt gültig sind sie bei sehr geringer Absorption, nämlich wenn man in den vorstehenden Formeln

$$4\varkappa^2 \text{ neben } (1-\alpha_1^2)^2$$

also auch $\varkappa^2$ neben $1-\alpha_1^2$ vernachlässigen kann. Dann ist nämlich

$$\gamma_1^2 = 1-\alpha_1^2,\quad \beta_1^2 = 0,\ \text{also}\ \alpha_1 = \sin\varphi_1,\ \gamma_1 = \cos\varphi_1$$

zu setzen erlaubt; es wird ferner

$$\alpha_1' = \sin(\chi-\varphi_1) = \sin\varphi_1',\quad \delta_1' = \delta' = 0$$

und schließlich $\gamma'^2 = 1-\alpha'^2$, also

$$\sin\varphi' = \alpha',$$

was Alles die gewöhnlichen Formeln sind. Ist diese Vernachlässigung nach der Genauigkeit der Beobachtungen nicht erlaubt, so ist auch die Anwendung der gewöhnlichen Methode n zu berechnen unrichtig, man muß dann vielmehr die Absorptionsconstante $\varkappa$ bestimmen und mit ihr die vorstehenden strengen Formeln benutzen. Dabei wird es am klügsten sein, da die Methode des Mini-

mums der Ablenkung bei einem absorbirenden Prisma wegen der mangelnden Symmetrie des Vorganges keine einfachen Gesetze liefern wird, — normalen Einfall des Lichtes auf die erste Fläche zu benutzen, was stets möglich ist, da die Prismen aus stark gefärbtem Substanzen nur mäßige brechende Winkel besitzen dürfen.

Dann vereinfachen sich die Formeln erheblich. Es wird successive wegen $\alpha = 0$:

$$\alpha_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \beta_1 = \varkappa,$$

$$\alpha_1' = \sin\chi, \quad \delta_1' = \varkappa \sin\chi,$$

ferner

$$\alpha' = n \sin\chi, \quad \delta' = n\varkappa \sin\chi,$$

$$2\gamma'^2 = (1 - n^2(1-\varkappa^2)\sin^2\chi) + \sqrt{4n^4\varkappa^2\sin^4\chi + (1 - n^2(1-\varkappa^2)\sin^2\chi)^2}$$

also:

$$\sin\varphi' = \frac{\sqrt{2}\, n \sin\chi}{\sqrt{1 + n^2(1+\varkappa^2)\sin^2\chi + \sqrt{4n^4\varkappa^2\sin^4\chi + (1 - n^2(1-\varkappa^2)\sin^2\chi)^2}}}.$$

oder kurz:

$$\sin\varphi' = \frac{n}{r}\sin\chi.$$

Da $\varphi' = \eta + \chi$ ist, so berechnet sich hieraus bei bekanntem $\varkappa$ der Brechungscoëfficient n, und zwar am bequemsten indem man in dem Ausdruck für r den aus der Annäherung $\sin\varphi' = n\sin\chi$ folgenden Nährungswerth für n einführt.

Dabei ist zu bedenken, daß die Beobachtung der Absorptionserscheinungen auf die Kenntniß von $n.\varkappa$ aber nicht von $\varkappa$ allein führt; $e^{-\frac{2\pi n\varkappa}{\lambda}}$ ist nämlich der Bruchtheil des einfallenden Lichtes von der Wellenlänge λ in Luft, welcher eine Schicht des absorbirenden Mediums von der Dicke 1 senkrecht durchdringt.

Hiernach ist in jedem Fall mit Strenge angebbar, bis zu welchem Grad der Genauigkeit man sich auf die Benutzung der alten angenährten Formel beschränken darf. Diese Genauigkeit wird besonders groß, wenn man, wie sich das bei stark absorbirenden Substanzen von selbst gebietet, mit Prismen von kleinem brechenden Winkel χ operirt. Vernachlässigt man $4n^4\varkappa^2\sin^4\chi$ neben 1, so ist

$$r = 1 + \frac{n^2\varkappa^2}{2}\sin^2\chi,$$

kann man hingegen schon $\frac{n^2\varkappa^2}{2}\sin^2\chi$ neben 1 fortlassen, so gilt die alte Formel für durchsichtige Medien:

$$\sin\varphi' = n \sin\chi.$$

Aller Wahrscheinlichkeit nach läßt sich innerhalb derselben Grenze der Genauigkeit dann auch die Methode des Minimums der Ablenkung in Anwendung bringen.

Die Methode der Prismen zur Bestimmung von Brechungscoëfficienten hat also vor allen übrigen den Vorzug einfacher und doch strenger Behandlung voraus und wird daher, soweit die Größe der Absorption sie anwendbar bleiben läßt, den anderen vorzuziehen sein. In Fällen, wo sie versagt, dürfte sich am meisten die Beobachtung des Polarisationswinkels $\bar{\varphi}$ und des zugehörigen Amplitudenverhältnisses $\bar{\rho}$ unter Zugrundelegung der neuen strengen Formeln empfehlen. Die Methode der totalen Reflexion erscheint bei absorbirenden Medien theoretisch mindestens bedenklich und wird daher nur am Platze sein wo es nicht auf die größtmögliche Genauigkeit ankommt.

Beiträge zur Kenntniß des Stützgewebes der Retina.

Von

P. Schiefferdecker.

Seit einer Reihe von Jahren habe ich mich mit der Untersuchung des Stützgewebes der Retina in den verschiedenen Klassen der Wirbelthiere beschäftigt. Mein Hauptaugenmerk habe ich dabei auf die radialen Stützfasern und die tangentialen Fulcrumzellen (Wilh. Müller) gerichtet. Die Methode der Untersuchung welche ich anwandte, bestand im Wesentlichen darin, die einzelnen Elemente der Stützsubstanz auf das Sorgfältigste zu isoliren. Ich benutzte hierzu zunächst dieselbe Methode, welche ich früher für Isolirung der Elemente des Centralnervensystems empfohlen hatte: Einlegen in Ranvier'schen Alkohol, Schütteln in Wasser, Zusatz von Glycerin und concentrirter Lösung von picrocarminsaurem Natron zu der geschüttelten Flüssigkeit in einem Uhrschälchen und Eindicken derselben in einem Schwefelsäuretrockenapparat. Bald darauf aber wandte ich statt des Ranvier'schen Alkohols eine Mischung an, welche ich als Methylmixtur bezeichnen möchte, welche ich durch vielfaches Probiren herausfand und welche bestand aus

Aqu. dest.	20	Vol. Th.
Glycerin	10	„ „
Methylalcohol	1	„ „

Mit dieser erzielte ich ausgezeichnete Resultate. Wie lange

man eine Retina in dieser Flüssigkeit liegen lassen muß, kann man leider im Allgemeinen nicht sagen, es ist das nach den Thiergattungen und wohl auch nach dem Alter verschieden, durchschnittlich jedoch mehrere Tage. Bei vielen Thieren habe ich lange herumprobirt bis ich die richtige Zeit herausfand. Dieser Umstand und die fernere Schwierigkeit manche der zu findenden Dinge zu sehen und sie genau von anderen ähnlichen zu unterscheiden, erschwerte die Untersuchung ungemein und ist der Grund, warum ich in der langen darauf verwandten Zeit doch nicht mehr Thierarten untersuchen konnte als ich untersucht habe. Da es indessen immerhin Thiere aller Klassen sind, so will ich jetzt schon die wesentlichen Resultate hier mittheilen.

Daß außer den Isolationspraeparaten noch Querschnitte und Flächenschnitte der Retina zu Hülfe genommen wurden, ist ja selbstverständlich.

Resultate:

1) Die Stützsubstanz der Retina läßt zwei Hauptsysteme von größeren Zellen erkennen, eines welches die Retina der Dicke nach durchzieht: die radialen Fulcrumzellen, eines, welches sie der Fläche nach durchzieht, die tangentialen Fulcrumzellen.

2) Beide Zellarten liegen mit ihrem protoplasmatischen kerntragenden Theil (soweit sie kernhaltig sind) in der inneren Körnerschichte.

3) Die radialen Fulcrumzellen ziehen bei allen Thieren durch die Retina hindurch von der Limitans interna bis zur externa, haben eine mehr oder weniger stark ausgesprochene Faserform mit dem Bestreben der Enden in feinere Fasern zu zerfallen, die aber nicht anastomosiren, weder unter einander noch mit benachbarten, sind abgeplattet, und lassen in Folge dessen den Kern mehr oder weniger stark aus dem Zellkörper hervortreten. Die äußeren Enden bilden sich verbreiternd die Limitans externa, die inneren sich ebenfalls verbreiternd eine Schicht, in welcher durch Silber, das von der Kittsubstanz stärker reducirt wird, die einzelnen Fußpunktfelder deutlich gemacht werden können. Niemals hängen die Zellen mit den beiden granulirten Schichten irgendwie zusammen, sondern durchsetzen dieselben immer ganz glatt.

4) Der Typus der Zellen in den verschiedenen Klassen ist folgender:

a) Fische (Stör und verschiedene Knochenfische). Die Zellen sind an ihrem inneren Ende nicht verästelt und verbreitern sich gegen das Ende wenig und allmälig. Das äußere Ende zeigt eine

Anzahl feiner Fasern, die unter sehr spitzen Winkeln abgehen. Die Zellen sind im Ganzen zart.

b) Amphibien (Frosch, Kröte). Die Zellen sind kräftig und sehr unregelmäßig in ihrer Form. Die Verbreiterung am inneren Ende ist stark und geschieht ziemlich plötzlich. Die Unregelmäßigkeit der Form liegt einmal darin, daß die Zellen sehr verschieden lang und stark sind, nach den verschiedenen Theilen der Retina, und darin, daß sie mehr oder weniger kurze dornenartige Aeste, sowie membranöse Ausbreitungen tragen. Es kommen ganz lange, ziemlich zarte und glatte Zellen vor, und ganz kurze, starke, dornige. Das Ende vom Kern bis zur inneren Verbreiterung ist theils glatt, theils mit kurzen, manchmal membranös verbreiterten Dornen besetzt, welche dann in die innere granulirte Schicht hineinragen, ohne aber mit ihr zusammenzuhängen. Das äußere Ende zeigt eine mehr oder weniger früh beginnende Endverästelung unter verhältnißmäßig stumpfen Winkeln. Von dem Ende der Zelle zwischen dem Kern und dem Anfange der Endverästelung können wieder kurze Dornen abgehen, die dann in der inneren Körner- oder äußeren granulirten Schichte liegen, oder solche können auch von den Aesten bei früherer Endtheilung ausgehen, oder eben ganz fehlen. Auch sie können wieder membranös verbreitert sein, ebenso wie auch die Endäste membranöse Verbreiterungen tragen können.

c) Reptilien (Chelonia, Emys, Lacerta). Die radialen Zellen sind bei Chelonia und Emys sehr kräftig, bei Lacerta zarter. Sie unterscheiden sich in ihrem Typus sehr wesentlich von den bisher beschriebenen. Das innere Ende der Zelle zerfällt nämlich bei ihnen sehr früh in eine Anzahl (häufig drei) feiner langer Aeste, die dicht am Kern fast gleichzeitig entstehen. Jeder von diesen Aesten ist glatt und durchsetzt für sich die innere granulirte Schicht, jeder verbreitert sich nach seinem inneren Ende allmälig und nicht sehr stark. Nach außen von dem Kern geht die Zelle noch ein Ende ungetheilt und ziemlich dick weiter, gewöhnlich bis zur äußeren granulirten Schicht. Dann tritt auf einmal der Zerfall in die kurzen Endäste ein, welche unter mäßig spitzen Winkeln abgehen und am Ende sich zur Limitans ausbreiten.

d) Vögel (Ente, Huhn, Krähe.) Die radialen Zellen dieser Thiere schließen sich in ihrem ganzen Typus unmittelbar an die der Reptilien an, nur daß sie noch zarter sind als die von Lacerta. Sie würden den Zellen von Lacerta näher stehen als denen der Schildkröten. Auch bei den Zellen der Vögel zerfällt das innere Ende dicht am Kern in eine Anzahl feiner Fasern (auch sehr häufig drei), welche glatt die innere granulirte Schicht durchsetzen und an ihrem

Ende sich allmälig und mäßig stark verbreitern; auch bei den Vögeln geht die Zelle am äußeren Ende ungetheilt gewöhnlich bis zur äußeren granulirten Schicht, um dort in die kurze Endverästelung unter mäßig spitzen Winkeln zu zerfallen, doch kommt es auch vor, daß schon bald hinter dem Kern eine Theilung eintritt, in der inneren Körnerschichte, wobei die Winkel dann gewöhnlich spitzer sind, und es können auch kurze Aestchen in die innere Körnerschicht hineingehen.

e) Säugethiere (Mensch und eine große Anzahl von Thieren). Die Zellen sind in den mittleren Theilen der Retina lang und zart, nach der Peripherie kürzer und kräftiger. Der innere Theil geht einfach und glatt durch die innere granulirte Schicht hindurch und endigt dann entweder ziemlich plötzlich sich verbreiternd oder zeigt gewöhnlicher mehr oder weniger starken Zerfall in kurze Aeste, deren Enden sich wieder verbreitern. Bisweilen finden sich zwischen diesen Aesten Membranen. Das äußere Ende zerfällt gewöhnlich in feine Aeste, die wieder Nebenäste tragen, zeigt aber keine Membranen.

5) Die membranösen Ausbreitungen, welche den äußeren Verästelungen der Zellen bei den höheren Thieren zugeschrieben worden sind, die Körbe und Scheiden für die Körner bilden sollten, sind nicht vorhanden und wahrscheinlich durch Gerinnungen vorgetäuscht, welche die Osmiumsäure in der die Retina durchtränkenden Flüssigkeit hervorrief. Die Osmiumsäure ist überhaupt für die Untersuchung der Stützsubstanz der Retina äußerst ungeeignet, und läßt die wunderbarsten Bilder entstehen.

6) Die tangentialen Fulcrumzellen zerfallen in zwei Hauptabtheilungen; kernhaltige und kernlose, welche bei allen Wirbelthieren vorzukommen scheinen.

7) Die kernhaltigen liegen immer an der Grenze der inneren Körnerschichte und der äußeren granulirten oder bis in diese hinein. Die kernlosen, soweit sich das erkennen läßt, nach innen von jenen in der inneren Körnerschicht selbst, theilweise aber auch in die äußere granulirte hineinragend.

8) Beide Zellarten sind platt und liegen mit ihren Flächen parallel der Oberfläche der Retina. Die kernhaltigen tragen ihren Kern stark vorspringend an der inneren Fläche, die Kerne liegen somit noch sicher in der inneren Körnerschichte.

9) Die kernhaltigen Zellen sind bei allen untersuchten Thieren mehr oder weniger stark, manchmal recht stark verästelt. Die kernlosen sind theils unverästelt theils mehr oder weniger reich verästelt.

10) Beide Zellarten können in einfacher oder mehrfacher Schicht

liegen. Hiebei anastomosiren die Ausläufer der kernhaltigen Zellen bisweilen mit einander, bisweilen nicht. Die kernlosen Zellen scheinen niemals zu anastomosiren. Beide Zellarten bilden so durchlöcherte Platten, durch welche die nervösen Theile und die radialen Zellen hindurchtreten.

11) Die Form der beiden Zellarten, ihr relatives Größenverhältniß zu einander und zu den radialen Zellen ist bei den verschiedenen Thierklassen sehr konstant und charakteristisch. Die absolute Größe der Zellen ist oft sehr bedeutend, ich habe solche gefunden, bei denen die äußersten Spitzen der Ausläufer 0,3 ja 0,5 mm. auseinander standen.

12) Der Typus der Zellen bei den einzelnen Klassen ist nun folgender:

a) Fische.

Die kernhaltigen Zellen liegen in mehreren Schichten übereinander. Die innerste Schicht an der Grenze der inneren Körner- und der äußeren granulirten Schichte, die äußeren in die granulirte hineinragend. Die Ausläufer der ziemlich stark verästelten Zellen anastomosiren direkt mit einander. Die innerste Schicht enthält die schlanksten Zellen mit den zierlichsten Ausläufern, bisweilen in der That äußerst zierliche Zellen, so bei Maischolle, je weiter die Schichten nach Außen liegen, um so dicker und plumper werden die Zellkörper, um so kürzer die Fortsätze, dadurch werden die ganzen Zellen dann auch kleiner, und die Lücken, welche sie mit ihren Fortsätzen umschließen, enger, so daß die äußersten Schichten mitunter direkt einer kernhaltigen durchlöcherten Membran ähneln (Membrana perforata, Krause), während die inneren Schichten ein sehr weitmaschiges Netz bilden können. Bei Stör sind diese Zellen ganz besonders groß und plump, sonst aber durchaus ähnlich denen der Knochenfische.

Die kernlosen Zellen waren bei sämmtlichen untersuchten Fischen lange, platte, spindelförmige Fasern, ohne Verästelungen. Sie bilden eine feste Schicht indem sie sich in den verschiedensten Richtungen kreuzen, so daß eine Art Filz entsteht. Zwischen ihnen bleiben kleine unregelmäßige Lücken. Diese so verfilzte Schicht legt sich wie es scheint unmittelbar an die innerste Schicht der kernhaltigen an. Bei Stör sind diese Zellen nicht besonders groß, nicht größer wie bei manchen Knochenfischen.

Das Größenverhältniß ist so, daß bei Stör die kernhaltigen Zellen der innersten Lagen die kernlosen an Durchmesser übertreffen, die der äußeren einen etwas geringeren Durchmesser besitzen. Die radialen Zellen erreichen mitunter die Länge der kernlosen, werden aber meist übertroffen.

Bei den Knochenfischen sind die kernlosen Zellen dagegen ziemlich viel größer im Durchmesser als die kernhaltigen aller Lagen, übertreffen auch die radialen Zellen, welche dann ihrerseits länger sind als die kernhaltigen tangentialen Zellen.

Bei allen weiteren Klassen liegen die kernhaltigen Zellen in einer Schicht und ihre Ausläufer anastomosiren nicht mit einander, sondern verflechten sich nur zu einem mehr oder minder dichten Filz in der äußeren granulirten Schicht.

b) Amphibien (Frosch, Kröte).

Die Zellen sind bei Weitem kleiner als bei den Fischen, die kleinsten von allen Thierklassen. Die kernhaltigen Zellen besitzen wenige kurze Ausläufer, die kernlosen sind sehr zart und nach beiden Enden etwas verästelt. Die radialen Zellen übertreffen an Größe beide tangentiale Zellarten, von denen dann wiederum die kernlosen größer sind als die kernhaltigen. Auf Schnitten habe ich nur die kernhaltigen sehen können, die zarten kernlosen zu erkennen, war unmöglich.

c) Amphibien (Chelonia, Emys).

Den beiden Schildkröten gemeinsam ist die Form und Größe der kernhaltigen Zellen. Sie sind mäßig stark verästelt und kleiner als bei den Fischen, größer als bei den Amphibien. Bei Chelonia größer als bei Emys. Sehr verschieden bei beiden sind aber die kernlosen Zellen. Bei Chelonia sind es lange, platte Spindeln, ganz ähnlich denen der Fische, nur daß hin und wieder eine an einem oder an beiden Enden eine ganz kurze Gabelung zeigt. Bei Emys dagegen sind sie viel kürzer und geben nach allen Richtungen mäßig lange Fortsätze ab, wobei indeß der Hauptkörper der Zelle doch immer noch eine spindelförmige Gestalt behält. Bei Chelonia erhält man an Zerzupfungspraeparaten noch ganz ähnliche verfilzte Platten wie bei den Fischen, bei Emys niemals.

Die radialen Zellen sind bei Chelonia bedeutend größer als die kernhaltigen, kleiner als die kernlosen Zellen, bei Emys bedeutend größer als beide, die kernlosen aber doch noch größer als die kernhaltigen. Bei Chelonia laufen die kernlosen Zellen, wie man auf dem Querschnitt sieht, durch die ganze Dicke der inneren Körnerschicht hin, bald mehr schief bald mehr den Schichten parallel.

d) Vögel.

Die tangentialen Fulcrumzellen der Vögel ähneln von denen aller untersuchten Thiere am meisten denen der Schildkröten und zwar denen von Emys. Die kernhaltigen Zellen sind sehr klein geworden, die kernlosen sind sehr zarte Gebilde, welche aber an Länge denen von Emys gleichkommen oder sie übertreffen. Auch bei ihnen ist immer, wie bei Emys, deutlich ein spindelförmiger Hauptkörper

zu erkennen, von dem nach beiden Seiten hin Ausläufer ausgehen, die sich auch selbst wieder verästeln können.

Die kernlosen Zellen übertreffen bei den Vögeln aber die radialen an Länge oder kommen ihnen doch gleich. Irgendwelche feste Schichtenbildung ist nicht zu sehen. Auf Querschnitten sind wohl die kernhaltigen nicht aber die kernlosen Zellen zu erkennen, und bei Schüttelpraeparaten trifft man beide nur einzeln an.

e) Säugethiere.

Bei diesen erreichen beide Zellarten die höchste Stufe der Entwicklung, was das Zellindividuum anlangt, an Masse der Zellen stehen die mehrfachen Lagen der Fische voran. Die kernhaltigen Zellen sind sehr reich verästelt und die Aeste von kolossaler Länge und großer Zierlichkeit. Von Kaninchen habe ich Zellen isolirt, welche zwischen den weitest auseinanderstehenden Aesten etwa 0,5 mm. maßen, und ganz ähnliche finden sich bei Hund, Katze, Pferd und vielen anderen. Da die Kerne dieser Zellen, welche man auf dem Querschnitt sieht, viel näher aneinander liegen als die Länge der Zellfortsätze beträgt, so verfilzen sich die Ausläufer verschiedener Zellen weithin miteinander, wie man das auch auf isolirten Stücken der äußeren granulirten Schicht deutlich sieht. Beim Menschen habe ich diese Zellen nur an Querschnitten constatiren können oder noch besser an kleinen Stückchen in Zerzupfungspraeparaten, welche Querschnitte repräsentirten, sie zu isoliren ist mir bei dem so schwer bekömmlichen Material noch nicht gelungen.

Auch die kernlosen Zellen sind sehr schön entwickelt, wenn auch wegen ihrer großen Zartheit schwer zu finden. Sie sind langgestreckt und an beiden Enden verästelt, bisweilen auch nach der Mitte hin mit seitlich abgehenden längeren Fortsätzen versehen. Sie sind immer noch größer, sowohl länger wie dicker als die der Vögel, trotzdem aber sehr schwer zu finden. Findet man sie auf einem Schüttelpraeparat, so liegen sie immer einzeln. Die radialen Zellen sind hier kleiner als die kernhaltigen und häufig auch als die kernlosen tangentialen, von diesen beiden die ersteren bedeutend größer als die letzteren.

13) Da diese Zellen so eigenthümlich characteristische Form- und Größenunterschiede bei den verschiedenen Thieren besitzen, so wäre es vielleicht möglich, sie als Leitfaden für die Auffindung phylogenetischer Verwandtschaften zu benutzen. Bei dem verhältnißmäßig geringen Material, das ich bis jetzt untersuchen konnte, kann ich natürlich nur diese Vermuthung aussprechen (als Stütze könnte wohl auch die oben hervorgehobene große Aehnlichkeit zwischen Reptilien und Vögeln dienen) ohne direkte Beweise dafür beibringen zu kön-

nen und noch weniger mich darauf einlassen, irgendwelche Verwandtschaftsverhältnisse zu statuiren.

14) Um die Art des Wachsthums der tangentialen Zellen zu studiren, untersuchte ich die Augen von neugeborenen Kätzchen. Es zeigte sich, daß die kernhaltigen Zellen am 1. Tage nach der Geburt noch sehr kurze und zarte Fortsätze und wenig Zellkörper um den Kern besaßen, daß aber ein sehr rasches Wachsthum statt hatte, so daß die Zellen etwa in 3 Wochen schon ziemlich ausgewachsen aussahen, und sie vom 1. Tage bis zum 13. Tage ungefähr auf das Doppelte ihrer Größe gekommen waren.

Die kernlosen Zellen konnte ich bei diesen kleinen Thieren nicht auffinden, was bei der Schwierigkeit sie beim erwachsenen Thiere zu sehen, nicht weiter auffallend ist. Immerhin wäre es sehr interessant gewesen zu sehen, ob sie in dieser Zeit schon kernlos seien oder noch Kerne besäßen.

15) Die innere Körnerschicht enthält also folgende verschiedene Gebilde:

a) die nervösen Körner und deren Fasern.

b) die Spongioblasten.

c) die kernhaltigen tangentialen Fulcrumzellen, wenigstens Zellkörper und Kern.

d) die kernlosen tangentialen Fulcrumzellen.

e) den Kern und den protoplasmatischen Theil des Zellkörpers der radialen Fulcrumzellen.

Die große Mehrzahl dieser Gebilde gehört der Stützsubstanz an, und von diesen Gebilden der Stützsubstanz liegen gerade wieder die wichtigsten Theile, die Kerne und die eigentlichen Zellkörper, in ihr. Man kann diese Schichte, die ja auch so recht in der Mitte der Retina gelegen ist, daher wohl als die Centralschicht für die Stützsubstanz auffassen. — Bei manchen niedriger stehenden Thieren tritt diese Stützsubstanzbedeutung (sit venia verbo) der inneren Körnerschichte auch direkt auf dem Querschnitte hervor, so bei Stör und Chelonia. Bei beiden liegen die tangentialen Fulcrumzellen durch die ganze Dicke der inneren Körnerschicht hin mit ihren Ausläufern, bei Stör noch in höherem Grade wie bei Chelonia. Während es bei dieser nur noch die kernlosen Zellen sind, die so hindurchlaufen, sind es bei Stör auch die kernhaltigen. Bei beiden machen die verhältnißmäßig wenigen inneren Körner den Eindruck des geduldeten, oder dessen, der sich seinen Platz erst erobern will, und erst mit der immer wachsenden Menge der nervösen Körner bei den höheren Thieren tritt dann die Stützsubstanz mehr und mehr zurück und wird von den nervösen Elementen schließlich so verdeckt, daß man Mühe hat, sie auf-

zufinden. Seinen Gipfelpunkt erreicht dieses Verhältniß beim Menschen, bei dem selbst die kernhaltigen tangentialen Fulcrumzellen, die bei den höheren Säugethieren auf dem Querschnitt immer noch deutlich hervortreten, nur noch mit Mühe zu erkennen sind.

16) In der äußeren granulirten Schicht liegen:

a) die Fasern der nervösen inneren Körner mit ihren Verästelungen, welche sich hier mit den Stäbchen- und Zapfenfasern verbinden.

b) die Ausläufer der tangentialen Fulcrumzellen resp. diese selbst, wo mehrere Lagen vorhanden sind.

c) die äußeren gewöhnlich verästelten Enden der radialen Fulcrumzellen, welche senkrecht oder schräg hindurchtreten.

d) die kleinen Körnchen der granulirten Schichte, welche überall dazwischen liegen, und auch den isolirten Theilen vermittelst der farblosen geronnenen Grundsubstanz gewöhnlich anhaften.

Alle diese Gebilde formen ein so enges Geflecht, verfilzen sich derartig mit einander, daß es gar nicht wunderbar erscheint, namentlich bei der Art der tangentialen Fulcrumzellen sich zu theilen und zu verästeln, daß bei Flächenansichten dieser Membran ein von Fasern gebildetes Netzwerk in ihr vorhanden zu sein scheint, namentlich da die kleinen Körnchen der granulirten Schicht durch Zwischen- und Darüberliegen das ganze Bild verschleiern. Ich halte daher die Annahme einer besonderen Membrana fenestrata (Krause) hier nicht für geboten. Daß auch selbst die Körnchen solche netzförmige Structur in ihrer Anordnung erkennen lassen werden, ist ja selbstverständlich, da sie die senkrecht oder schräg die Schicht durchsetzenden Gebilde zwischen sich hindurchlassen müssen.

Für sehr möglich halte ich es, daß bisher, namentlich bei der Retina der Säugethiere sehr viele von den feinen Aesten der tangentialen Fulcrumzellen in der äußeren granulirten Schicht für Nervenfasern gehalten worden sind, und so das Nervennetz hier viel reicher und dichter erschienen ist, als es in Wirklichkeit ist. In der That ist die Unterscheidung der betreffenden Theile auf dem Querschnitt auch nur möglich, wenn man längere Strecken verfolgen kann, am sichersten sind immer Schüttelpraeparate mit guter Isolirung der Elemente, resp. die Betrachtung ganz kleiner so gewonnener Dickentheilchen der Retina, welche eine Verfolgung der Fasern aus einer Schicht in die andere gestatten.

Beiträge zur Kenntniß der Drüsen des Magens und Duodenums.

Von

P. Schiefferdecker.

Meine jüngst veröffentlichten Untersuchungen über die Speichel- und Schleimdrüsen veranlaßten mich auf eine früher von mir unternommene Untersuchung, deren Resultate ich nicht veröffentlicht hatte, zurückzukommen. Ich hatte mich damals mit dem Bau der Pylorusdrüsen und der Brunner'schen Drüsen beschäftigt und zog nun noch die Fundusdrüsen mit in den Kreis der Untersuchung hinein. Meine jetzigen Befunde bestätigten meine früher gewonnenen Anschauungen durchaus, und so will ich denn die wesentlichsten Resultate hier mittheilen.

1) Die eigentlichen Magendrüsen lassen eine Anzahl verschiedener Erscheinungsformen unterscheiden, welche auf Secretions-Metamorphosen zurückzuführen sind. Die Verschiedenheiten beziehen sich sowohl auf die Belegzellen wie auf die Hauptzellen. Die ersteren anlangend giebt es einen Zustand der Drüsen, bei dem die Belegzellen völlig fehlen können, die Hauptzellen sind dann gut entwickelte Cylinderzellen, wenn auch klein, und färben sich mit Eosin intensiv roth. Die ganze Schleimhaut ist in diesem Falle durch Contraction der in ihr befindlichen Muskeln ad maximum contrahirt, die Drüsenschläuche sind in Folge dessen auf das mannichfachste geschlängelt und gekrümmt, die Oberfläche der Schleimhaut durch die immer etwas verschiedene Contraction sehr uneben. Von diesem Zustande würde ich annehmen, daß er das Ende der Sekretion vorstellt, also den relativen Ruhezustand; er kann sich natürlich über verschieden große Strecken der Schleimhaut ausbreiten.

Dann können in diesen so beschaffenen Drüsen noch einige Belegzellen übrig sein resp. wieder auftreten, was von beiden der Fall ist, kann ich bis jetzt noch nicht sagen. An diesen Stellen sind die Schläuche schon wieder etwas gerader, die Schleimhaut dicker, die Contraction ist eben nicht so stark.

Sodann findet man in der nicht contrahirten Schleimhaut mit geraden Schläuchen die Drüsen mit Belegzellen gefüllt, aber Unterschiede in der Beschaffenheit der Hauptzellen. Dieselben zeigen bedeutende Verschiedenheiten sowohl in Form und Größe wie Beschaffenheit des Inhaltes und Schärfe der Begrenzung, Unterschiede, welche durch ihr Verhalten gegen verschiedene Anilinfarben noch mehr her-

vortreten. Diese Verschiedenheiten lassen sich aber nur an der Hand von Abbildungen deutlich beschreiben.

Die Fälle von Fehlen der Belegzellen, welche Edinger und Kupffer beschreiben, gehören wohl hieher, und sind meiner Meinung nach eben auch als Sekretionsmetamorphosen der Drüsen zu erklären.

Irgendwelche Bilder, welche die Entstehung der Belegzellen aus Hauptzellen wahrscheinlich machten, habe ich nicht erhalten, und lasse daher die Frage nach der Herkunft der Belegzellen offen.

Diese Untersuchungen wurden angestellt bei Schwein und Kaninchen.

2) Die Pylorusdrüsen sind von den Fundusdrüsen durchaus verschieden. Auch die Aehnlichkeit zwischen ihrem Epithel und den Hauptzellen ist nur eine oberflächliche. Dagegen sind die Pylorusdrüsen identisch mit den Brunner'schen Drüsen des Duodenums, wenigstens bei Mensch, Schwein, Hund, Katze, bei denen ich die Verhältnisse bis jetzt genauer untersuchen konnte. Ich fasse demgemäß die Pylorusdrüsen und die Brunner'schen in eine Gruppe zusammen und nenne sie die Drüsen der Pyloruszone. Daß diese Drüsen in der That identisch sind, lehrt einmal die Uebereinstimmung des feineren Baus derselben, sowie die Gleichheit der in den Drüsenzellen vorkommenden Secretionsmetamorphosen, zweitens der Umstand, daß, soweit die Brunner'schen Drüsen vorkommen, auch noch Magenepithel vorhanden ist an allen den Stellen, wo Ausführungsgänge Brunner'scher Drüsen zwischen den Zotten münden.

Die Zotten des Duodenums selbst sind die direkte Fortsetzung der zwischen den Magengrübchen, den trichterförmigen Drüseneingängen, liegenden Septen, sie erhalten das bekannte Darmepithel mit seinen Becherzellen in dem Augenblicke, wo die erste Lieberkühn'sche Drüse sich zeigt, und so bleibt es auch weiter. Ueberall, wo Lieberkühn'sche Drüsen sich zwischen den Zotten öffnen, und das sind ja bei Weitem die meisten Stellen, ist das characteristische Darmepithel vorhanden, wo hin und wieder ein Ausführungsgang der Brunner'schen Drüsen mündet, zeigt sich das ebenso characteristische Magenepithel. Zu dieser Untersuchung eignet sich Katze ganz besonders gut. Man kann hier manchmal eine Zotte beim Darmquerschnitt auf der einen Seite von Darm- auf der anderen von Magenepithel überzogen sehen.

Die Brunner'schen Drüsen unterscheiden sich von den Pylorusdrüsen nur dadurch, daß sie bis in die Submucosa hinabragen, während jene nur in der Mucosa liegen. Der Grund hiefür ist einmal eine stärkere Entwicklung der Drüsen im Duodenum, dann aber

auch wesentlich der Umstand, daß eben die Lieberkühn'schen Drüsen die Mucosa occupiren. Soweit diese Platz lassen, liegen auch die Drüsen des Duodenums in der Mucosa. In Bezug auf den gröberen Bau der Drüsen fasse ich dieselben sämmtlich natürlich als tubulöse Drüsen auf. Für die Pylorusdrüsen ist dieser Bau immer angenommen worden, für die Brunner'schen auch schon wiederholt betont worden.

Die Drüsen der Pyloruszone von Mensch und Schwein einerseits und Hund und Katze andererseits sind nun aber wesentlich verschieden. Bei Mensch und Schwein sind die Schläuche bis zum Ende ziemlich gleichmäßig dick, haben ein kleines Lumen und die Drüsenzellen zeigen Secretionsmetamorphosen ganz ähnlich denen, welche ich von den Schleimdrüsen beschrieben habe. Der specifische Anilinfarbstoff, der in diesem Falle das Reticulum färbt, ist aber nicht Anilingrün, wie bei jenen Schleimdrüsen, sondern Dahlia (oder Methylviolett, das sich ebenso verhält). Daraus geht dann zugleich hervor, was ja auch von Anfang an wahrscheinlich ist, daß das Secret dieser Drüsen ein specifisches von jenem der höher gelegenen Drüsen verschiedenes ist, denn eine derartige Färbung findet sich weder in den Hauptzellen der Fundusdrüsen noch in den Drüsen des Oesophagus oder der Mundhöhle. Die Drüsen von Mensch und Schwein verhalten sich anatomisch so ähnlich, daß es sehr wahrscheinlich ist, daß sie entweder dasselbe oder doch ein sehr ähnliches Secret liefern.

Die Drüsen von Hund und Katze besitzen Schläuche, welche sich nach unten zu erweitern und kolbig werden, namentlich bei der Katze tritt diese Eigenthümlichkeit sehr stark hervor, so daß die Lumina der Duodenalen-Drüsen sehr groß werden. Auch die Lieberkühn'schen Drüsen zeigen solche Erweiterungen. Vielleicht ist dieser Typus den Carnivoren überhaupt eigen. Nun, die Zellen dieser Drüsen zeigen niemals jene durch Dahlia färbbaren Secretionsmetamorphosen wie die von Schwein und Mensch. Auch mit anderen Anilinfarbstoffen habe ich keine Färbungen erzielt. Sie bleiben immer Eosinroth, und die Verschiedenheiten der Form und der Beschaffenheit der Zellen, welche man sonst noch finden kann, sind ziemlich unbedeutend.

Bei Kaninchen scheinen sich die Drüsen der Pyloruszone wieder noch anders zu verhalten als die der bisher genannten Thiere, kurz, es scheint, daß diese Drüsengruppe bei verschiedenen Thieren sehr verschiedene Secrete liefert, ein Umstand, der sowohl für ihre Bedeutung für die Verdauung spricht, als auch bei physiologischen Versuchen wohl in Rechnung zu ziehen sein wird.

3) Wenn man die Pylorusdrüsen und die Brunnerschen zu einer

Gruppe vereinigt, so verliert auch die Thatsache ihre Sonderbarkeit, daß man die Ausdehnung des Gebietes der Pylorusdrüsen im Magen so sehr verschieden groß findet bei verschiedenen Individuen. Aller Wahrscheinlichkeit nach verschiebt sich in solchem Falle die ganze Drüsengruppe, und was von ihr im Magen nicht mehr Platz findet, das liegt eben im Duodenum.

Das Quadrifilar-Magnetometer, ein neues Instrument zur Bestimmung der Variationen der verticalen erdmagnetischen Kraft.

Beobachtungen im Gauss'schen erdmagnetischen Observatorium zu Göttingen.

(Nr. III.)

(Mit 2 Tafeln).

Von

Karl Schering.

Nachdem wir, mein Bruder Ernst Schering der Director des erdmagnetischen Observatoriums in Göttingen und ich, im Jahre 1878, durch eine neue Art der Anwendung des dem Weber'schen Erdinductor zu Grunde liegenden Princips, ein Instrument construirt hatten[1]), welches für die Inclination der erdmagnetischen Kraft eine gleich genaue Bestimmung gewährt, wie die von Gauss angegebenen Magnetometer in ihrer jetzigen Gestalt für die Declination und die horizontale Intensität, handelte es sich zunächst um die Aufgabe, für die Variationen der verticalen Intensität einen in gleichem Grade genauen und zuverlässigen Meß-Apparat herzustellen, wie man einen solchen in dem Gauss'schen Unifilar und Bifilar in Verbindung mit der Weber'schen Hülfsnadel für die Variationen der Richtung und Stärke der horizontalen erdmagnetischen Kraft schon besitzt.

Diese Aufgabe glauben wir durch ein neues Instrument, das »Quadrifilar-Magnetometer« gelöst zu haben, welches seit dem Herbst 1882 in dem unterirdischen Beobachtungsraum des Göttinger Observatorium aufgestellt ist. An diesem Instrumente wurden seit dem 1. Januar 1883, in ähnlicher Weise wie an vier andern magnetischen Variationsapparaten schon seit dem 1. Aug. 1882, während

1) Tageblatt der Naturforscher-Versammlung in Cassel. 1878. p. 42.

der Terminstage, die in Göttingen gleichzeitig mit den internationalen Polarexpeditionen abgehalten sind, 24stündige Ablesungen in Pausen von 5 Minuten ausgeführt. Der Plan, gleichzeitig mit solchen Variationsbeobachtungen, in Göttingen auch Messungen der in großen Schleifen von Telegraphenleitungen inducirten electrischen Ströme, mit den von Herrn Geh.-Rath Dr. W. Siemens construirten Apparaten, anzustellen, konnte leider im Jahre 1883 nicht mehr zur Ausführung gelangen, da die Mittel des Instituts zu sehr erschöpft waren, um diese Apparate und eine noch erforderliche zweite Drahtleitung zu erwerben.

Das neue Instrument, das Quadrifilar, hat sich bei den erwähnten Beobachtungen von 1882 bis 1883 gut bewährt, und es sei daher gestattet, dasselbe hier kurz zu beschreiben.

Eine magnetische Röhre, in den Figuren Nr. I bis IV mit A bezeichnet, von 300^{mm} Länge und nahe 10^{mm} innerem lichten Durchmesser, aus Stahlblech von $0{,}5^{mm}$ Dicke angefertigt, ist in einem Schiffchen aus Aluminium so befestigt, wie die Figuren I und IV es erkennen lassen. Dieses Schiffchen mit der magnetischen Röhre, die nahe 30^{g} schwer ist, hängt frei an vier feinen Messingdrähten d_1, d_2, d_3, d_4 (in Fig. I), welche in den Punkten 1, 2, 3, 4 befestigt sind. Der Abstand der beiden Punkte 1, 2 von einander beträgt nahe 5^{mm}, ebenso der Abstand der Punkte 3, 4. Die vier Drähte sind bis zu den Seitenwänden des Beobachtungsraumes fortgeführt, z. B. das Drahtpaar d_1, d_2 zu der südlichen Wand, das andere Paar d_3, d_4 zur nördlichen Wand; dort ist jedes Paar über eine Rolle geleitet. Eine der beiden gleichen oberen Suspensionsvorrichtungen der beiden Drahtpaare ist in Fig. V im Querschnitt dargestellt. Die Schrauben g sind in eingemauerte Holzklötze eingeschraubt; r ist die Rolle von nahe 15^{mm} Durchmesser, in deren Einschnitt der Draht einliegt; h bezeichnet eine Achse, um welche die Platte p mit der Rolle r und also auch die Ebene der Drähte gedreht werden kann. Der directe Abstand l_1 der beiden Rollen von einander beträgt ungefähr 10450^{mm}, die Länge l_2 der beiden Drahtpaare zusammen mit dem Durchmesser des Schiffchens etwa 10740^{mm}, so daß die durch das Gewicht des Apparats gespannten Drähte um einen Winkel $a = \arc\cos l_1/l_2$, also ungefähr um $13^{0}\,20'$ gegen eine Horizontalebene geneigt sind, und ferner eine durch die Mittelpunkte der beiden Rollen gelegte, nahe horizontale, Linie um etwa 1240^{mm} höher als die Mitte des Magnets ist.

Wenn das Quadrifilar zur Beobachtung fertig aufgestellt ist, muß die magnetische Achse des Magnets nahe horizontal sein; dieß kann erreicht werden durch eine Drehung der oberen Suspensionen um die oben erwähnte Achse h (Fig. V). Es ist dann ersichtlich, daß eine

Aenderung der verticalen Componente der erdmagnetischen Kraft eine Drehung des Magnets um eine horizontale Querachse hervorruft und also durch den Betrag dieser Drehung gemessen werden kann. Um diese Messung ausführen zu können, ist der Spiegel S (Fig. I) an dem Schiffchen so befestigt, daß seine Ebene normal zur Längsachse des Magnets ist. Das von diesem Spiegel reflectirte Bild einer verticalen Scala, die von dem Spiegel etwa 6474^{mm} entfernt ist, wird mit einem Fernrohr beobachtet..

Durch jene Drehung des Magnets um eine horizontale Querachse wird aber eine ungleiche Spannung der Drähte hervorgerufen; um diese sofort wieder nahezu auszugleichen, ist die Verbindungslinie 1, 2 (in Fig. I) der Enden des einen Drahtpaares rechtwinkelig zu der Verbindungslinie 3, 4 des anderen Paares. Dadurch ist dem Magnet eine Bewegung gestattet, welche man in eine Drehung um die Längsachse und eine andere um die verticale Querachse zerlegen kann. Diese Drehungen ändern aber nicht die Höhe des im Spiegel S reflectirten Bildes der verticalen Scala und also auch nicht die Ablesung an dem horizontalen Faden des Fadenkreuzes im Fernrohr.

Ein zweites Bild derselben Scala, gesehen neben dem ersten Bilde in einem zweiten Spiegel, der auf einem großen, fundamentirten Steinsockel befestigt ist, dient ferner zur Controlle für die ungeänderte Stellung des Fernrohrs. Dieser Stein bildet gleichzeitig die Unterlage für den Kupfer-Dämpfer, der den Magnet des Quadrifilar eng umgibt und aus mehreren horizontalliegenden in der Mitte nach oben ausgebogenen Kupferplatten besteht.

Zum Schutz gegen Luftströmungen ist das Instrument und auch die Drähte ihrer ganzen Länge nach in Holzkasten eingeschlossen [1]).

Die Veröffentlichung der vollständigen Theorie des Quadrifilar-Magnetometers wird bei einer anderen Gelegenheit erfolgen. Zur Reduction der Terminsbeobachtungen am Quadrifilar auf absolutes Maass genügt die Kenntniß einer Constanten

$$C$$

welche gleich derjenigen Aenderung der verticalen erdmagnetischen Kraft ist, die eine Standänderung des Quadrifilar um 1 Scalentheil verursacht. Diese Constante C kann aus den Ablenkungen berechnet werden, welche ein Magnet von bekanntem Momente in verticaler Stellung auf die Nadel des Quadrifilar in gemessenen Entfernungen

1) Das Quadrifilar ist in der mechanischen Werkstätte von Bartels und Diederichs in Göttingen angefertigt.

hervorruft. Aus solchen Beobachtungen (1883 Jan. 10) hat sich ergeben:

$$C = -0.000414$$

wenn die Gauss'schen Einheiten, das Millimeter, Milligramm und die Secunde mittlerer Zeit zu Grunde gelegt werden. Das Minus-Zeichen deutet an, daß bei der damaligen Stellung der Scala wachsenden Zahlen derselben abnehmende Intensität entsprach. Wenn daher am Quadrifilar eine Aenderung der Ruhelage um $(Q-Q_0)$ Scalentheile beobachtet ist, so ergiebt die Gleichung:

$$-4.14 . (Q-Q_0) = \delta V . 10000$$

die entsprechende Aenderung δV der verticalen Componente in Gauss'schen absoluten Einheiten.

Auf der linken Seite dieser Gleichung ist noch ein Correctionsglied hinzuzufügen, wenn während einer längeren Beobachtungsreihe eine Aenderung der Temperatur des Instruments eingetreten ist; denn dadurch wird das magnetische Moment eine Ab- oder Zunahme erlitten haben, es kann aber dadurch auch der Schwerpunkt des Instruments seitlich verschoben und in Folge dessen eine Drehung eingetreten sein. Um eine solche Verschiebung so klein wie möglich zu machen, ist dem Schiffchen eine vollständig symmetrische Gestalt in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt M (Fig. II) der Röhre gehende, zur Längsachse des Magnets senkrechte Ebene gegeben. Ferner ist die Platte m, m_1 des Schiffchens aus Messing (s. Fig. II) und die beiden Platten a, a_1 aus Aluminium so lang genommen, daß bei einer gleichen Temperaturänderung aller Theile des Apparats der Mittelpunkt M der magnetischen Röhre (der Rechnung nach) sich nicht verschiebt, wenn diese Röhre nur durch eine der beiden Schrauben s (Fig. II und IV) am Schiffchen festgeklemmt, die andere Schraube s aber so lose angezogen ist, daß die sich ausdehnende oder zusammenziehende Röhre darunter hinweggleiten kann.

Die Temperaturcorrection wird in Göttingen ermittelt werden durch die Vergleichung der aus den Ablesungen am Quadrifilar direct sich ergebenden Variationen δV, mit denjenigen, welche aus den reducirten Ablesungen am Bifilar und an der Weber'schen Hülfsnadel in Verbindung mit den gleichzeitig an den Terminstagen wiederholt (6 bis 14 mal) ausgeführten Inclinationsbestimmungen berechnet werden können. Diese absoluten Inclinationsmessungen mit dem Erdinductor nach der oben erwähnten seit 1878 in Göttingen gebräuchlichen Methode[1]) geben bis auf wenige Bogensecunden genaue Werthe

1) s. Göttinger Nachrichten. 1882. p. 345.

und gestatten daher eine solche Verwendung zur Controlle von Variationsinstrumenten.

In Zukunft wird ein Hülfsmagnet aufgehängt werden, auf welchen der Magnet des Quadrifilar wirken wird und dessen Stand zur Bestimmung der Aenderung des Stabmagnetismus dienen soll, wie gegenwärtig der Weber'sche Hülfsmagnet bei dem Bifilar.

Abgesehen von solcher unvermeidlichen Temperaturcorrection sind aber die Standänderungen des Quadrifilar direct proportional den Aenderungen der verticalen Componente. Hierdurch zeichnet es sich wesentlich vor dem Instrument mit »Verticalen Deflectoren« aus, welches von Lloyd im Jahre 1842 zuerst construirt ist[1]). Bei diesem Apparat wird der Stand der Nadel zwischen den verticalen Eisenstäben außer von den Aenderungen der verticalen Componente auch von denjenigen der horizontalen Intensität und der Declination beeinflußt. Ein solches Instrument, nach dem Lloyd'schen Princip ausgeführt, aber mit besonderen Vorrichtungen zur genaueren Bestimmung der Constanten versehen, ist seit Sommer 1882 im Göttinger Observatorium aufgestellt und an sämmtlichen 26 Terminen der Jahre 1882 und 1883 beobachtet. Für dieses Instrument lautet die Reductionsformel auf Zehntausendstel der Gauss'schen Einheit:

$$10000\,.\,\delta V = 4.16\,(\Delta-\Delta_0) + 4.07\,(B'-B_0) - 3.97\,(U-U_0)$$

wenn $\Delta-\Delta_0$ die Aenderung der Ruhelage in Scalentheilen an dem Instrumente mit den verticalen Deflectoren

$B'-B_0$ diejenige am Bifilar

$U-U_0$ diejenige am Unifilar

bedeutet. Es sind also, bei Benutzung der »Verticalen Deflectoren« drei Variationsapparate nothwendig, um die Aenderung der verticalen Componente berechnen zu können; genau genommen werden die Angaben sogar von 4 Magneten dazu benutzt, da $B'-B_0$ nicht die unmittelbaren Aenderungen des Bifilar, sondern die mit den Ablesungen an der Weber'schen Hülfsnadel corrigirten bedeutet.

Zur Vergleichung der mit dem Quadrifilar und den »Verticalen Deflectoren« erhaltenen Resultate sind auf der beigefügten Tafel drei Curven nach den im magnetischen Termin 1883 Febr. 1 ausgeführten Ablesungen gezeichnet. Die Beobachtungen an den fünf magnetischen Variationsinstrumenten sind von den Herren: O. Apel,

1) H. Lloyd: On a new magnetical instrument for the measurement of the Inclination and its changes. (Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. 1842. p. 210—217).

H. Bodenstedt, W. Demuth, E. Götting, L. Hacker, H. Hogrebe, L. Holborn, H. Kahle, Dr. R. Krüger, G. Kurz, A. Langenbeck, Dr. W. Wagner ausgeführt. Aus den Curven I und II ersieht man, daß die Nadel der »Verticalen Deflectoren« im Ganzen um 170 Scalentheile sich bewegt hat, daß aber der bei weitem größte Theil dieser Bewegung durch Aenderungen der Declination und horizontalen Intensität verursacht ist; denn das Resultat der Rechnung, (die Curve II) ergiebt die gesammte Variation der verticalen Componente V nur zu etwa 0.0062 Gauss'sche Einheiten. Diese Aenderung würde durch eine Bewegung der Nadel der Verticalen Deflectoren um etwa 15 Scalentheile angezeigt worden sein, wenn die übrigen erdmagnetischen Elemente constant geblieben wären. Dagegen giebt die Gesammtbewegung um etwa 14 Scalentheile am Quadrifilar direct die Aenderung von V um etwa 0.0062 Einheiten an.

Die plötzliche Erhebung der Curve II bei $4^h\ 15^m$ würde verschwinden, wenn die gleichzeitige Ablesung am Bifilar genau um 5 Scalentheile anders lautete, als sie im Beobachtungsbuch verzeichnet ist; da die übrigen Variationsinstrumente zu dieser Zeit keine plötzliche Bewegung der Magnete gezeigt haben, so ist es wahrscheinlich, daß die Ablesung am Bifilar um 5 Scalentheile unrichtig ist.

Bei der Vergleichung der beiden Curven II und III, welche im wesentlichen übereinstimmen, ist noch zu berücksichtigen, daß die Temperaturcorrectionen an den, diesen Curven zu Grunde liegenden, Werthen noch nicht angebracht sind.

Das Quadrifilar hat mit der Lloyd'schen Waage[1]) und mit dem von Herrn Wild angegebenen »Vertical-Magnetometer«[2]) bei welchem »statt der scharfen Kante oder Schneide der Lloyd'schen Waage zwei horizontal ausgespannte Drähte als Drehungsachse dienen«, die Eigenschaft gemeinsam, daß die Standänderungen des Magnets nur durch die Variationen der Vertical-Componente beeinflußt werden. Dagegen hat das Quadrifilar vor der Lloyd'schen Waage den Vorzug, eine vollständig von den störenden Einflüssen der Reibung freie Drehungsachse zu besitzen. Ferner übt bei dem Quadrifilar in Folge der doppelt bifilaren Aufhängung die Torsion der Drähte nur einen sehr geringen Einfluß auf den Stand des Magnets aus, während bei dem »Vertical-Magnetometer« die so variable elastische Nachwirkung mit ihrem vollen Betrage in dem Drehungsmomente sich geltend macht. Schließlich hat bei der Aufhängung

---

1) Proceedings of the Royal Irish Academy 1838/9 p. 334.

2) Bulletin de l'Acad. Imp. d. Sciences de St. Pétersbourg. Tome XVII. 1872. p. 456—465.

an vier Drähten eine seitliche Verschiebung des Schwerpunkts, in Folge von Temperaturänderungen, eine geringere Drehung des Magnets zur Folge, als bei einer durch zwei Drähte oder eine Schneide gebildeten horizontalen Drehungsachse.

Strassburg 1884 Mai 30.

Preisaufgaben
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekind'schen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den vierten Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1876 bis zum 14. März 1886, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis.

Der Verwaltungsrath verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen. Auch nach den Vorarbeiten von Dümge, Mone, Aschbach, Droysen, die mehr nur andeutend als abschließend verfahren konnten, steht das Verhältniß der bis an die Zeit des Verfassers hinaufreichenden Handschriften noch keineswegs fest.

Vor allem ist erforderlich, die aus Nürnberg stammende, aber von da nach England verkaufte Ebner'sche Handschrift wieder aufzufinden und festzustellen, ob die in der jetzt zu Cheltenham befindlichen Bibliothek des verstorbenen Sir Thomas Phillipps unter No. 10,381 aufgeführte Handschrift der Beschreibung bei Aschbach, König Siegmund IV, 458, entspricht. Da nur auf Grund einer vollständig zuverlässigen Abschrift derselben der Nachweis geführt werden kann, ob in ihr das Original vorliegt oder nicht, so wird der Verwaltungsrath so bald als möglich für eine solche Abschrift Sorge tragen und diese der hiesigen Universitätsbibliothek

übergeben, von der sie Bearbeiter der Aufgabe zur Benutzung erhalten können [1]).

Es wird aber nothwendig sein auch die übrigen Handschriften des 15. Jahrhunderts zu Gotha und Hannover zu untersuchen, wo möglich noch unbekannte oder unbeachtete heranzuziehen und sowohl ihr Verhältniß unter einander als die Ableitung der späteren Abschriften festzustellen. Es wird dabei vor allem darauf ankommen, die verschiedenen vom Verfasser selbst herrührenden Bearbeitungen und Zusätze, auf welche Droysen eingehend hingewiesen hat, in den Texten selbst nachzuweisen, um Entstehung und Ausbildung der Denkwürdigkeiten durchschauen zu können.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung, eventuell Ersetzung durch die in den Archiven noch vorhandenen Originale. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Sprache, welche auf Mainz als die engere Heimath Windecks hinweist, verlangt in der Einleitung eben so gut eingehende Erörterung als die mannigfachen Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und zu andern namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung. Auch ist es sehr wünschenswerth, daß die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klar auseinandergesetzt werde.

Viel Schwierigkeit wird voraussichtlich das sprachliche Wortverzeichniß machen, doch ist es, um eine wirklich brauchbare Ausgabe herzustellen, ebenso unerläßlich, als die Wiedergabe der originalen Rubriken und Kapitelüberschriften und die Zusammenstellung eines geschickten Sach-, Personen- und Ortsverzeichnisses.

Für den zweiten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungszeitraum gestellte Aufgabe:

Wie viel auch in älterer und neuerer Zeit für die Geschichte der Welfen, und namentlich des mächtigsten und bedeutendsten aus

---

1) Es ist geschehen. Die Abschrift ist im Besitz der Kön. Universitätsbibliothek.

dem jüngeren Hause, Heinrich des Löwen, gethan ist, doch fehlt es an einer vollständigen, kritischen, das Einzelne genau feststellenden und zugleich die allgemeine Bedeutung ihrer Wirksamkeit für Deutschland überhaupt und die Gebiete, auf welche sich ihre Herrschaft zunächst bezog, insbesondere im Zusammenhang darlegenden Bearbeitung.

Indem der Verwaltungsrath

eine Geschichte des jüngeren Hauses der Welfen von 1055—1235 (von dem ersten Auftreten Welf IV. in Deutschland bis zur Errichtung des Herzogthums Braunschweig-Lüneburg)

ausschreibt, verlangt er sowohl eine ausführliche aus den Quellen geschöpfte Lebensgeschichte der einzelnen Mitglieder der Familie, namentlich der Herzoge, als auch eine genaue Darstellung der Verfassung und der sonstigen Zustände in den Herzogthümern Baiern und Sachsen unter denselben, eine möglichst vollständige Angabe der Besitzungen des Hauses im südlichen wie im nördlichen Deutschland und der Zeit und Weise ihrer Erwerbung, eine Entwickelung aller Verhältnisse, welche zur Vereinigung des zuletzt zum Herzogthum erhobenen Welfschen Territoriums in Niedersachsen geführt haben. Beizugeben sind Register der erhaltenen Urkunden, jedesfalls aller durch den Druck bekannt gemachten, so viel es möglich auch solcher, die noch nicht veröffentlicht worden sind.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. Ueber die zwei ersten Preise. Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. Ueber den dritten Preis. Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten

sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größern (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten, und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des zehnten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller. Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. Form der Preisschriften und ihrer Einsendung. Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein Jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohl thun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede

Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres vor dem 14. März, mit welchem das zehnte beginnt, *also diesmal vor dem* 14. *März* 1885, dem Director zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung. Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. Verkündigung der Preise. An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingischen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Director von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften. Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Director den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. Druck der Preisschriften. Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder,

wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser, oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. Bemerkung auf dem Titel derselben. Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. Freiexemplare. Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1877.

(Zum letztenmal wiederholt: Göttingen, den 12. Juni 1884.)

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1884.

(Fortsetzung.)

Rhenus. 2. Jahrg. No. 4 u. 5.
Bulletin astronomique et météorologique de l'observatoire impér. de Rio Janeiro. 1883. No. 12.
F. Latzina, die argentinische Republik als Ziel der europäischen Auswanderung. Buenos Aires. 1883.
R. Stuart Poole, Athenian coin-engravers in Italy. S.-A. des numismatic chronicle. Vol. III.
Tijdschrift voor indische taal- land- en volkenkunde. D. XXIX. Afl. 2. 3.
Notulen van de algemeene en bestuursvergadering van het bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschapen. D. XXI. No. 3. 4.
68ter Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft in Emden 1882/83.
Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba. T. VI. Entr. 1.
13ter Jahresbericht der historisch-antiq. Gesellschaft von Graubünden.
Die Meteoriten-Kreisreihen als Erzeuger der Kometen u. s. w. S. l. e. a. 2 Expl.
List of exchanges and presentations made by the r. society of New South Wales. 1883.
Geologische Karte von Ungarn. Bl. C, 6 nebst Erläuterung. Bl. F, 8. F, 13.
Proceedings of the scientific meetings of the zoological society of London. 1883. P. IV.
Catalogue of the library of the zoolog. society of London. Supplement.

Museums-Verein zu Klausenburg (in ungar. Sprache).

Medizinisch-naturwissenschaftliche Berichte der Klausenburger medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft und der naturwissenschaftlichen Abtheilung des Siebenbürgischen Museums-Vereins redigirt im Auftrage der Mitglieder von Andreas Högyes, medizinische Abtheilung, Anton Koch, naturwissenschaftl. Abtheilung, Geisa Entz, ethnologische Abtheilung

Jahrg. IV 1879 Abth. I (Medizin) Heft 1. 2. 3, 1. 2. Abth. II (Naturwissensch.) Heft 1. 2. 3. Abth. III (Ethnol.) Heft 1. 2.
Jahrg. V 1880 Abth. I Heft 1. 2. 3. Abth. II Heft 1. 2. 3. Abth. III Heft 1. 2. ib. 1880. Klausenburg 1879. 8.
Jahrg. VI 1881 Abth. I Heft 1. 2. 3. Abth. II Heft 1. 2. 3. Abth. III Heft 1. 2. ib. 1881.
Jahrg. VII 1882 Abth. I Heft 1. 2. 3. Abth. II Heft 1. 2. 3. Abth. III Heft 1. 2. 3. 4. ib. 1882.
Jahrg. VIII 1883 Abth. I Heft 1. 2. 3. Abth. II Heft 1. Abth. III Heft 1. 2. 3. 4. 5. ib. 1883.
Jahrg. IX 1884 Abth. I Heft 1. Abth. III Heft 1. ib. 1884.

Siebenbürgisches Museum. Im Auftrage des Siebenbürg. Museums-Vereins redig. von Heinrich Finály.

Jahrg. I 1874 (Heft 1— 9) Klausenburg 1874. 8.
» II 1875 (Heft 1—10) » 1875. 8.
» III 1876 (Heft 1—10) » 1876. 8.
» IV 1877 (Heft 1—10) » 1877. 8.
» V 1878 (Heft 1—10) » 1878. 8.
» VI 1879 (Heft 1—10) » 1879. 8.
» VII 1880 (Heft 1—10) » 1880. 8.
» VIII 1881 (Heft 1—10) » 1881. 8.
» IX 1882 (Heft 1—10) » 1882. 8.

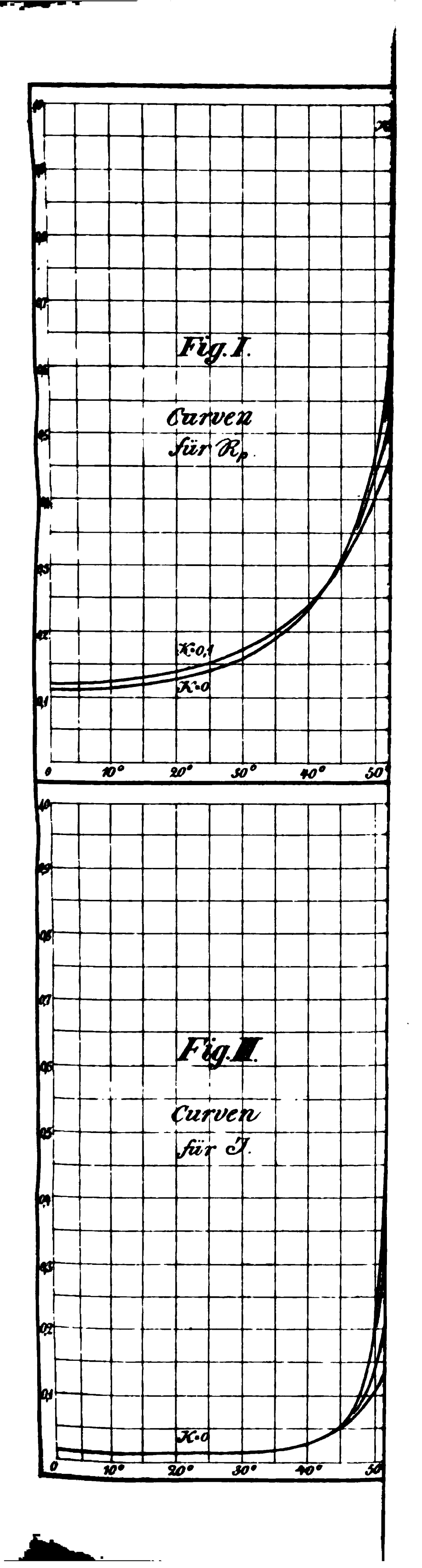
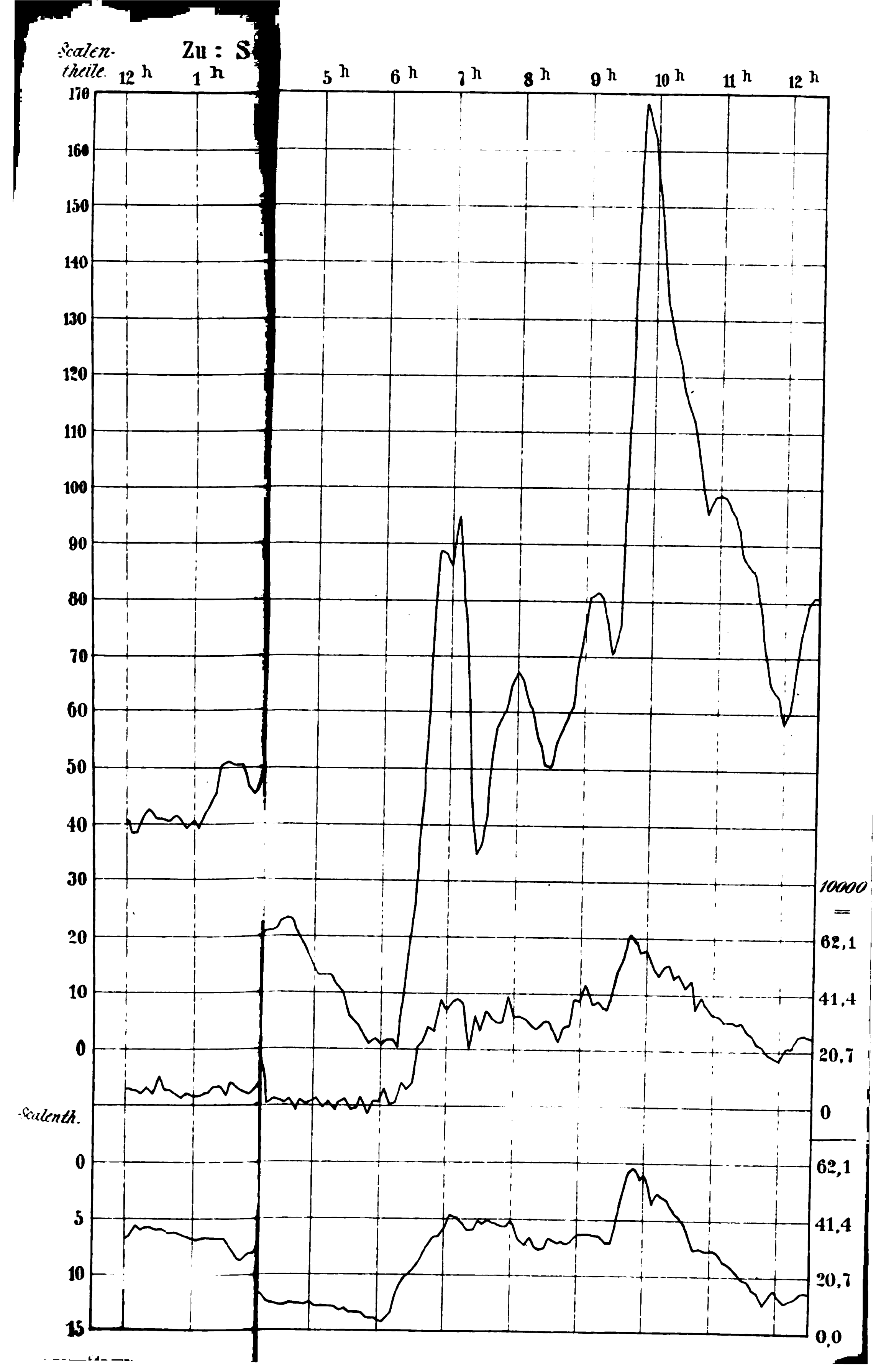
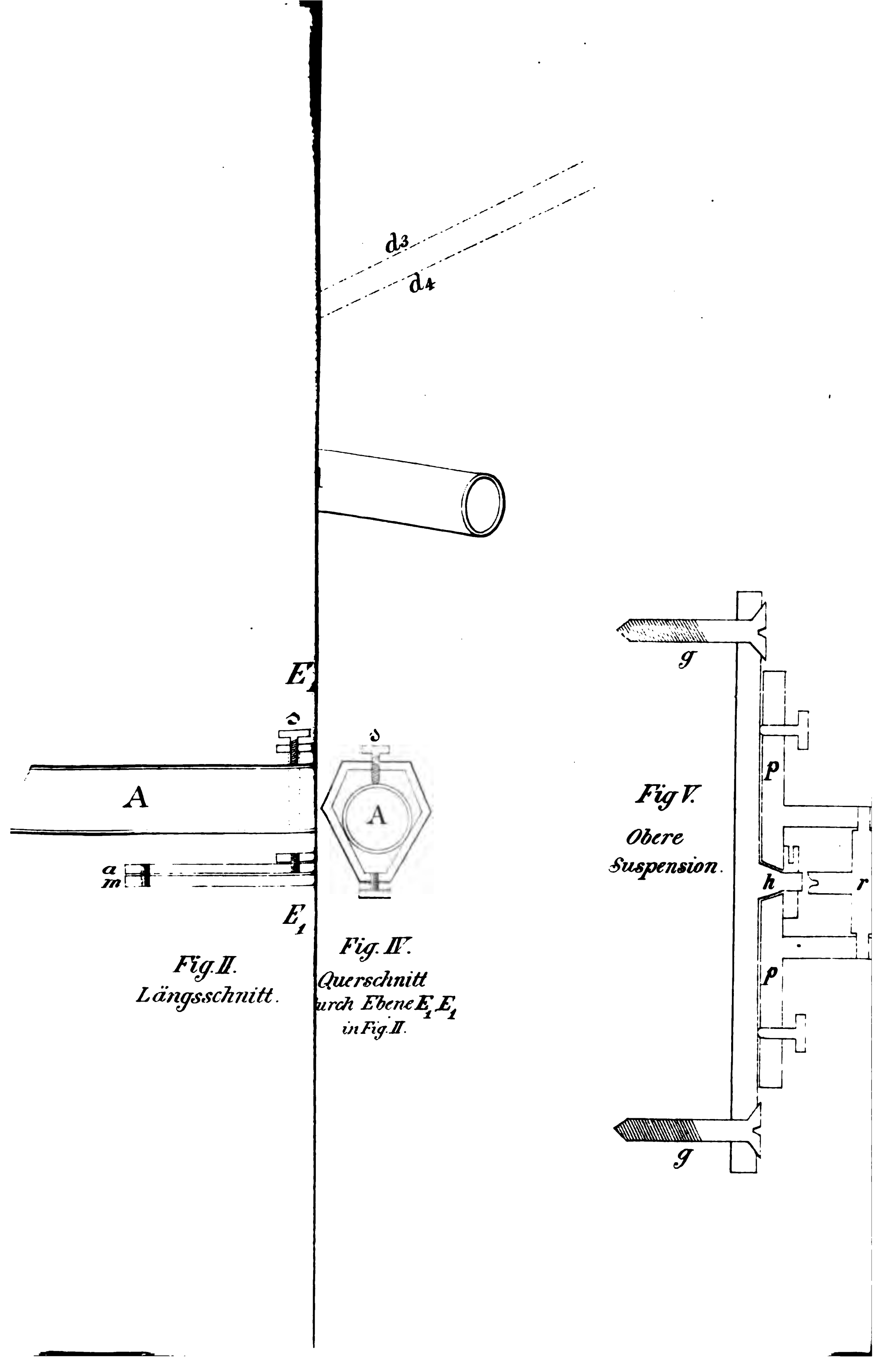


Fig. I.
Curven
für R_p.
K=0,1
K=0
0
10°
20°
30°
40°
50°
Fig. II.
Curven
für J.
K=0
0
10°
20°
30°
40°
50



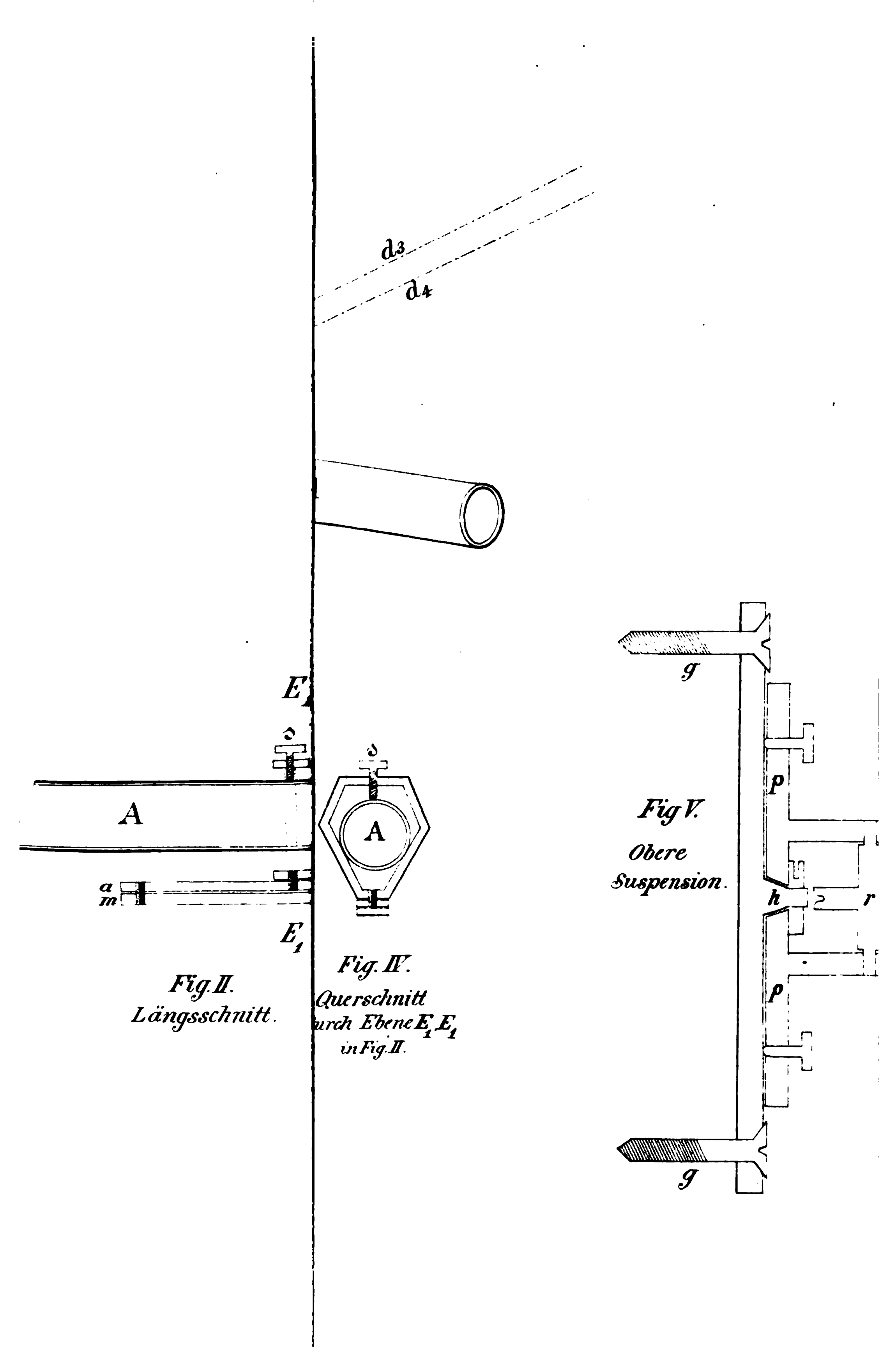
Scalen-theile.
Zu : S
12 h
1 h
5 h
6 h
7 h
8 h
9 h
10 h
11 h
12 h
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10000
=
62,1
41,4
20,7
0
Scalenth.
0
5
10
15
62,1
41,4
20,7
0,0



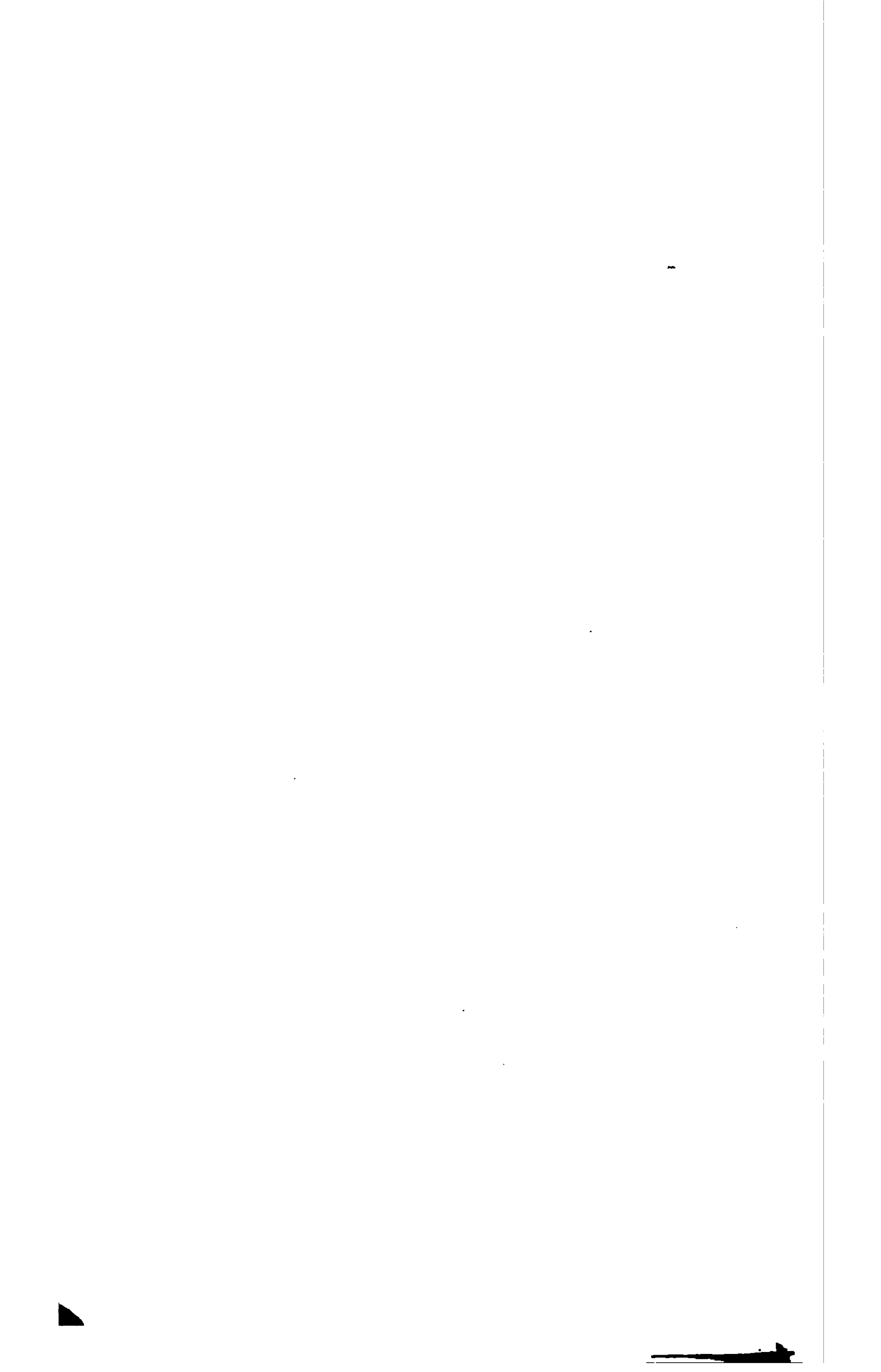


d3
d4
E1
A
a
m
E1
Fig. II.
Längsschnitt.
A
Fig. IV.
Querschnitt
urch Ebene E1 E1
in Fig. II.
g
p
Fig V.
Obere
Suspension.
h
r
p
g





d3
d4
E1
A
a
m
E1
A
Fig. II.
Längsschnitt.
Fig. IV.
Querschnitt
urch Ebene E1 E1
in Fig. II.
g
p
Fig V.
Obere
Suspension.
h
r
p
g



Jahrbücher des Siebenbürgischen Museum-Vereins. Bd. 6. 1871 — 73 Heft 2 redig. von Samuel Brassai. Klausenburg 1873. 4.
— — — Neue Folge redig. von Heinrich Finály. Heft 1—7 (= Bd I) Klausenburg 1874—76. Bd. II Heft 1—10. ib. 1877—78. 8.
Schriften, der philosophisch-philologisch-historischen Classe des Siebenbürgischen Museumvereins. Bd I Heft 1. Klausenburg 1884. 8.
Joseph Vass, Siebenbürgen unter den Römern. Nach den Quellen. Klausenburg 1863. 8.
Johann Szamósi, Ueber die Fortschritte der österreichischen Universitäten in 10 Jahren 1868—1877, und ein Blick auf die Ungarischen Universitäten. (Separatabdruck aus dem Siebenbürgenschen Museum). 1879 Heft 6. Klausenburg 1879. 8.

Juni 1884.

Nature 761. 762. 763. 764. 765.
Annales du musée Guimet. T. VI. Revue de l'histoire des réligions. T. VII, No. 2. 3. T. VIII. No. 4. 5. 6. (No. 20—24).
Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. T. V. Cah. 3.
Appendice: Observations pluviométr. et thermométr. de la Gironde. Juin 1882 — Mai 1883.
Annales de la société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon. 5e Sér. T. V.
4th, 6th u. 8th annual report of the Johns Hopkins university.
Johns Hopkins university circulars 1879—1882. 1882—1883.
l'Académie roy. de Copenhague. Bulletin pour 1883. No. 3. pour 1884. No. 1.
Mémoires de l'academie roy. de Copenhague. 5e Sér. Classe des lettres. Vol. V. No. 3.
Regesta diplomatica historiae danicae, cura societatis regiae scient. danicae. Sér. 2. T. I, 3.
Astronomical papers prepared for the use of the american ephemeris and naut. almanac. Vol. II. P. 1. 2. Vol. III. P. 1.
S. Newcomb, report to the secretary of the navy on recent improvements in astronomical instruments. Washington 1884.
Boncompagni, bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. T. XIV, Indici. T. XVI, Agosto (für die Gauss-Bibliothek).
Bulletin de l'académie impér. des sciences de St. Petersbourg. T. XXIX. No. 2.
Bulletin of the american geographical society. 1883 No. 5. 1884 No. 1.
J. B. Carpentier, la photographie appliquée aux sciences biologiques. Lyon 1884.
Mittheilungen des naturwissenschaftl. Vereins für Steiermark. Jahrg. 1883 mit Beilage (Hauptrepertorium über sämmtliche Vorträge u. s. w. in den Heften 1—20).
C. E. v. Malortie, Beitr. zur Geschichte des braunschweigisch-lüneburgischen Hauses und Hofes. Heft 7.
Records of the geological survey of India. Vol. XVII. P. 2.
Bulletin de l'academie roy. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. VII. No. 4.
Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 19. Jahrg. Heft 1.
Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Vereine von Neu-Vorpommern und Rügen. 15. Jahrgang.
Bulletin de la société mathematique de France. T. XII. No. 1.
Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Juni.
Almanach der k. bayrischen Academie der Wissenschaften für das Jahr 1884.
Atti della r. accademia delle scienze di Torino. Vol. XIX. Disp. 3.
École supér. des lettres d'Alger. Bulletin de correspondance africaine 1884. fasc. 1.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. XXXIV. No. 2.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1884. No. 4—8.
Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. 10. Jahrg.

Rhenus. 1884. No. 6.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVII. Entr. 4.
F. von Müller, a descriptive atlas of the eucalypts of Australia. 9th decade.
Annales de l'observatoire royal de Bruxelles. Nouvelle série. T. V. fasc. 1.
C. Schmidt, der Weizen- und Zuckerrübenculturboden des Gutes Ssorokotjagi. S.-A. a. d. baltischen Wochenschr. 1884.
31ter Bericht des Vereins für Naturkunde zu Cassel.
Memoirs of the geological survey of India. Palaeontologia indica. Ser. X. Vol. II. P. 6. Vol. III. P. 1.
Leopoldina, Heft 20. No. 7. 8. 9. 10.
Abhandlungen der kön. preuß. Academie der Wissenschaften zu Berlin 1883.
Journal of the royal microscopical society. Vol. IV. P. 3.
Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. XVIII. Livr. 2—5. T. XIX. Livr. 1.
Natuurkundige Verhandelingen van de hollandsche maatschappij d. wetenschapen. 3e Verz. D. IV. St. 3.
Programma van de hollandsche maatschappij der Wettenschappen te Haarlem. 1883.
Natuurkundig tijdschrift vor Nederlandsch Indien. Deel XLII.
Handelingen en mededeelingen van de maatschappij der nederlandsch letterkunde te Leiden. 1883. mit Beilage: Levensberichten der afgestorvene medeleden.
Archives du musée Tyler, 2e série. Partie 4me.
Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden godsdienst uitgegeven door Tylers godgeleerd genootschap. Nieuwe serie. D. XI. St. 1.
Monthly notices of the royal astronomical society. Vol. XLIV. No. 9.
Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte in Prag. 44. Jahrgang.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction de l'académie des sciences. 1e série. T. IV.
Proceedings of the academy of natural sciences of Philadelphia. 1884. P. 1.
Zeitschrift für Naturwissenschaften vom naturwissenschaftl. Verein für Sachsen und Thüringen. Bd. LVII. Heft 2.
Schriften der physicalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. 24. Jahrg. 1. u. 2. Hälfte.
Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus. N. F. Bd. XVIII. XIX.
Jacobi's gesammelte Werke. Herausgegeben von der k. preuß. Academie der Wissenschaften. Supplement.
Commentarii in Aristotelem graeca. Edita consilio et auctoritate acad. litterarum regiae borussicae. Vol. XXIII. Partes 3. 4.
Ebenstein, Nachträge. 4. Folge u. Beigabe. 2. Aufl., in 2 Exemplaren.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

6. August. №. 8. 1884.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs 18⁸⁴/₈₅

Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 15. März.

Theologie.

Encyklopädie der Theologie: Prof. *Knoke* Montag, Dienstag und Mittwoch um 4 Uhr.

Einleitung in das Alte Testament: Prof. *de Lagarde* vierstündig am Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag um 11 Uhr.

Erklärung der Genesis: Prof. *Schultz*, fünfstündig um 11 Uhr.

Erklärung des Propheten Jesaia: Prof. *Bertheau* fünfstündig um 10 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Prof. *Duhm* fünfstündig um 10 Uhr.

Erklärung der Salomonischen Schriften: *Derselbe* Donnerstag und Freitag um 4 Uhr, öffentlich.

Hebräische Grammatik: *Derselbe* Montag und Dienstag um 4 Uhr.

Leben Jesu nebst cursorischer Erklärung der Evangelien: Prof. *Wagenmann* dreimal um 5 Uhr.

Erklärung des Evangeliums und der Briefe Johannis: Prof. *Lünemann* fünfstündig um 9 Uhr.

Erklärung des Briefs des Paulus an die Römer: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Kirchengeschichte II. Theil: Prof. *Wagenmann* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte der Neuzeit von der Reformation an mit Rücksicht auf Hase's Kirchengeschichte: Prof. *Reuter* fünfmal um 8 Uhr, Sonnabend um 9 Uhr.

Hannoversche Kirchengeschichte: Prof. *Wagenmann* zwei bis dreimal um 5 Uhr.

Christliche Dogmengeschichte: Prof. *Reuter* fünfmal um 9 Uhr, Sonnabend um 8 Uhr.

Symbolik: Prof. *Ritschl* fünfstündig um 12 Uhr.

Dogmatik Theil I: Prof. *Ritschl* fünfstündig um 11 Uhr.

Christliche Ethik: Prof. *Schultz* fünfstündig um 10 Uhr.

Praktische Theologie Theil II (Liturgik, Homiletik; Seelsorge, Kirchenleitung; Pastoralethik): Prof. *Knoke* vierstündig um 3 Uhr.

Kirchenrecht und Geschichte der Kirchenverfassung siehe unter Rechtswissenschaft S. 323.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Bertheau* Montags um 6 Uhr; die neutestamentlichen (Erklärung der Apostelgeschichte) Prof. *Wiesinger* Dienstags um 6 Uhr; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Reuter* Donnerstags um 6 Uhr; die dogmatischen Prof. *Ritschl* Freitags um 6 Uhr.

Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends von 9—11 Uhr öffentlich.

Die Uebungen des liturgischen Seminars leitet Prof. *Knoke*, Sonnabends um 9 und um 11 Uhr; die Uebungen des katechetischen Seminars Prof. *Wiesinger* Mittwoch von 2—3 Uhr, Prof. *Knoke* Sonnabends von 2—3 Uhr, öffentlich.

Rechtswissenschaft [1]).

Römischer Civilproceß: Prof. *Hartmann*, Mittwoch und Sonnabend von 11—12 Uhr.

Pandekten ohne Sachenrecht: Prof. *Hartmann*, täglich von 10—11 Uhr und Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 11—12 Uhr.

Römisches Sachenrecht: Prof. v. *Jhering*, viermal wöchentlich von 12—1 Uhr.

Römisches Erbrecht: Prof. *Wolff* fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Deutsche Rechtsgeschichte: Prof. *Dove*, fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr.

* * *

1) Institutionen und Geschichte des römischen Rechts, sowie Handelsrecht kommen nach der in Aussicht stehenden Vervollständigung der Facultät noch für das Wintersemester hinzu.

Deutsches Privatrecht: Prof. *Frensdorff*, fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Hannoversches Privatrecht: Prof. *Ziebarth*, Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Deutsches Staatsrecht: Prof. *Mejer*, fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr.

Deutsches Verwaltungsrecht: Prof. *Frensdorff*, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 12—1 Uhr.

Völkerrecht: Prof. v. *Bar*, Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Strafrecht: Prof. *Ziebarth*, fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Kirchenrecht einschließlich des Eherechts: Prof. *Dove*, sechsmal von 8—9 Uhr.

Geschichte der Kirchenverfassung und des Verhältnisses von Staat und Kirche: Prof. *Dove*, Dienstag und Freitag von 6—7 Uhr öffentlich.

Civilproceß: Prof. *v. Bar*, fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Strafproceß: Prof. *v. Bar*, viermal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Civilproceß-Prakticum: Prof. *John*, Dienstag von 4—6 Uhr.

Criminal-Prakticum: Prof. *John*, Mittwoch von 4—6 Uhr.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie, siehe unter *Naturwissenschaften*.

Knochen- und Bänderlehre: Prof. *Henle* Montag, Mittwoch, Sonnabend von 11—12 Uhr.

Osteologie nebst Mechanik der Gelenke trägt Prof. *Krause* in zu verabredenden Stunden vor.

Systematische Anatomie I. Theil: Prof. *Henle* täglich von 12—1 Uhr.

Topographische Anatomie: Prof. *Henle* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Präparirübungen: Prof. *Henle* in Verbindung mit Prosector Dr. *Schiefferdecker* täglich von 9—4 Uhr.

Allgemeine Histologie trägt Prof. *Krause* Donnerstag um 2 Uhr oder zu anderer passender Stunde öffentlich vor.

Mikroskopische Uebungen in allgemeiner Anatomie für Anfänger: Dr. *Schiefferdecker* vier Mal wöchentlich.

Mikroskopische Anatomie der Organe: Dr. *Schiefferdecker* vier Mal wöchentlich für Geübtere.

Mikroskopische Uebungen in der normalen Histologie hält Prof. *Krause* dreimal wöchentlich um 2 Uhr.

Organische Chemie für Mediciner lehrt Prof. *Flügge* Montag und Donnerstag von 4—5 Uhr.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* in sechs Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie II. Theil (Physiologie des Nervensystems und der Sinnesorgane): Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Medicinisch-chemisches Prakticum leitet Prof. *Flügge* sechsstündig in 2 Abtheilungen für Anfänger und Geübtere.

Arbeiten im Institut für medicinische Chemie und Hygiene leitet Prof. *Flügge* täglich in passenden Stunden.

Arbeiten im physiologischen Institute leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Aetiologie trägt Prof. *Orth* Freitag von 6—7 Uhr öffentlich vor.

Ueber allgemeine Pathologie trägt Prof. *Orth* Dienstag bis Freitag von 12—1 Uhr vor.

Demonstrativen Cursus der pathologischen Anatomie hält Prof. *Orth* privatissime Mittwoch und Sonnabend von 2—4 Uhr.

Mikroskopische Uebungen in der pathologischen Histologie für Anfänger finden Montag und Donnerstag von 6—8 Uhr statt.

Physikalische Diagnostik lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr. Dasselbe in Verbindung mit praktischen Uebungen trägt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden vor.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Uebungen in der Untersuchung des Harns hält Prof. *Ebstein* in Verbindung mit Dr. *Deichmüller* Mittwoch von 3—4 Uhr.

Ueber physikalische Heilmethoden mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotherapie mit Uebungen am Krankenbett trägt Prof. *Damsch* dreimal wöchentlich in passenden Stunden vor.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Montag, Dienstag, Donnerstag von 6—7 Uhr.

Die gesammte Arzneimittellehre trägt Prof. *Husemann* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 3—4 Uhr vor.

Specielle Toxikologie II. Theil verbunden mit Experimenten: Prof. *Marmé* für ältere Mediciner Montag und Mittwoch von 2—3 Uhr.

Ueber die thierischen und Fäulniß-Gifte trägt Prof. *Husemann* Mittwoch von 3—4 Uhr öffentlich vor.

Ausgewählte Gifte demonstrirt Prof. *Marmé* Freitag von 6—7 Uhr öffentlich.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich in passenden Stunden.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Marmé* viermal wöchentlich Montag bis Donnerstag von 8—9 Uhr.

Pharmakognostisch-mikroskopische Uebungen für Vorgeschrittenere hält Prof. *Marmé* Sonnabend von 9—11 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie 2. Hälfte: Prof. *Ebstein* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 4—5 Uhr.

Ueber Kinderkrankheiten 2. Theil liest Prof. *Damsch* Dienstag und Freitag von 6—7 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Ebstein* fünfmal wöchentlich von $10^1/_2$—12 Uhr, Sonnabend von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr.

Poliklinische Referatstunde hält Prof. *Damsch* einmal wöchentlich.

Specielle Chirurgie lehrt Prof. *König* viermal wöchentlich in noch zu verabredenden Stunden; Dasselbe Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen trägt Prof. *Rosenbach* viermal wöchentlich in passenden Stunden vor.

Die chirurgische Klinik leitet Prof. *König* von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr täglich außer Sonnabend.

Chirurgische Poliklinik wird öffentlich Sonnabend von $10^3/_4$—12 Uhr von Prof. *König* und Prof. *Rosenbach* gemeinschaftlich gehalten.

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Augenspiegelcursus hält Prof. *Deutschmann* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber die praktisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Einschluß der Anatomie des Ohrs und mit Uebungen im Ohrenspiegeln trägt Dr. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit vor.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Dr. *Bürkner* (für Geübtere) an zwei noch zu bestimmenden Tagen von 12—1 Uhr.

Geburtskunde trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Dr. *Droysen* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Ueber die Krankheiten der Eierstöcke trägt Dr. *Droysen* einmal wöchentlich öffentlich vor.

Gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag um 8 Uhr.

Psychiatrische Klinik in Verbindung mit systematischen Vorträgen über Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Forensische Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen an Geisteskranken lehrt Prof. *Meyer* in wöchentlich zwei zu verabredenden Stunden.

Hygiene mit Experimenten und Excursionen; Prof. *Flügge* Dienstag und Mittwoch von 4—5 Uhr, Freitag von 4—6 Uhr.

Ueber öffentliche Gesundheitspflege trägt Prof. *Meissner* Dienstag, Mittwoch, Freitag von 5—6 Uhr vor.

Anatomie, Physiologie und den I. Theil der speciellen Pathologie der Hausthiere lehrt Prof. *Esser* fünf Mal wöchentlich von 9—10 Uhr.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale hält Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden.

Philosophie.

Geschichte der alten Philosophie: Prof. *Peipers*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 8 Uhr.

Geschichte der neueren Philosophie, mit Ueberblick über Patristik und Scholastik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Ueber Leibnitz' Monadenlehre: Prof. *Peipers*, Sonnabend 11 Uhr, öffentlich.

Encyclopädie der Philosophie: Prof. *Rehnisch*, Mittwoch und Sonnabend 12 Uhr, öffentlich.

Logik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 4 Uhr.

Logik: Prof. *Rehnisch*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 12 Uhr.

Psychologie: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

In einer psycholog. Societät wird Prof. *G. E. Müller* die Theorie des Willens behandeln: Mittwoch 10 Uhr, öffentlich.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Montag und Donnerstag 11 Uhr, öffentlich.

Mathematik und Astronomie.

Analytische Geometrie: Prof. *Schwarz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 11 Uhr.

Theorie der bestimmten Integrale: Prof. *Stern*, viermal, 11 Uhr.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, mit Uebungen: Dr. *Hölder*, zweimal wöchentlich, unentgeltlich.

Theorie der algebraischen Gleichungen: Dr. *Hölder*, dreimal wöchentlich.

Theorie der reellen und imaginären Zahlen: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 9 Uhr.

Analytische Mechanik: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag 9 Uhr.

Geometrie des Raumes, namentlich analytische Geometrie der krummen Flächen und Curven doppelter Krümmung: Prof. *Enneper*, Montag bis Freitag 10 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leiten mathematische Uebungen Prof. *Stern*, Mittwoch 3 Uhr; mathematisch-astronomische Uebungen Prof. *Schering*, Montag 3 Uhr; mathematische Uebungen Prof. *Schwarz*, Mittwoch 12 Uhr. Vgl. *Naturwissenschaften* S. 329.

Erdmagnetische Beobachtungen leitet Prof. *Schering* Mittw. 4 Uhr.

Astronomische Beobachtungen leitet Prof. *Schering* zu geeigneter Zeit, privatissime, gratis.

In der Societät wird Prof. *Schering* Reduktionen von Beobachtungen behandeln.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* wie bisher privatissime, unentgeltlich, einmal zweiwöchentlich leiten.

Naturwissenschaften.

Specielle Zoologie, II. Theil: Prof. *Ehlers*, Montag bis Freitag, 9 Uhr.

Anthropologie: Prof. *Ehlers*, Mont., Dienst., Mittw., 6 Uhr.

Die Lebenserscheinungen der Zelle: Dr. *Hamann*, Dienst., 6 Uhr.

Zootomischer Kurs: Prof. *Ehlers*, Dienst. und Mittw. 10—12 Uhr.

Zoologische Uebungen wird Prof. *Ehlers* täglich mit Ausnahme des Sonnabend von 10—1 Uhr anstellen.

Zoologische Societät: Prof. *Ehlers* für Vorgeschrittenere.

Zoologisches Practicum (Einführung in die mikroskopische Technik): Dr. *Hamann*, Montag und Donnerstag 2—4 Uhr, privatissime und unentgeltlich für die im zoolog. Institut Arbeitenden.

Anatomie und Physiologie der Pflanzen: Prof. *Reinke*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Ueber Thallophyten (Algen und Pilze): Prof. *Graf zu Solms*, Dienstag und Freitag 4 Uhr.

Die einheimischen Laub- und Lebermoose: Prof. *Graf zu Solms*, Mittwoch 4 Uhr, öffentlich.

Die Fortpflanzungs- und Befruchtungserscheinungen der Gewächse: Prof. *Falkenberg*, Dienstag und Donnerstag 6 Uhr.

Pflanzenkrankheiten: Prof. *Falkenberg*, Mittw. 6 Uhr, öffentlich.

Ueber Spalt- und Schimmelpilze: Dr. *Berthold*, Montags und Freitags von 6—7 Uhr.

Ueber das Protoplasma: Dr. *Berthold*, Mittw. von 3—4 Uhr, gratis.

Mikroskopisch-botanischer Kursus: Prof. *Reinke*, Sonnabend von 9—1 Uhr (für Pharmaceuten zweistündig).

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Reinke*.

Botanische Excursionen im Anschluß an die Vorlesungen über Thallophyten und Moose veranstaltet Prof. *Graf zu Solms*.

Anleitung zu botanischen Arbeiten im Laboratorium des botanischen Gartens, wesentlich für Vorgeschrittene, giebt Prof. *Graf zu Solms*.

Uebungen einer botanischen Societät: Prof. *Reinke*, in später festzusetzenden Stunden.

Mineralogie: Prof. *Klein*, Montag bis Freitag, 11 Uhr.

Krystallographie: Prof. *Klein*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 9 Uhr.

Geologie: Prof. *von Koenen*, Montag bis Freitag, 8 Uhr.

Ueber einzelne Klassen von Fossilien: Prof. *von Koenen*, eine Stunde, öffentlich, Sonnabend 8 Uhr.

Mineralogische Uebungen: Prof. *Klein*, Sonnabend 10—12 Uhr, öffentlich.

Krystallographische Uebungen: Prof. *Klein*, privatissime, aber unentgeltlich, in zu bestimmenden Stunden.

Paläontologische und geologische Uebungen: Prof. *von Koenen*, täglich, privatissime, unentgeltlich.

Uebungen im Bestimmen: Prof. *von Koenen*, 2 Stunden, publice.

Einleitung in die theoretische Physik: Prof. *Voigt*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr.

Experimentalphysik, zweiter Theil: Magnetismus, Elektricität und Wärme: Prof. *Riecke*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 5 Uhr.

Meteorologie: Dr. *Hugo Meyer*, Dienst. u. Donn., 6 Uhr, unentg.

Die Uebungen im physikalischen Institute leiten die Proff. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Meyer* und Dr. *Krüger*, Dienst., Donnerst., Freit. 2–4 Uhr u. Sonnab. 9—1 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar behandelt ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik Prof. *Riecke*, der mathematischen Prof. *Voigt*, Sonnabend 10 Uhr. Vgl. *Mathematik und Astronomie* S. 327.

Grundlehren der modernen Chemie, als Einführung in das Studium der Chemie: Dr. *Leuckart*, Freitag 12 Uhr.

Allgemeine Chemie (s. g. unorganische Chemie): Prof. *Polstorff*, sechs Stunden, 9 Uhr.

Chemie der Benzolverbindungen: Dr. *Leuckart*, Dienstag und Donnerstag 4 Uhr.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen: Dr. *Buchka*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, 12 Uhr.

Organische Chemie für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 St., 9 Uhr.

Quantitative chemische Analyse (Gewichts- und Maaßanalyse): Dr. *Buchka*, Mittwoch und Donnerstag 8 Uhr.

Chemie der selteneren Metalle: Dr. *Jannasch*, Montag, Dienstag, Mittwoch 9 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (organischer Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 5 Uhr.

Gerichtliche chemische Analyse: Prof. *Polstorff*, Mittw. 4 Uhr.

Technische Chemie für Landwirthe (Zuckerfabrikation, Gährungsindustrien, Molkerei etc.): Prof. *Tollens*, Mont., Dienst., Mittw., 10 Uhr.

Ueber Zuckerbestimmungen, besonders durch Polarisation: Prof. *Tollens*, Donnerstag, 6 Uhr, öffentlich.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akadem. Laboratorium leiten Prof. *Polstorff*, Dr. *Jannasch*, Dr. *Buchka* u. Dr. *Leuckart*, Mont. bis Freit., von 8 bis 12 und von $2^1/_2$ bis 5 Uhr.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im

physiologisch-chemischen Laboratorium täglich (mit Ausschluß des Sonnab.) 8—12 und 2—4 Uhr.

Pharmacie lehrt Prof. *Boedeker* in fünf Stunden um 9 Uhr. Dasselbe lehrt Prof. *von Uslar* viermal wöchentlich um 3 Uhr.

Prof. *Tollens* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium in Gemeinschaft mit Dr. *Hölzer*, Montag bis Freitag von 8—12 und von 2—4 Uhr.

Voraussichtlich wird die Vorlesung über allgemeine Chemie und die Leitung der Uebungen im Chemischen Laboratorium schon mit Beginn des Halbjahrs von dem neu zu berufenden Professor übernommen.

Historische Wissenschaften.

Lateinische Palaeographie: Prof. *Steindorff*, Mittwoch und Sonnabend 11—1 Uhr.

Grundzüge der mittelalterlichen Zeitrechnung: Prof. *Steindorff*, Montag 4 Uhr.

Quellenkunde der griechischen Geschichte: Prof. *Gilbert*, Dienstag und Freitag 5 Uhr.

Quellenkunde der europäischen Geschichte bis 1250: Prof. *Weiland*, Montag, Dienstag, Donnerstag, 10 Uhr.

Allgemeine Geschichte des Zeitalters der Reformation und der Religionskriege vom Ende des 15. Jahrhdts bis 1648: Prof. *v. Kluckhohn*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 5 Uhr.

Geschichte der neuesten Zeit (1851—1871): Prof. *v. Kluckhohn*, Dienstag und Freitag 4 Uhr.

Deutsche Geschichte bis 1806: Prof. *Weiland*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 9 Uhr.

Geschichte Italiens im Mittelalter: Assessor Dr. *Wüstenfeld*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 11 Uhr, unentgeltlich.

Geschichte des Zeitalters der Hohenstauffen: Dr. *von Kap-herr*, zweistündig, gratis, zu einer zu bestimmenden Stunde.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienstag, 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen: Prof. *Weiland*, Freit., 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen: Prof. *v. Kluckhohn*, Donn., 6 Uhr., öffentl.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 321.

Deutsche Rechtsgeschichte vgl. unter *Rechtswissenschaften* S. 322.

Erd- und Völkerkunde.

Geographie Deutschlands: Prof. *Wagner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Kartographische Uebungen für Anfänger: Prof. *Wagner*, privatissime, Mittwoch 9—12 Uhr.

Staatswissenschaft.

Volkswirthschaftspolitik (praktische Nationalökonomie): Prof. *Hanssen*, vier Stunden, 4 Uhr.

Nationalökonomie, allgemeiner Theil, als Grundlegung für das Studium der Staatswissenschaften (im Anschluß an die im Sommerhalbjahr gegebene Einleitung): Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 3 Uhr.

Finanzwissenschaft (Lehre von den öffentlichen Haushaltungen), mit besonderer Rücksicht auf die deutsche und preussische Steuergesetzgebung: Prof. *Cohn*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Theoretische Nationalökonomie (Volkswirthschaftslehre): Dr. *Eggert*, 4 Stunden, 8 Uhr.

Volk und Gesellschaft in den Vereinigten Staaten von Amerika: Dr. *Sartorius von Waltershausen*, Mittwoch 3 Uhr, unentgeltlich.

Socialdemokratie und Socialpolitik. II (im Anschluß an die Vorlesungen des Sommerhalbjahrs): Prof. *Cohn*, Mittw. 5 Uhr, öffentl.

Staatswissenschaftliches Seminar: Prof. *Cohn*, 1—2 Stunden, Dienstag 11—1 Uhr.

Volkswirthschaftliche Uebungen: Prof. *Soetbeer*, privatissime, aber unentgeltlich, in später zu bestimmenden Stunden.

Landwirthschaft.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler* 1 Stunde, öffentlich.

Allgemeine Ackerbaulehre: Prof. *Drechsler*, 2 Stunden, 12 Uhr.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerstag und Freitag 11 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Lehre von den Nutzungen, der Züchtung, Ernährung und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes und Schweines): Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 5 Uhr.

Die landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittwoch 5—7 Uhr, öffentlich.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof. *Drechsler*, vier Stunden, 12 Uhr.

Die Lehre vom Futter (I. Theil der Lehre von der Ernährung der landw. Nutzthiere): Prof. *Henneberg*, Mont., Dienst., Mittw., 11 Uhr.

Landwirthschaftliches Praktikum: Prof. *Drechsler* und Dr. *Edler* (Uebungen im landw. Laboratorium, Freit. und Sonnab. 9—1 Uhr; Uebungen in landw. Berechnungen, Dienst. und Donnerst. 6 Uhr; Excursionen und Demonstrationen, Mittw. Nachmittag).

Techn. Chemie und praktisch-chemische Uebungen für Landwirthe vgl. *Naturwissenschaften* S. 329.

Anatomie, Physiologie und Pathologie der Hausthiere vgl. *Medicin* S. 326.

Literär- und Kunstgeschichte.

Geschichte der griechischen Poesie (mit Ausschluß des Drama's) bis auf Alexander: Prof. *Dilthey*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Geschichte der antiken Literatur von Augustus bis Marc Aurel: Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, 4 Stunden.

Geschichte der deutschen Literatur im Mittelalter: Dr. *Schroeder*, 3 Stunden.

Geschichte der deutschen lyrischen und Spruchdichtung im Mittelalter: Prof. *Heyne*, 4 Stunden.

Ueber Schiller: Prof. *Goedeke*, Mittw. 4 Uhr, öffentlich.

Abriß der altenglischen Litteraturgeschichte und Erklärung des Beowulf: Prof. *Napier*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Geschichte der französischen Literatur. I.: Prof. *Vollmöller*, Mittwoch 11—1 Uhr.

Ueber Ernst Renans Leben und Schriften: Prof. *de Lagarde*, Mittwoch um 3 Uhr, publice.

Einleitung in die Kunstgeschichte und Aesthetik: Prof. *Schmarsow*, Montag und Donnerstag 6 Uhr, öffentlich.

Geschichte der italienischen Skulptur von Niccolo Pisano bis auf Michel Angelo: Prof. *Schmarsow*, 2 Stunden.

Kunsthistorische Uebungen: Prof. *Schmarsow*, 2 Stunden.

Alterthumskunde.

Griechische Alterthümer: Prof. *Volquardsen*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr.

Geschichte und bauliche Einrichtung des griechischen Theaters, sowie das gesammte Bühnenwesen der griechischen Tragödie und Komödie erörtert und Euripides' Kyklops erklärt Prof. *Wieseler*, vier Stunden, 12 Uhr.

Im K. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* Pausanias Beschreibung der Akropolis von Athen und ausgewählte Bildwerke, welche sich auf Homers Ilias beziehen, zur Erklärung vorlegen, Sonnabend 12 Uhr öffentlich. — Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen.

Ausgewählte Capitel aus den deutschen Privatalterthümern: Prof. *Heyne*, einmal, öffentlich.

Vergleichende Sprachlehre.

Vergleichende Grammatik der griechischen Sprache: Prof. *Fick*, 4 Stunden.

Vergleichende Grammatik des Gotischen: Dr. *Bechtel*, Montag, Dienst., Donn., Freit, 9 Uhr (oder in andern passenden Stunden).

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. unter *Theologie* S. 321.

Arabische Grammatik: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Unterricht in der äthiopischen Sprache ertheilt Prof. *Bertheau*, Dienstag und Freitag 2 Uhr.

Fortsetzung der Grammatik der Sanskrit-Sprache und Erklärung der Texte in Lanmann's Reader: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch, Sonnabend, 9 Uhr.

Erklärung ausgewählter Gesänge von Kâlidâsa's Raghuvanśa: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch, Sonnabend, 10 Uhr.

Erklärung ausgewählter Abschnitte des Nirukta und der Kâśikâ Vṛitti oder anderer schwieriger Texte: Prof. *Kielhorn*, drei Stunden, privatissime, aber unentgeltlich.

Griechische und lateinische Sprache.

Griechische Syntax: Prof. *Sauppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Die griechischen Lyriker: Prof. *Fick*, 2 Stunden, öffentlich.

Aristophanes Frösche: Prof. *von Leutsch*, Mittwoch und Sonnabend, 10 Uhr, öffentlich.

Euripides Kyklops: s. *Alterthumskunde*, S. 333.

Thukydides: Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, vier Stunden.

Geschichte der antiken Literatur nach Augustus: s. *Literär- und Kunstgeschichte* S. 332.

Geschichte der griechischen Poesie: s. *Literär- und Kunstgeschichte* S. 332.

Plautus Menaechmi: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 4 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Mittwoch 11 Uhr; läßt Antiphon erklären Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Montag und Donnerstag, 11 Uhr; läßt Lucretius B. 2 erklären Prof. *Sauppe*, Dienst. u. Freit., 11 Uhr, alles öffentl.

Im K. philologischen Proseminar wird Prof. *Dilthey* Cicero de optimo genere oratorum erklären und über die Arbeiten der Mitglieder disputieren lassen, Mittwoch und Sonnabend 10 Uhr, öffentlich.

Deutsche Sprache.

Historische Grammatik der deutschen Sprache: Prof. *W. Müller*, 5 Stunden, 3 Uhr.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *W. Müller*, Dienstag 6 Uhr.

Althochdeutsche Uebungen: Prof. *Heyne*, 1 Stunde.

Deutsche Gesellschaft: Dr. *Bechtel*, in zu verabredender Stunde, privatissime, aber unentgeltlich.

Deutsche Uebungen: Dr. *Schröder*, 1 Stunde.

Geschichte der deutschen Literatur: s. *Literärgeschichte* S. 332.

Deutsche Privatalterthümer: s. *Alterthumskunde* S. 333.

Neuere Sprachen.

Altenglische Literaturgeschichte und Beowulf: s. *Literär- und Kunstgeschichte* S. 332.

Geschichte der französischen Sprache und französische Lautlehre: Prof. *Vollmöller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Geschichte der französischen Literatur: s. *Literär- und Kunstgeschichte* S. 332.

Dante's divina commedia: Dr. *Andresen*, Dienst. u. Freit. 8 Uhr.

Zolling, Pariser Welt, version et explication, Montag 9 Uhr; — Histoire de la littérature française au XVIII siècle, Dienst. u. Freit. 9 Uhr; *a.* Methode de style et de composition, *b.* Exercices de style

et de composition, Donnerstag 9 Uhr; Lecture, récitation, conversation, Donnerstag 5 Uhr: Lector *Kœune*.

Im Seminar für neuere Sprachen leitet Prof. *Vollmöller* die Uebungen, Mittw. 6 Uhr, Prof. *Napier*, Mont. u. Donnerst., 8 Uhr Morgens, leitet grammatische Uebungen Dr. *Andresen*, Montag 6 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector Hille, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ. Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Vormittags v. 8—12 u. Nachm. (ausser Sonnab.) v. 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Hölzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 12—1 und von 2—3 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* ist Dienstags von 2—4 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-palaeontologische Schausammlung* sind im Winterhalbjahr bis zum 1. December Sonnabends von 1 bis 2 Uhr dem Publikum geöffnet.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*,

der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, der *Bibliothek des k. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Bartels* (Kleperweg 2), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle* Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. August. № 9. 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 2. August.

Klein, optische Studien am Leucit.
E. Schering, neue Form der Berechnung der speciellen Störungen. Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung bei den speciellen Störungen.
Derselbe, über die Acta mathematica herausgegeben von Mittag-Leffler.
Voigt, zur Theorie der Absorption des Lichtes in Krystallen.
Wüstenfeld, Jemen im XI. (XVII.) Jahrhundert. Die Kriege der Türken die arabische Imame u. die Gelehrten. 1. Abthlg. (erscheint in den Abhandl.)
Enneper, Bemerkung zur Theorie der planen Curven.
Minnigerode (Corresp.), über die Symmetrie-Verhältnisse und die Elasticität der Krystalle. 2. Abtheilung.
Hamann, zur Histologie der Asteriden (vorgelegt von Ehlers).
Leuckart, über Metanitroparatolyl-phenyl-Harnstoff, (vorgel. v. Henneberg.)
Jannasch, über die Darstellung größerer Mengen von Orthonitrobenzol (vorgelegt von Klein).
C. Schering, Inclinationsbeobachtungen in den Jahren 1882. 1883 (vorgelegt von C. Schering).
(Die in der vorigen Sitzung vorgelegte Abhandlung von H. Wagner, über die Bevölkerung der asiat. Türkei erscheint in den Abhandlungen).

Zur Theorie der Absorption des Lichtes in Krystallen.

Von

W. Voigt.

Nach meinen früheren Untersuchungen[1]) sind die allgemeinsten absorbirenden Kräfte, welche man in ponderabeln Körpern auf die Volumeneinheit Aether wirksam annehmen kann, gegeben durch:

1) W. Voigt, Nachrichten v. d. K. G. d. W. zu Göttingen, 1884. Nr. 6. p. 137 u. f.

$$\left.\begin{aligned}(A) &= A - \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\\ (B) &= B - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\\ (C) &= C - \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right)\end{aligned}\right| \quad 1.$$

worin ABC lineäre Functionen von $\frac{\partial u}{\partial t} = u'$, $\frac{\partial v}{\partial t} = v'$, $\frac{\partial w}{\partial t} = w'$ sind, welche die Function

$$\Psi_1 = Au' + Bv' + Cw', \quad | \ 2.$$

zu einer negativen Summe von Quadraten machen, und A_x, A_y .. lineäre Functionen von $\frac{\partial u'}{\partial x}$, $\frac{\partial v'}{\partial x}$ .... sind, welche die Function

$$\left.\begin{aligned}\Psi_2 = & A_x \frac{\partial u'}{\partial x} + A_y \frac{\partial u'}{\partial y} + A_z \frac{\partial u'}{\partial z}\\ & + B_x \frac{\partial v'}{\partial x} + B_y \frac{\partial v'}{\partial y} + B_z \frac{\partial v'}{\partial z}\\ & + C_x \frac{\partial w'}{\partial x} + C_y \frac{\partial w'}{\partial y} + C_z \frac{\partial w'}{\partial z}\end{aligned}\right| \quad 3.$$

ebenso zu einer negativen Summe von Quadraten machen. $\Psi_1 + \Psi_2$ ist dann die pro Volumen- und Zeiteinheit verlorene Energie.

Ich werde im Folgenden eine Untersuchung dieser Kräfte für krystallinische Medien vornehmen.

Da das Problem ziemlich umständlich ist, so empfiehlt es sich, von vorne herein einige geeignete Vereinfachungen stattfinden zu lassen.

Zunächst sollen die Kräfte ABC gleich Null genommen werden, weil dieselben, wie die Untersuchung der unkrystallinischen Medien gezeigt hat[1]), in den Bedingungen für den Uebergang des Lichtes aus einem Medium in's andere eine gewisse Schwierigkeit ergeben, man aber bei ihrer Vernachlässigung Uebereinstimmung mit der Beobachtung erhält. Das Analoge soll mit denjenigen der Energie-erhaltenden Kräften gethan werden, die sich ebenso verhalten wie ABC, d. h. ebenso, wie diese, nur von der Verschiebung des Volumenelementes als Ganzen abhängen[2]). Die sonach übrig bleibenden Kräfte von der Form:

1) W. Voigt, l. c. p. 149 u. 152.

2) Vergl. W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19 p. 877 u. 885.



$$(A) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ u. s. f.}$$

haben dann die Eigenschaft, ebensowohl als innere Kräfte des Aethers aufgefaßt werden zu können, wie als Wirkungen der ponderabeln Theile auf den Aether. Das letztere ziehe ich der Anschaulichkeit halber vor.

Zweitens will ich mich von vorn herein auf dreifach-symmetrische Krystalle beschränken. Hat es vielleicht auch später einmal Interesse, die allgemeineren Fälle zu untersuchen, bei welchen die Absorptionskräfte sich um andere Symmetrieaxen ordnen als die Energie-erhaltenden [1]), so dürfte es gegenwärtig, wo es noch fast ganz an exacten Messungen der Aenderung der Absorption mit der Richtung fehlt, doch genügen, einen einfacheren Fall zu behandeln.

Ich gehe demnach zuerst dazu über, die allgemeinsten Werthe A_x, A_y . . . gemäß der Annahme der Symmetrie des Krystalles in Bezug auf die Coordinaten-Ebenen zu specialisiren.

Diese allgemeinsten Werthe der A_x . . . schreibe ich in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} -A_x = {} & c_{11}\frac{\partial u'}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial u'}{\partial y} + c_{13}\frac{\partial u'}{\partial z} + c_{14}\frac{\partial v'}{\partial x} + c_{15}\frac{\partial v'}{\partial y} + c_{16}\frac{\partial v'}{\partial z} \\ & + c_{17}\frac{\partial w'}{\partial x} + c_{18}\frac{\partial w'}{\partial y} + c_{19}\frac{\partial w'}{\partial z} \\ -A_y = {} & c_{21}\frac{\partial u'}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial u'}{\partial y} + c_{23}\frac{\partial u'}{\partial z} + c_{24}\frac{\partial v'}{\partial x} + c_{25}\frac{\partial v'}{\partial y} + c_{26}\frac{\partial v'}{\partial z} \\ & + c_{27}\frac{\partial w'}{\partial x} + c_{28}\frac{\partial w'}{\partial y} + c_{29}\frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned}$$

. . . .

Damit die Function Ψ_2 eine Summe von Quadraten sei, müssen für die Constanten c_{hk} noch gewisse Relationen bestehen, auf welche ich zunächst nicht eingehe.

Ist die XY-Ebene eine Symmetrie-Ebene, so muß ein Verrückungssystem:

$$u = U(x, y, z, t),\ v = V(x,y,z,t),\ w = W(x,y,z,t)$$

und ein dazu symmetrisches:

$$u = U(x, y, -z, t),\ v = V(x, y, -z, t),\ w = -W(x, y, -z, t)$$

die gleiche Arbeit absorbiren und symmetrische Componenten A, B, C

---

1) H. Laspeyres, Z.—S. f. Kryst. 4. p. 435, 1880. Beiblätter, 4. p. 791. 1880.

erregen. Ganz analoge Schlüsse gelten, wenn auch die YZ- und ZX-Ebenen Symmetrie-Ebenen sind.

Demzufolge darf Ψ_2, wenn man w mit $-w$ und z mit $-z$, oder u mit $-u$ und x mit $-x$, oder v mit $-v$ und y mit $-y$ vertauscht, seinen Werth nicht ändern.

Dies ergiebt die Relation:

$$c_{hk} = -c_{kh} \text{ für } h \gtrless k;$$

ausgenommen sind nur die Coefficienten von

$$\frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \frac{\partial v'}{\partial y}, \; \frac{\partial v'}{\partial y} \cdot \frac{\partial w'}{\partial z}, \; \frac{\partial w'}{\partial z} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x}; \; \frac{\partial u'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x}, \; \frac{\partial v'}{\partial z} \cdot \frac{\partial w'}{\partial y}, \; \frac{\partial w'}{\partial x} \cdot \frac{\partial u'}{\partial z}$$

d. h.

$$c_{15}, c_{51}; \; c_{19}, c_{91}; \; c_{59}, c_{95}; \; c_{24}, c_{42}; \; c_{68}, c_{86}; \; c_{37}, c_{73}.$$

Die Constanten, welche der Bedingung

$$c_{hk} = -c_{kh}$$

genügen, kann man nun aber ohne Weiteres gleich Null setzen, denn jene Terme, die aus der absorbirten Arbeit Ψ_2 verschwinden, können gar nicht den Charakter absorbirender Kräfte haben; in der That sind sie auch unter den Energie-erhaltenden Kräften vorhanden, welche auf die elliptische und circulare Polarisation in durchsichtigen Medien führen [1]).

Sonach bleiben nur folgende Formeln übrig:

$$\left.\begin{aligned}
-A_x &= c_{11}\frac{\partial u'}{\partial x} + c_{15}\frac{\partial v'}{\partial y} + c_{19}\frac{\partial w'}{\partial z}; \quad -A_y = c_{22}\frac{\partial u'}{\partial y} + c_{24}\frac{\partial v'}{\partial x};\\
-A &= c_{33}\frac{\partial u'}{\partial z} + c_{37}\frac{\partial w'}{\partial x}\\
-B_x &= c_{42}\frac{\partial u'}{\partial y} + c_{44}\frac{\partial v'}{\partial x}; \quad -B_y = c_{51}\frac{\partial u'}{\partial x} + c_{55}\frac{\partial v'}{\partial y} + c_{59}\frac{\partial w'}{\partial z};\\
-B_z &= c_{66}\frac{\partial v'}{\partial z} + c_{68}\frac{\partial w'}{\partial y}\\
-C_x &= c_{73}\frac{\partial u'}{\partial z} + c_{77}\frac{\partial w'}{\partial x}; \quad -C_y = c_{86}\frac{\partial v'}{\partial z} + c_{88}\frac{\partial w'}{\partial y};\\
-C_z &= c_{91}\frac{\partial u'}{\partial x} + c_{95}\frac{\partial v'}{\partial y} + c_{99}\frac{\partial w'}{\partial z}.
\end{aligned}\right| \quad 4.$$

und daher:

$$-\Psi_2 = c_{11}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + c_{55}\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2 + c_{99}\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2 + (c_{15}+c_{51})\frac{\partial u'}{\partial y}\cdot\frac{\partial v'}{\partial z} +$$
$$+ (c_{19}+c_{91})\frac{\partial w'}{\partial z}\cdot\frac{\partial u'}{\partial x} + (c_{59}+c_{95})\frac{\partial v'}{\partial y}\cdot\frac{\partial w'}{\partial z}$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 877 u. 890, 1883.

$$\left.\begin{aligned}&+c_{22}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2+(c_{24}+c_{42})\frac{\partial u'}{\partial y}\cdot\frac{\partial v'}{\partial x}+c_{44}\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2\\&+c_{33}\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2+(c_{37}+c_{73})\frac{\partial u'}{\partial z}\cdot\frac{\partial w'}{\partial x}+c_{77}\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2\\&+c_{66}\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2+(c_{68}+c_{86})\frac{\partial v'}{\partial z}\cdot\frac{\partial w'}{\partial y}+c_{88}\left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}\right|\quad 5.$$

Damit hier rechts eine Summe von neun Quadraten stehe ist nöthig, daß alle Coefficienten

$$c_{ii} > 0$$

sind, die übrigen können auch negativ sein, dürfen aber in keinem Falle eine für jede leicht angebbare Größe überschreiten.

Die Componenten (A), (B), (C) werden hiernach:

$$(A) = c_{11}\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+c_{22}\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}+(c_{15}+c_{24})\frac{\partial^2 v'}{\partial x\,\partial y}+(c_{19}+c_{37})\frac{\partial^2 w'}{\partial x\,\partial z}$$

$$(B) = c_{44}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+c_{55}\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}+c_{66}\frac{\partial v'}{\partial z^2}+(c_{59}+c_{68})\frac{\partial^2 w'}{\partial y\,\partial z}+(c_{42}+c_{51})\frac{\partial^2 u'}{\partial y\,\partial x}$$

$$(C) = c_{77}\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+c_{88}\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}+c_{99}\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}+(c_{73}+c_{91})\frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial x}+(c_{95}+c_{86})\frac{\partial^2 v'}{\partial z\,\partial y},$$

d. h. sie gewinnen genau dieselbe Form, in welcher die Energieerhaltenden Kräfte für dreifach symmetrische Krystalle in die Bewegungsgleichungen eingehen [1]), nur daß bei jenen die letzten beiden Coefficienten in jeder Gleichung zusammen drei einfachen Bedingungen genügen, die auch in unserm Falle erfüllt wären, wenn für die allein noch übrigen Constanten

$$c_{hk} = c_{kh}$$

wäre. Da die Annahme dieser Relationen die Berechnung bedeutend vereinfacht, so will ich sie einführen und zugleich ihr entsprechend abkürzen:

$$\left.\begin{aligned}c_{15}+c_{24}&=c_{51}+c_{42}=c_3\\c_{19}+c_{37}&=c_{91}+c_{73}=c_2\\c_{59}+c_{68}&=c_{95}+c_{86}=c_1;\end{aligned}\right|\quad 6.$$

es ist dabei zu bemerken, daß dieselben zwar bei der vollkommen gleichen Weise, in welcher die Energie-erhaltenden und absorbirenden Kräfte nebeneinander stehen sehr wahrscheinlich, nichtsdestoweniger aber eine willkürliche Specialisirung des allgemeinsten Falles sind, also der Rechtfertigung durch die Beobachtung bedarf.

Ihre Einführung gestattet wegen der Relation:

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 886, 1883.

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$$

zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned}(A) &= (c_{11}+c_1-c_2-c_3)\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+c_{22}\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}-\frac{\partial \varphi}{\partial x},\\ (B) &= c_{44}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+(c_{55}+c_2-c_3-c_1)\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}+c_{16}\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}-\frac{\partial \varphi}{\partial y},\\ (C) &= c_{77}\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+c_{88}\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}+(c_{99}+c_3-c_1-c_2)\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}-\frac{\partial \varphi}{\partial z},\end{aligned}\right| \quad 7.$$

worin $\varphi = c_1\frac{\partial u'}{\partial x}+c_2\frac{\partial v'}{\partial y}+c_3\frac{\partial w'}{\partial z}$ ist.

Setzt man diese Werthe neben den Energie-erhaltenden Kräften [1]) in die Bewegungsgleichungen, führt für die Constanten (die wie früher erörtert, die Schwingungsdauer enthalten können) beiderseitig übereinstimmende Bezeichnungen ein und faßt $-\varphi$ mit dem entsprechenden Glied der andern Kräfte und dem hydrostatischem Druck zu L zusammen so erhält man folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+B_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+C_{11}\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}+C_{13}\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}+\frac{\partial L}{\partial x}\\ m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= B_{21}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+B_{23}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+C_{21}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+C_{22}\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}+C_{23}\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}+\frac{\partial L}{\partial y}\\ m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= B_{31}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{32}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+C_{31}\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+C_{32}\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}+C_{33}\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}+\frac{\partial L}{\partial z}\end{aligned}\right| \quad 8.$$

während zugleich $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ ist.

Für den Fall der Fortpflanzung ebener Wellen in einer durch μ, ν, π gegebenen Richtung setze sich ich zur Integration:

$$u = M\Phi + M'\tau\Phi',\ v = N\Phi + N'\tau\Phi',\ w = P\Phi + P'\tau\Phi'$$

$$L = \frac{1}{\tau\omega}(Q\tau\Phi' + Q\Phi),$$

$$\text{worin } \Phi = e^{-\frac{\varkappa\rho}{\tau\omega}}\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\rho}{\omega}\right),\ \tau = T/2\pi \text{ und}$$

$$\rho = \mu x + \nu y + \pi z.$$

Die Ausrechnung ergiebt die folgenden 8 Bedingungen:

1) l. c. p. 886.

$$\left.\begin{aligned}
\mu(Q-Q'\varkappa) &= M[\mathrm{B}_1(1-\varkappa^2)+2\varkappa\Gamma_1-m\omega^2]+M'[2\varkappa\mathrm{B}_1-(1-\varkappa^2)\Gamma_1]\\
\nu(Q-Q'\varkappa) &= N[\mathrm{B}_2(1-\varkappa^2)+2\varkappa\Gamma_2-m\omega^2]+N'[2\varkappa\mathrm{B}_2-(1-\varkappa^2)\Gamma_2]\\
\pi(Q-Q'\varkappa) &= P[\mathrm{B}_3(1-\varkappa^2)+2\varkappa\Gamma_3-m\omega^2]+P'[2\varkappa\mathrm{B}_3-(1-\varkappa^2)\Gamma_3]\\
\mu(Q\varkappa+Q') &= M[2\varkappa\mathrm{B}_1-(1-\varkappa^2)\Gamma_1]-M'[\mathrm{B}_1(1-\varkappa^2)+2\varkappa\Gamma_1-m\omega^2]\\
\nu(Q\varkappa+Q') &= N[2\varkappa\mathrm{B}_2-(1-\varkappa^2)\Gamma_2]-N'[\mathrm{B}_2(1-\varkappa^2)+2\varkappa\Gamma_2-m\omega^2]\\
\pi(Q\varkappa+Q') &= P[2\varkappa\mathrm{B}_3-(1-\varkappa^2)\Gamma_3]-P'[\mathrm{B}_3(1-\varkappa^2)+2\varkappa\Gamma_3-m\omega^2]\\
& M\mu+N\nu+P\pi=o,\quad M'\mu+N'\nu+P'\pi=0.
\end{aligned}\right|\quad 9.$$

Hierin ist:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{B}_1 &= B_{11}\mu^2+B_{12}\nu^2+B_{13}\pi^2, & \tau\Gamma_1 &= C_{11}\mu^2+C_{12}\nu^2+C_{13}\pi^2\\
\mathrm{B}_2 &= B_{21}\mu^2+B_{22}\nu^2+B_{23}\pi^2, & \tau\Gamma_2 &= C_{21}\mu^2+C_{22}\nu^2+C_{23}\pi^2\\
\mathrm{B}_3 &= B_{31}\mu^2+B_{32}\nu^2+B_{33}\pi^2, & \tau\Gamma_3 &= C_{31}\mu^2+C_{32}\nu^2+C_{33}\pi^2.
\end{aligned}\right|\quad 10.$$

Schreibt man diese acht Gleichungen in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
-\mu R &= M(i_1-m\omega^2)+M'h_1, & +\mu R' &= Mh_1-M'(i_1-m\omega^2)\\
-\nu R &= N(i_2-m\omega^2)+N'h_2, & +\nu R' &= Nh_2-N'(i_2-m\omega^2)\\
-\pi R &= P(i_3-m\omega^2)+P'h_3, & +\pi R' &= Ph_3-P'(i_3-m\omega^2)\\
& M\mu+N\nu+P\pi=0,\quad M'\mu+N'\nu+P'\pi=0,
\end{aligned}\right|\quad 11.$$

so bemerkt man, daß durch Elimination von M, M', N, N' P, P', R, R' die Gleichung folgt:

$$\begin{vmatrix}
\mu & 0 & i_1-m\omega^2 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \mu & -h_1 & i_1-m\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\nu & 0 & 0 & 0 & i_2-m\omega^2 & h_2 & 0 & 0\\
0 & \nu & 0 & 0 & -h_2 & i_2-m\omega^2 & 0 & 0\\
\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i^3-m\omega^2 & h_3\\
0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_3 & i_3-m\omega^2\\
0 & 0 & \mu & 0 & \nu & 0 & \pi & 0\\
0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \nu & 0 & \pi
\end{vmatrix}=0.\quad 12.$$

Diese Determinante ist nach einem früher mitgetheilten Satze [1]) gleich einer Summe von zwei Quadraten, die also einzeln verschwinden müssen. Hierdurch erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
o &= \mu^2((i_2-m\omega^2)(i_3-m\omega^2)-h_2h_3)+\nu^2((i_3-m\omega^2)(i_1-m\omega^2)-h_3h_1)\\
&\qquad+\pi^2((i_1-m\omega^2)(i_2-m\omega^2)-h_1h_2)\\
o &= \mu^2((i_2-m\omega^2)h_3+(i_3-m\omega^2)h_2)+\nu^2((i_3-m\omega^2)h_1+(i_1-m\omega^2)h_3)\\
&\qquad+\pi^2((i_1-m\omega^2)h_2+(i_2-m\omega^2)h_1).
\end{aligned}\right|\quad 13.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist ω und $\varkappa$ zu bestimmen; die erhaltenen Werthe in (11.) eingesetzt gestatten dann die Bestimmung

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 16, p, 814, 1882.

der zugehörigen Werthe MNP etc. d. h. der Richtung der bezüglichen Schwingungen. Man bemerkt, daß man im Allgemeinen vier elliptisch polarisirte Wellen erhält.

Die Formeln (13) sind aber trotz der schon getroffenen Vereinfachung noch zu allgemein, denn sie führen bei verschwindender Absorption auf ein complicirteres Gesetz für ω, als das Fresnel'sche. Wie früher für durchsichtige Medien gezeigt[1]), haben zwei verschiedene Verfügungen über die 9 Constanten B die Wirkung jenes einfachere Gesetz zu ergeben und zugleich die Fresnel'sche und Neumann'sche Definition der Polarisationsebenen zu liefern. Es erscheint passend, über die Constanten C der absorbirender Kräfte, wegen des eigenthümlichen Verhältnisses, in welchem sie zu den Energie-erhaltenden stehen, die gleichen Verfügungen zu treffen, — abermals eine Specialisirung, die die Beobachtung zu rechtfertigen hat.

Setzt man:

$$B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_1, \quad C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_1$$
$$B_{21} = B_{22} = B_{23} = B_2, \quad C_{21} = C_{22} = C_{23} = C_2$$
$$B_{31} = B_{32} = B_{33} = B_3, \quad C_{31} = C_{32} = C_{33} = C_3,$$

so entspricht das Resultat der Fresnel'schen Anschauung und giebt auch die Resultate der Beobachtung über Absorption in Krystallen in einer damit übereinstimmenden Weise wieder.

Wie indeß schon bei der Betrachtung der durchsichtigen Medien hervorgehoben ist, hat diese Verfügung über die Größen B keine besondre innere Wahrscheinlichkeit und die Betrachtung der Werthe der Constanten C giebt für sie analoge Resultate. $C_{11} = C_{12} = C_{13}$ oder in der früheren Bezeichnung $c_{11} = c_{22} = c_{33}$ genommen, ergäbe z. B. nach (5), daß ein Verschiebungssystem u', welches das eine Mal nur eine Function von x, das andere Mal dieselbe von y, das dritte dieselbe von z ist, die gleiche Energie absorbirt; dies erscheint aber neben der Annahme der krystallographischen Verschiedenheit aller drei Coordinatenaxen gewiß sehr willkürlich.

Weniger bedenklich erscheint diejenige Verfügung, welche zu den Neumann'schen Resultaten führt, nämlich:

$$B_{12} = B_{21} = B_3, \quad B_{23} = B_{32} = B_1, \quad B_{31} = B_{13} = B_2,$$
$$B_{11} = B_3 + B_2 - B_1, \quad B_{22} = B_1 + B_3 - B_2, \quad B_{33} = B_1 + B_2 - B_3,$$

nebst den entsprechenden für die C: **14.**

$$C_{12} = C_{21} = C_3, \quad C_{23} = C_{32} = C_1, \quad C_{31} = C_{13} = C_2,$$
$$C_{11} = C_2 + C_3 - C_1, \quad C_{22} = C_1 + C_3 - C_2, \quad C_{33} = C_1 + C_2 - C_3.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 888, 1883.

Das erste Tripel der Bedingungen für C sagt nämlich aus, daß in der absorbirten Arbeit Ψ_2 nach (5) die Größen $\frac{\partial u'}{\partial y}, \frac{\partial v'}{\partial x}, \frac{\partial v'}{\partial z}, \frac{\partial w'}{\partial y}, \frac{\partial w'}{\partial x}, \frac{\partial u'}{\partial z}$ nur in den Combinationen:

$$\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x},\quad \frac{\partial v'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial y},\quad \frac{\partial w'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y}-\frac{\partial v'}{\partial x},\quad \frac{\partial v'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial y},\quad \frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}$$

vorkommen. Nun sind die ersten drei hiervon eben dieselben, welche allein neben $\frac{\partial u'}{\partial x}, \frac{\partial v'}{\partial y}, \frac{\partial w'}{\partial z}$ die Deformation des Volumenelementes bestimmen, die letzteren aber bedeuten seine Drehungscomponenten um die Coordinatenaxen; daß nur sie in Ψ_2 auftreten hat also einen guten physikalischen Sinn. Das letzte Tripel Bedingungen für die B und C hat zwar keine ebenso anschauliche Bedeutung, enthält aber durchaus nichts an sich Unwahrscheinliches.

Durch Einführung der Relationen (14) kann man nun die obigen Gleichungen auf neue einfachere Formen bringen.

Man erhält nach einiger Rechnung aus (13) die neuen Gleichungen für ω und $\varkappa$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mu^2[(J_2-m\omega^2)(J_3-m\omega^2)-H_2H_3] \\ &\quad+\nu^2[(J_3-m\omega^2)(J_1-m\omega^2)-H_3H_1] \\ &\quad+\pi^2[(J_1-m\omega^2)(J_2-m\omega^2)-H_1H_2], \\ 0 &= \mu^2[(J_2-m\omega^2)H_3+(J_3-m\omega^2)H_2] \\ &\quad+\nu^2[(J_3-m\omega^2)H_1+(J_1-m\omega^2)H_3] \\ &\quad+\pi^2[(J_1-m\omega^2)H_2+(J_2-m\omega^2)H_1], \end{aligned}\right| \quad 15.$$

in denen nun aber J und H die $\mu\nu\pi$ nicht mehr explicite enthalten sondern nur $\varkappa$; und zwar ist:

$$\left.\begin{aligned} J_n &= B_n(1-\varkappa^2)+2\varkappa\frac{C_n}{\tau} \\ H_n &= B_n 2\varkappa-\frac{C_n}{\tau}(1-\varkappa^2). \end{aligned}\right| \quad 16.$$

Da sich auch die i und h durch J und H ausdrücken lassen, so kann man zu den obigen Gleichungen (15) auch die aus (11) durch Einführung dieser Größen folgenden stellen. Sie werden:

$$\left.\begin{aligned} -\mu R &= M[J_2+J_3-(J_1\mu^2+J_2\nu^2+J_3\pi^2)-m\omega^2] \\ &\quad+M'[H_2+H_3-(H_1\mu^2+H_2\nu^2+H_3\pi^2)] \\ -\nu R &= N[J_3+J_1-(J_1\mu^2+J_2\nu^2+J_3\pi^2)-m\omega^2] \\ &\quad+N'[H_3+H_1-(H_1\mu^2+H_2\nu^2+H_3\pi^2)] \end{aligned}\right| \quad 17.$$

$$\left.\begin{aligned}
-\pi R &= P[J_1+J_2-(J_1\mu^2+J_2\nu^2+J_3\pi^2)-m\omega^2] \\
&\quad + P'[H_1+H_2-(H_1\mu^2+H_2\nu^2+H_3\pi^2)] \\
\mu R' &= M[H_2+H_3-(H_1\mu^2+H_2\nu^2+H_3\pi^2)] \\
&\quad - M'[J_2+J_3-(J_1\mu^2+J_2\nu^2+J_3\pi^2)-m\omega^2] \\
\nu R' &= N[H_3+H_1-(H_1\mu^2+H_2\nu^2+H_3\pi^2)] \\
&\quad - N'[J_3+J_1-(J_1\mu^2+J_2\nu^2+J_3\pi^2)-m\omega^2] \\
\pi R' &= P[H_1+H_2-(H_1\mu^2+H_2\nu^2+H_3\pi^2)] \\
&\quad - P'[J_1+J_2-(J_1\mu+J_2\nu^2+J_3\pi^2)-m\omega^2].
\end{aligned}\right| \quad 17.$$

Die Gleichungen (15), (16) und (17) enthalten die Lösung des gestellten Problems.

Wir wenden sie zuerst auf optisch einaxige Krystalle an u. zw. sei die Z-Axe zur Hauptaxe gewählt. Dann ist in den Formeln (15) — (17) $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, also $J_1 = J_2$, $H_1 = H_2$ und $\mu^2 + \nu^2 = \sigma^2$ zu setzen und man gewinnt folgende Wurzelsysteme für die ordinäre und extraordinäre Welle:

$$\left.\begin{aligned}
&a)\quad J_1 = m\omega_o^2, \qquad H_1 = 0; \\
&b)\quad J_1\pi^2 + J_3\sigma^2 = m\omega_e^2, \qquad H_1\pi^2 + H_3\sigma^2 = 0 \quad P = P' = 0.
\end{aligned}\right| \quad 18.$$

Die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind hier mit den Fresnel'schen identisch. Constanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht auch constante Absorption. Hierin liegt das durch die Beobachtung bestätigte Resultat, daß bei einfallendem weißen Lichte die ordinäre Welle in jeder Richtung dieselbe Farbe zeigt, welche man in der Richtung der optischen Axe wahrnimmt[1]). Ausführlich schreiben sich die Gleichungen (18):

$$\left.\begin{aligned}
&a)\quad B_1(1-\varkappa_o^2) + 2\frac{C_1}{\tau}\varkappa_o = m\omega_o^2, \quad 2B_1\varkappa_o - \frac{C_1}{\tau}(1-\varkappa_o^2) = 0. \\
&b)\quad [B_1(1-\varkappa_e^2) + 2\frac{C_1}{\tau}\varkappa_e]\pi^2 + [B_3(1-\varkappa_e^2) + 2\frac{C_3}{\tau}\varkappa_e]\sigma^2 = m\omega_e^2 \\
&\qquad [2B_1\varkappa_e - \frac{C_1}{\tau}(1-\varkappa_e^2)]\pi^2 + [2B_3\varkappa_e - \frac{C_3}{\tau}(1-\varkappa_e^2)]\sigma^2 = 0.
\end{aligned}\right| \quad 18^a.$$

Die Werthe $\varkappa$ ergeben sich hieraus:

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_o &= \sqrt{1+\tau^2\left(\frac{B_1}{C_1}\right)^2} - \tau\frac{B_1}{C_1}, \\
\varkappa_e &= \sqrt{1+\tau^2\left(\frac{B_1\pi^2+B_3\sigma^2}{C_1\pi^2+C_3\sigma^2}\right)^2} - \tau\left(\frac{B_1\pi^2+B_3\sigma^2}{C_1\pi^2+C_3\sigma^2}\right).
\end{aligned}\right| \quad 19.$$

Oder für gegen B kleine Werthe C unter Beschränkung auf Glieder erster Ordnung:

---

1) Haidinger, Pogg. Ann. Bd. 65, p. 1, 1845.

$$a)\quad 2\tau\varkappa_0 = \frac{C_1}{B_1} \qquad b)\quad 2\tau\varkappa_e = \frac{C_1\pi^2 + C_3\sigma^2}{B_1\pi^2 + B_3\sigma_2} \qquad 19^a.$$

Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht stark mit der Richtung variabel, also B_3 und B_1 nicht wesentlich verschieden, so genügt es, dafür einen mittleren Werth einzuführen und zu schreiben:

$$a)\quad 2\tau\varkappa_0 = \frac{C_1}{B} \qquad b)\quad 2\tau\varkappa_e = \frac{C_1\pi^2 + C_3\sigma^2}{B}. \qquad 19^b.$$

Wir wollen das Verhalten einer Platte von der Dicke L aus einem einaxigen absorbirenden Krystall im divergenten polarisirten Lichte untersuchen und dabei in vielbenutzter Weise annehmen, die Platte sei so klein, daß man sie als ein Stück einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Kugelschaale ansehen kann, aus deren Mittelpunkt die Lichtstrahlen ausgehen.

Setze ich dann die gegenseitige Verzögerung des ordinären und extraordinären Strahles in einer Richtung, welche den Winkel γ mit der optischen Axe macht, gleich δ, den Winkel, den in dieser Richtung die Schwingungsebene des Polarisators mit dem Hauptschnitt macht α, den analogen für die Schwingungsrichtung des Analysators β, die einfallende Amplitude A, so wird parallel der Schwingungsebene des Analysators nach dem Austritt aus demselben eine Intensität erhalten werden, welche ist:

$$J = A^2 \Big[\cos^2\alpha\cos^2\beta\, e^{-2\varkappa_0 l_0} + \sin^2\alpha\sin^2\beta\, e^{-2\varkappa_e l_e} + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\, e^{-(\varkappa_0 l_0 + \varkappa_e l_e)}\Big] \qquad 20.$$

Hierin ist kurz gesetzt:

$$\frac{L}{\tau\omega_0} = l_0, \quad \frac{L}{\tau\omega_e} = l_e,$$

und von dem Verlust durch die innere und äußere Reflexion abgesehen.

Da δ mit wachsendem γ selbst wächst, so folgt, daß sich im Allgemeinen abwechselnd helle und dunkle Ringe um die Axe zeigen müssen. Ist dies, trotzdem parallel der optischen Axe die Absorption gering ist, nicht der Fall — wie es Herr Lommel im blauen Licht am Magnesiumplatincyanür beobachtet hat[1]), — so folgt daraus daß in einiger Entfernung von der Axe das δ enthaltende Glied unmerklich werden, d. h. der Absorptionsindex $\varkappa_e$ mit γ wachsen muß. Wegen der Natur der Exponentialgröße ist dabei noch kein besonders schnelles Wachsen nöthig, um in kleiner Entfernung schon das Glied vernachlässigen zu können.

1) E. Lommel, Wied. Ann. Bd. 9, p. 108, 1880.

Führt man diese Eigenschaft von $\varkappa_e$ ein, welche nach dessen Werth (19^b) nur verlangt, daß $C_3 > C_1$ ist, so enthält obige Formel (20) die vollständige Erklärung der Lommel'schen Beobachtungen am Magnesiumplatincyanür.

Nehmen wir zunächst die der Axe unmittelbar benachbarten Richtungen, so ergiebt sich, da dort $\varkappa_e = \varkappa_o$, $l_e = l_o$ ist, die gewöhnliche Formel für durchsichtige Medien und demgemäß bei gekreuzten Schwingungsebenen Dunkelheit, bei parallelen Helligkeit.

Schon in kleiner Entfernung von der Axe ist aber die Formel gültig:

$$J = A^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta\, e^{-2\varkappa_o l_o} \qquad 21.$$

Diese sagt den Inhalt von Herrn Lommel's Beobachtung[1]) aus: »Bei gekreuzten Schwingungsebenen sieht man ein rechtwinkliges Kreuz ohne Interferenzringe.«

»Dreht man nun das Polariscop, so bleibt der zu der Schwingungsrichtung des Polarisators senkrechte Balken des Kreuzes unverändert stehen, während der andere Balken sich mit dem Polariscop dreht, indem er zu der Schwingungsebene desselben normal bleibt.«

»Man erhält also ein schiefwinkliges Kreuz, dessen Arme wie vorher vollkommen dunkel sind,« d. h. J ist gleich Null für $\alpha = 0$ und $\beta = 0$. »Zugleich erscheinen die spitzwinkligen Quadranten dunkler als die stumpfwinkligen.«

»Stellt man endlich die Schwingungsebene des Polariscops parallel zu derjenigen des Polarisators, so bleiben nur noch die auf dieser gemeinsamen Richtung normalen Kreuzarme übrig als zwei dunkle Sectoren, welche durch einen schmalen gegen die Sectoren, scharf begrenzten hellen Zwischenraum von einander getrennt sind.»

Wie aus der Erscheinung im blauen polarisirten Lichte die im weißen sich ableitet, hat Herr Lommel selbst erörtert.

Für den Fall natürliches blaues Licht einfällt und nach dem Durchgang durch einen Analysator betrachtet wird[2]) ergiebt sich die Formel aus (20) indem man den Mittelwerth für alle möglichen Werthe α bildet. Man erhält dann:

$$J = A^2 \cos^2\beta\, e^{-\varkappa_o l_o} \qquad 22.$$

d. h. »man gewahrt im blauen Lichte bei jeder Stellung des Polari-

1) Lommel l. c. p. 109. In den citirten Sätzen ist nur gemäß unserer Auffassung, daß Schwingungs- und Polarisationsrichtung zusammenfallen, das Wort »parallel« überall durch »normal« ersetzt.

2) Analoges gilt für den Fall polarisirtes Licht einfällt und ohne Analysator mit bloßem Auge beobachtet wird.

scops und stets normal zu dessen Schwingungsebene zwei dunkle Büschel . . . ohne Interferenzringe[1])«.

Fällt unpolarisirtes blaues Licht ein und wird mit bloßem Auge beobachtet, so ist auch für alle Werthe β das Mittel in Formel (22) zu nehmen. Die Büschel verschwinden dann und es bleibt nur ein hellerer Fleck in der Richtung der Axe übrig[2]). Daß mit der starken Absorption des extraordinären Strahles für blaues Licht die theilweise Polarisation des durchgegangenen in dem Hauptschnitt, sowie die blaue Farbe des von einfallendem weißen Lichte herrührenden reflectirten direct zusammenhängt, ist nach unserer Theorie ohne weiteres klar.

Die bisher erörterten Phänomen entsprechen dem Falle, daß in dem Werthe von $\varkappa_e$ die Größe $C_3 > C_1$ war. Im umgekehrten Falle

$$C_1 > C_3$$

folgen etwas andere Erscheinungen. $\varkappa_o$ ist dann groß und $\varkappa_e$ nimmt mit wachsendem γ ab, sodaß in der Richtung der Axe aus (20) stets Dunkelheit folgt und erst in einiger, möglicherweise ziemlich bedeutender Entfernung das Glied

$$J = A^2 \sin^2\beta \sin^2\alpha \, e^{-2\varkappa_e l_e}$$

merkliche Werthe bekömmt. Hier würden also zwei dunkele Büschelpaare p a r a l l e l zur Schwingungsebene des Polarisators und Analysators liegen, desgl. wenn natürliches Licht einfällt e i n Büschelpaar p a r a l l e l der Schwingungsebene des Analysators auftreten. Auch diese Erscheinung ist stets von Dunkelheit in der Richtung der Axe begleitet. Die Voraussetzung $C_1 > C_3$ ist beim Turmalin erfüllt und demgemäß der dunkle Fleck in der Richtung der Axe auch beobachtet worden[3]); eine Notiz über die Büschel bei Anwendung polarisirten Lichtes habe ich nicht finden können.

Wir gehen nun zu o p t i s c h z w e i a x i g e n Krystallen (nach der gemachten Beschränkung zunächst nur solchen des rhombischen Systems) über.

Da hier die allgemeinen und sehr complicirten Formeln (15)—(17) eintreten, so betrachten wir zunächst specielle Fälle und zwar zuerst die Fortpflanzung des Lichtes parallel den 3 Hauptaxen.

1) Es wird für die

$$X\text{-Axe}, \ \nu = \pi = 0, \ \mu = 1, \ M = M' = 0.$$

---

1) L o m m e l l. c. p. 111, schon früher beobachtet von B e r t r a n d, Zeitschrift f. Kryst. Bd. 3 p. 645, 1879.

2) B e r t r a n d l. c.

3) B e r t r a n d l. c.

Daher:

$$(J_2 - m\omega^2)(J_3 - m\omega^2) - H_2 H_3 = 0, \quad (J_2 - m\omega^2) H_3 + (J_3 - m\omega^2) H_2 = 0$$
$$o = N(J_3 - m\omega^2) + N'H_3, \quad 0 = NH_3 - N'(J_3 - m\omega^2)$$
$$o = P(J_2 - m\omega^2) + P'H_2, \quad 0 = PH_2 - P'(J_2 - m\omega^2).$$

Also 2 Wurzelsysteme:

$$\left.\begin{array}{ll} a) & J_2 = m\omega^2,\ H_2 = 0,\ N = N' = 0, \text{ also } \parallel Z \\ b) & J_3 = m\omega^2,\ H_3 = 0,\ P = P' = 0, \text{ also } \parallel Y. \end{array}\right| \quad 23^a.$$

Dieselbe Betrachtung giebt für die andern Hauptrichtungen folgende Werthpaare:

2) Y-Axe, $\mu = \pi = 0,\ \nu = 1,\ N = N' = 0,$

$$\left.\begin{array}{ll} a) & J_3 = m\omega^2,\ H_3 = 0,\ P = P' = 0, \text{ also } \parallel X \\ b) & J_1 = m\omega^2,\ H_1 = 0,\ M = M' = 0, \text{ also } \parallel Z. \end{array}\right| \quad 23^b.$$

3) Z-Axe, $\mu = \nu = 0,\ \pi = 1,\ P = P' = 0,$

$$\left.\begin{array}{ll} a) & J_1 = m\omega^2,\ H_1 = 0,\ M = M' = 0, \text{ also } \parallel Y \\ b) & J_2 = m\omega^2,\ H_2 = 0,\ N = N' = 0, \text{ also } \parallel X. \end{array}\right| \quad 23^c.$$

Diese Zusammenstellung zeigt, daß in den 3 Hauptrichtungen der gleichen Geschwindigkeit (gegeben durch ein bestimmtes J_h) auch die gleiche Absorption entspricht. Oder mit andern Worten: diejenigen Wellen, welche bei zu einander senkrechter Fortpflanzungsrichtung auch zu einander senkrechte Schwingungen haben, werden gleich stark absorbirt, zeigen also die gleiche Farbe.

Damit ist das experimentelle Resultat, welches zuerst von Haidinger[1]) und nach ihm von Anderen fälschlich gegen die Neumann'sche Definition der Polarisationsebene geltend gemacht ist, als mit dieser Definition durchaus verträglich streng aus der Theorie abgeleitet, und anscheinend sogar wahrscheinlicher gemacht, als das entgegengesetzte[2]).

---

1) Haidinger, Pogg. Ann. Bd. 86, p. 131, 1852. reproducirt von Mousson, Physik, Bd. II p. 630, 1872. Müller-Pouillet, Physik Bd. I p. 804, 1864.

2) Ich kann den Beweis, welchen Herr Lommel (Wied. Ann. Bd. 8 p. 634, 1879.) für die Fresnel'sche Ansicht anführt nicht für sicherer halten, als den Haidingers. Bei den angezogenen Fluorescenz-Erscheinungen dringt das Licht doch in endliche Tiefen des fluorescirende Medium ein und tritt aus endlichen Tiefen aus; es erscheint demnach durchaus nicht selbstverständlich, daß die Fluorescenz derselben Krystallfläche nur von der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes abhängt. Wie aber die theoretische Behandlung einer zu erklärenden Erscheinung die entgegengesetzte Entscheidung wahrscheinlich machen kann, als die directe Anschauung der Erscheinung selbst, wird durch das oben behandelte Problem bedeutungsvoll illustrirt.

Ferner seien die Hauptebenen betrachtet.

Für die XZ-Ebene ist: $\nu = 0$, $\mu M + \pi P = 0$, $\mu M' + \pi P' = 0$.

Man erhält demgemäß aus den zwei Gleichungen (15) folgende zwei zusammengehörige Paare neuer, welche den beiden Wellen entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} &a)\quad J_2 = m\omega^2,\ H_2 = 0 \text{ dazu nach (17) } N = N' = 0; \\ &\qquad \text{diese Welle schwingt also parallel der } XZ\text{-Ebene.} \\ &b)\quad J_1\pi^2 + J_3\mu^2 = m\omega^2,\quad H_1\pi^2 + H_3\mu^2 = 0. \end{aligned}\right| \quad 24.$$

Die Formeln für die andern Hauptebenen folgen hieraus durch cyclische Vertauschung der Indices und der $\mu\nu\pi$ und MNP. Man bemerkt, daß in den Hauptebenen sich nur zwei Wellen fortpflanzen und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch Formeln gegeben werden, die den bezüglichen Fresnel'schen völlig analog gebildet sind. Constanter Geschwindigkeit entspricht constante Absorption.

Die Gleichungen für die beiden Wurzeln $\varkappa$ lassen sich in diesem Falle auch leicht lösen. Man erhält die beiden Werthe:

$$\left.\begin{aligned} &a)\quad \varkappa = \sqrt{1 + \tau^2\left(\frac{B_2}{C_2}\right)^2} - \tau\frac{B_2}{C_2} \\ &b)\quad \varkappa = \sqrt{1 + \tau^2\left(\frac{B_1\pi^2 + B_3\mu^2}{C_1\pi^2 + C_3\mu^2}\right)^2} - \tau\frac{B_1\pi^2 + B_3\mu^2}{C_1\pi^2 + C_3\mu^2}, \end{aligned}\right| \quad 25.$$

oder für so kleine Werthe C, daß man ihr Quadrat neben dem der B vernachlässigen kann:

$$a)\quad 2\tau\varkappa = \frac{C_2}{B_2} \qquad b)\quad 2\tau\varkappa = \frac{C_1\pi^2 + C_3\mu^2}{B_1\pi^2 + B_3\mu^2}; \quad \Big| \quad 25^a.$$

das für die übrigen Hauptebenen Gültige folgt hieraus durch cyclische Vertauschung der Indices.

Ist $B_3 > B_2 > B_1$ so enthält die XZ-Ebene die optischen Axen; ihre Winkel χ mit der Z-Axe sind gegeben durch:

$$\cos^2\chi = \frac{B_3 - B_2}{B_3 - B_1},\quad \sin^2\chi = \frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1}. \quad \Big| \quad 26.$$

Man bemerkt, daß sich bei absorbirenden optisch zweiaxigen Krystallen in der Richtung der optischen Axen zwar für die Geschwindigkeiten nur ein Werth ergiebt, nicht aber für die Absorptionsindices. Bezeichnet man die parallel der XZ-Ebene schwingende Welle in der Richtung der optischen Axe mit o, die normal dazu mit e, so wird

$$2\tau\varkappa_o = \frac{C_2}{B_2},\quad 2\tau\varkappa_e = \frac{C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)}{B_2(B_3 - B_1)}. \quad \Big| \quad 27.$$

Bei stark verschiedenen Werthen C_1, C_2, C_3 wird also auch das parallel einer optischen Axe fortgepflanzte Licht mehr oder weniger polarisirt sein. Daß dies der Wirklichkeit entspricht, kann man leicht z. B. am Epidot wahrnehmen.

Für beliebige Richtungen werden die Gesetze für ω und $\varkappa$ so complicirt, daß man kaum für die Vergleichung mit der Beobachtung geeignete Formeln erhalten dürfte, so lange man beliebig große Werthe $\varkappa$ zuläßt. Da indessen bei allen Krystallen, die im durchgehenden Licht beobachtet sind, $\varkappa$ sehr klein ist, so genügt für sie vollständig eine Annährung, welche die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf C_1, C_2, C_3 und $\varkappa$ vernachlässigt.

Dieselbe liefert die folgenden einfacheren Formeln aus den Gleichungen (15):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mu^2}{B_1-m\omega^2}+\frac{\nu^2}{B_2-m\omega^2}+\frac{\pi^2}{B_3-m\omega^2}=0\\ &2\tau\varkappa=\frac{\mu^2[C_3(B_2-m\omega^2)+C_2(B_3-m\omega^2)]+\nu^2[C_1(B_3-m\omega^2)+C_3(B_1-m\omega^2)]+\pi^2[C_2(B_1-m\omega^2)+C_1(B_2-m\omega^2)]}{\mu^2[B_3(B_2-m\omega^2]+B_2(B_3-m\omega^2)]+\nu^2[B_1(B_3-m\omega^2)+B_3(B_1-m\omega^2)]+\pi^2[B_2(B_1-m\omega^2)+B_1(B_2-m\omega_2)]}\end{aligned}\right\} \quad 28.$$

Das Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten wird also hiernach mit dem Fresnel'schen identisch und dies macht begreiflich, daß die Beobachtungen an gefärbten Krystallen dasselbe bestätigt haben.

Die Amplituden $M'N'P'$ werden mit den C zugleich unendlich klein erster Ordnung. Da die Wurzeln der ersten Gleichung (28) sich bekanntlich in rationaler Form gesondert darstellen lassen, wenn man statt der Winkel der Wellennormale gegen die Symmetrieaxen des Krystalls diejenigen gegen die optischen Axen einführt, so kann man in der benutzten Annährung dasselbe mit den zugehörigen Absorptionsindices $\varkappa$ thun.

Nennt man die Winkel der Wellennormale mit den beiden optischen Axen u und v, so ist bekanntlich für die sogenannte ordinäre und extraordinäre Welle:

$$\left.\begin{aligned} m\omega_o^2 &= B_1+(B_3-B_1)\sin^2\frac{u-v}{2},\\ m\omega_e^2 &= B_1+(B_3-B_1)\sin^2\frac{u+v}{2}.\end{aligned}\right\} \quad 29.$$

Außerdem ist: $\mu\sqrt{\dfrac{B_2-B_1}{B_3-B_1}}=\sin\dfrac{u-v}{2}\cdot\sin\dfrac{u+v}{2}$,

$$\pi\sqrt{\frac{B_3-B_2}{B_3-B_1}} = \cos\frac{u-v}{2}\cdot\cos\frac{u+v}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\tau\varkappa_o &= \frac{\left\{\begin{aligned}&(B_3-B_1)\sin^2\frac{u-v}{2}\cdot\cos^2\frac{u-v}{2}\left(\frac{C_1-C_2}{B_1-B_2}\sin^2\frac{u+v}{2}+\frac{C_2-C_3}{B_2-B_3}\cos^2\frac{u+v}{2}\right)\\ &\qquad+C_1\cos^2\frac{u-v}{2}\cdot\sin^2\frac{u+v}{2}-C_3\sin^2\frac{u-v}{2}\cdot\cos^2\frac{u+v}{2}\end{aligned}\right\}}{\left(B_3\sin^2\frac{u-v}{2}+B_1\cos^2\frac{u-v}{2}\right)\left(\cos^2\frac{u-v}{2}-\cos^2\frac{u+v}{2}\right)}\\
\tau\varkappa_e &= \frac{\left\{\begin{aligned}&(B_3-B_1)\sin^2\frac{u+v}{2}\cdot\cos^2\frac{u+v}{2}\left(\frac{C_1-C_2}{B_1-B_2}\sin^2\frac{u-v}{2}+\frac{C_2-C_3}{B_2-B_3}\cos^2\frac{u-v}{2}\right)\\ &\qquad+C_1\cos^2\frac{u+v}{2}\sin^2\frac{u-v}{2}-C_3\cos^2\frac{u-v}{2}\sin^2\frac{u+v}{2}\end{aligned}\right\}}{\left(B_3\sin^2\frac{u+v}{2}+B_1\cos^2\frac{u+v}{2}\right)\left(\cos^2\frac{u+v}{2}-\cos^2\frac{u-v}{2}\right)}
\end{aligned}\right\} \quad 30.$$

Diese Formeln geben die Absorption beider Wellen in beliebigen Richtungen. Setzt man hinein $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, $u = v$, so gelangt man zu:

$$2\tau\varkappa_o = \frac{C_1}{B_1},\quad 2\tau\varkappa_e = \frac{C_1\cos^2 u + C_3\sin^2 u}{B_1\cos^2 u + B_3\sin^2 u},$$

d. h. zu den obigen Formeln (19[a]) für einaxige Krystalle.

Besondere Wirkungen der Absorption werden in optisch zweiaxigen Krystallen in der unmittelbaren Umgebung der optischen Axen beobachtet. Um die Formeln dafür abzuleiten, will ich eine Richtung betrachten, die den gegen 2χ kleinen Winkel u mit der einen optischen Axe macht und in einer Ebene liegt, die um den Winkel ψ gegen die Ebene XZ d. h. die der optischen Axen geneigt ist. Dabei mag $\psi = 0$ sein, wenn die betrachtete Richtung nach der Z-Axe hin liegt. Da 2χ der Winkel der optischen Axen ist, so folgt:

$$v = 2\chi - u\cos\psi$$

und, wenn man die Quadrate von u vernachlässigt, erhält man aus den Formeln (30) die für Richtungen in der Nähe der einen optischen Axe gültigen:

$$
\left.\begin{aligned}
2\tau\varkappa_o &= \frac{[C_1(B_3-B_2)+C_3(B_2-B_1)]\cos^2\frac{\psi}{2}+C_2(B_3-B_1)\sin^2\frac{\psi}{2}}{B_2(B_3-B_1)}\\
2\tau\varkappa_e &= \frac{[C_1(B_3-B_2)+C_3(B_2-B_1)]\sin^2\frac{\psi}{2}+C_2(B_3-B_1)\cos^2\frac{\psi}{2}}{B_2(B_3-B_1)}
\end{aligned}\right| \quad 31.
$$

oder in anderer Form:

$$
\left.\begin{aligned}
2B_2\tau\varkappa_o &= (C_1\cos^2\chi + C_3\sin^2\chi)\cos^2\frac{\psi}{2} + C_2\sin^2\frac{\psi}{2}\\
2B_2\tau\varkappa_e &= (C_1\cos^2\chi + C_3\sin^2\chi)\sin^2\frac{\psi}{2} + C_2\cos^2\frac{\psi}{2}\,.
\end{aligned}\right| \quad 31.
$$

Sie ergeben $\varkappa_o$ und $\varkappa_e$ von ϕ, nicht aber von u abhängig, und zeigen, daß wenn man aus der XZ-Ebene heraus in einem engen Kreiskegel um die optische Axe herumgeht bis wieder in die XZ-Ebene, $\varkappa_o$ sich ebenso ändert, als $\varkappa_e$ beim Gehen in der entgegengesetzten Richtung.

Für die optische Axe selbst werden diese Formeln unbestimmt, weil dort ψ seine Bedeutung verliert; man muß daher für diese Richtung die Formeln (27) benutzen, welche ergeben, daß der in der XZ-Ebene schwingenden Welle entspricht:

$$
2\tau\varkappa_o' = \frac{C_2}{B_2}
$$

der senkrecht dazu:

$$
2\tau\varkappa_e' = \frac{C_1(B_3-B_2)+C_3(B_2-B\;)}{B_2(B_3-B_1)} \quad 27.
$$

oder auch:

$$
\left.\begin{aligned}
2B_2\tau\varkappa_o' &= C_2\\
2B_2\tau\varkappa_e' &= C_1\cos^2\chi + C_3\sin^2\chi.
\end{aligned}\right| \quad 27^a.
$$

Man kann hiernach die Werthe $\varkappa$ für die optischen Axen aus den allgemeinen Ausdrücken (31) erhalten indem man $\psi = \pi$ setzt.

Für die Discussion bieten sich außer dem singulären Fall constanter Absorption, für welchen $C_1 = C_2 = C_3 = C$ und daher $2\tau\varkappa_o = 2\tau\varkappa_e = C/B_2$ ist, besonders die zwei speciellen Fälle, daß in den Gleichungen (31) entweder der erste oder der zweite Factor des Zählers den anderen an Größe bedeutend übertrifft, sodaß man diesen verschwindend setzen kann. Wir unterscheiden sie in folgender Weise:

I. Specialfall: $C_2 = 0$, d. h. die in der Ebene der optischen Axen fortgepflanzte und ihr parallel schwingende Welle wird nur

unmerklich absorbirt, wie dies angenährt beim Andalusit stattfindet. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_o &= k\cos^2\frac{\phi}{2}, \quad \varkappa_e = k\sin^2\frac{\phi}{2} \text{ und} \\ k &= \frac{C_1(B_3-B_2)+C_3(B_2-B_1)}{2\tau B_2(B_3-B_1)}. \end{aligned}\right| \quad 32.$$

In der Richtung der optischen Axe ist nach der obigen Regel:

$$\varkappa_o' = 0, \quad \varkappa_e' = k.$$

II. Specialfall: $C_1 = C_3 = 0$, d. h. die in der Ebene der optischen Axen fortgepflanzte und dazu normal schwingende Welle wird nur unmerklich absorbirt, wie dies für gewisse Farben angenährt beim Epidot der Fall ist[1]). Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_o &= k\sin^2\frac{\phi}{2}, \quad \varkappa_e = k\cos^2\frac{\phi}{2} \text{ und} \\ k &= \frac{C_2}{2\tau B_2}, \end{aligned}\right| \quad 33.$$

also in der Richtung der optischen Axe:

$$\varkappa_o' = k, \quad \varkappa_e' = 0.$$

Betrachtet man eine Platte von der Dicke L senkrecht zu einer optischen Axe geschnitten in einer so kleinen Ausdehnung, daß man sie wiederum als Stück einer Kugelschaale um die Lichtquelle als Mittelpunkt ansehen kann, im Polarisationsapparat, bezeichnet mit α den Winkel der Schwingungsebene des Polarisators mit der Ebene der optischen Axen, mit β den analogen Winkel für den Analysator, so ist die beobachtete Intensität gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} J &= \\ A^2\Big[&\sin^2\left(\alpha-\frac{\phi}{2}\right)\sin^2\left(\beta-\frac{\phi}{2}\right)e^{-2\varkappa_o l_o} + \cos^2\left(\alpha-\frac{\phi}{2}\right)\cos^2\left(\beta-\frac{\phi}{2}\right)e^{-2\varkappa_e l_e} \\ &+ 2\sin\left(\alpha-\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\phi}{2}\right)\cos\delta\, e^{-(\varkappa_o l_o+\varkappa_e l_e)}\Big] \end{aligned}\right| \quad 34.$$

Hierin ist δ der Gangunterschied der beiden in der durch u und ϕ gegebenen Richtung fortgepflanzten Wellen, deren Schwingungsebenen resp. die Winkel $-(\pi-\phi)/2$ und $\phi/2$ mit der Ebene der optischen Axen machen. Ferner ist kurz gesetzt:

---

1) Der Epidot ist zwar nicht rhombisch sondern monoklinisch, die obigen Entwickelungen sind also nicht streng auf ihn anwendbar. Indessen dürfte es, so lange die Winkel zwischen den Elasticitäts- und Absorptionsaxen nur klein sind, unbedenklich sein auf ihn zu exemplificiren, zumal wenn es sich nicht um die Aufstellung und Prüfung quantitativer Gesetze handelt.

$$L/\tau\omega_o = l_o, \quad L/\tau\omega_e = l_e.$$

In der Richtung der optischen Axe selbst aber gilt, da auch da zwei Componenten in verschiedener Intensität fortgepflanzt werden

$$J' = A^2\left(\cos\alpha\cos\beta\, e^{-\varkappa_o' l_o'} + \sin\alpha\sin\beta\, e^{-\varkappa_e' l_e'}\right)^2 \qquad | \; 34^a.$$

Man kann also auch auf die Intensität J die obige Regel anwenden, daß man den für die Richtung der optischen Axen gültigen Werth durch Einführung von $\phi = \pi$, außerdem von $\delta = 0$ erhält.

Da $\cos\delta$ mit wachsender Entfernung u von der optischen Axe periodisch Maxima und Minima erreicht, so erhält man im Allgemeinen helle und dunkle Ringe um die Axen. Der Einfluß der Absorption auf die Erscheinung stellt sich am klarsten heraus, wenn man die Platte so dick nimmt, daß das Ringsystem verschwindet, indem die in $\cos\delta$ multiplicirte Exponentialgröße in Formel (34) sehr klein wird.

Dann sind trotzdem die beiden ersten Glieder in (34) beizubehalten, weil ihre Exponenten in gewissen Richtungen sehr klein werden können, der des dritten nach seiner Bedeutung (31)—(33) aber nicht.

Zunächst sei Polarisator und Analysator gekreuzt, also

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2},$$

dann folgt:

$$J = \frac{A^2}{4}\sin^2(2\alpha - \phi)\left(e^{-2\varkappa_o l_o} + e^{-2\varkappa_e l_e}\right)$$

oder in derselben Annährung

$$J = \frac{A^2}{4}\sin^2(2\alpha - \phi)\left(e^{-\varkappa_o l_o} + e^{-\varkappa_e l_e}\right)^2 \qquad | \; 35.$$

daraus durch Einführung von $\phi = \pi$:

$$J' = \frac{A^2}{4}\sin^2 2\alpha\left(e^{-\varkappa_o' l_o'} + e^{-\varkappa_e' l_e'}\right)^2 \qquad | \; 35^a.$$

Da α der Winkel der einfallenden Schwingungsebene, ϕ das Azimuth der betrachteten Richtung gegen die Ebene der optischen Axen ist, so giebt der erste Factor von J die Intensität Null in Ebenen, die durch $\phi = 2\alpha$ definirt sind, d.h. für $\alpha \doteq 0$ oder $\pi/2$ (Normallage) in die Ebene der optischen Axen fallen und bei einer Drehung des Krystalles gegen die Schwingungsebene des Polarisators sich doppelt so schnell gegen diesen drehen, bei $\alpha = \pi/4$ (Diagonallage) also normal gegen die Ebene der optischen Axen stehen u. s. f.

Dies sind die gewöhnlichen dunkeln Curven, welche auch durch-



sichtige Krystalle im Polarisationsapparat zeigen. Doch erscheinen sie in der Richtung der optischen Axe durch die Absorption modificirt, denn Formel (35ª) zeigt, daß sie in der Diagonallage des Krystalls ($\alpha = \pi/4$) dort unterbrochen sind durch eine helle Stelle und nur in der Normallage ($\alpha = 0$ oder $\pi/2$) sich durch die optischen Axen fortsetzen. Diese Erscheinung ist bei vielen Krystallen zu beobachten, die zu schwach absorbiren, um das Folgende auch zu zeigen.

J hängt nämlich auch noch von dem zweiten Factor in (35) ab, welcher, wie man leicht nachweisen kann, ganz allgemein für alle Werthe der Absorptionsconstanten C

$$\text{ein Maximum für } \phi = 0 \text{ und } \pi,$$

$$\text{ein Minimum für } \phi = \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{3\pi}{2}$$

besitzt. Es ergeben sich demnach allgemein für alle Lagen der Krystallplatte im Polarisationsapparat dunkle Büschel in der Richtung normal zur Ebene der optischen Axen. Man erkennt dieselben am deutlichsten, wenn sie in den Raum zwischen die intensiveren Minima fallen, welche durch den ersten Factor gegeben sind, d. h. in der Normallage der Krystallplatte, aber sie sind auch in den andern Lagen zu bemerken. Sie drehen sich zusammen mit der Krystallplatte.

Die Beobachtung bestätigt diese Schlüsse in allen Einzelheiten. —

Stehen Polarisator und Analysator parallel, so ist $\alpha = \beta$ also unter der Annahme beträchtlicher Dicke der Platte:

$$J = A^2\left[\sin^4\left(\alpha-\frac{\phi}{2}\right)e^{-2\varkappa_0 l_0}+\cos^4\left(\alpha-\frac{\phi}{2}\right)e^{-2\varkappa_e l_e}\right], \qquad 36.$$

in der Richtung der optischen Axe

$$J' = A^2\left[\cos^4\alpha\, e^{-2\varkappa'_0 l'_0}+\sin^4\alpha\, e^{-2\varkappa'_e l'_e}\right]. \qquad 36^a.$$

Dieser Fall wird am bequemsten mit dem folgenden zusammengefaßt, daß entweder der Polarisator oder der Analysator beseitigt ist, man z. B. nur eine Turmalinplatte vor oder hinter die Krystallplatte hält. Die Formel hierfür folgt aus (34) indem man den Mittelwerth für alle möglichen Werthe α oder β nimmt, und lautet:

$$J = \frac{A^2}{2}\left[\sin^2\left(\alpha-\frac{\phi}{2}\right)e^{-2\varkappa_0 l_0}+\cos^2\left(\alpha-\frac{\phi}{2}\right)e^{-2\varkappa_e l_e}\right] \qquad 37.$$

$$J' = \frac{A^2}{2}\left[\cos^2\alpha\, e^{-2\varkappa'_0 l'_0}+\sin^2\alpha\, e^{-2\varkappa'_e l'_e}\right]. \qquad 37^a.$$

Die Vergleichung der Gleichungen (36) und (37) zeigt zunächst das Resultat:

Die Erscheinung bei parallelen Polarisationsebenen ist im Wesentlichen identisch mit derjenigen, welche man nach Entfernung des Polarisators oder Analysators erhält.

Auch dies merkwürdige Resultat bestätigt die Beobachtung.

Ferner zeigt sich bei näherem Eingehen, daß in diesen Fällen (36) und (37) verschiedenartig absorbirende Krystalle verschiedene Erscheinungen geben.

Wir betrachten demgemäß die beiden Typen Andalusit und Epidot gesondert.

I. Für den Typus Andalusit ist nach (32):

$$\varkappa_o = k\cos^2\frac{\phi}{2}, \qquad \varkappa_e = k\sin^2\frac{\phi}{2},$$

also wird, für die zwei Hauptfälle, daß die Ebene des Polarisators parallel oder normal zur optischen Axen-Ebene ist ($\alpha = 0$ oder $= \pi/2$):

$$J_o = \frac{A^2}{2}\left(\sin^2\frac{\phi}{2}\,e^{-2l_o k\cos^2\frac{\psi}{2}} + \cos^2\frac{\phi}{2}\,e^{-2l_e k\sin^2\frac{\psi}{2}}\right), \qquad 38.$$

in der Richtung der optischen Axe aber, falls man k und L hinreichend groß nimmt um

$e^{-2\varkappa l}$ neben 1 zu vernachlässigen:

$$J_o' = \frac{A^2}{2}. \qquad 38^a.$$

Ferner analog:

$$J_{\frac{\pi}{2}} = \frac{A_2}{2}\left(\cos^2\frac{\phi}{2}\,e^{-2l_o k\cos^2\frac{\psi}{2}} + \sin^2\frac{\phi}{2}\,e^{-2l_e k\sin^2\frac{\psi}{2}}\right), \qquad 39.$$

$$J_{\frac{\pi}{2}}' = 0. \qquad 39^a.$$

II. Für den Typus Epidot ist nach (33):

$$\varkappa_o = k\sin^2\frac{\psi}{2}, \qquad \varkappa_e = k\cos^2\frac{\psi}{2},$$

also für dieselben Hauptfälle und unter denselben Voraussetzungen über k und L:

$$J_o = \frac{A^2}{2}\left[\sin^2\frac{\psi}{2}\,e^{-2l_o k\sin^2\frac{\psi}{2}} + \cos^2\frac{\psi}{2}\,e^{-2l_e k\cos^2\frac{\psi}{2}}\right], \qquad 40.$$

$$J_o' = 0, \qquad 40^a.$$

$$J_{\frac{\pi}{2}} = \frac{A^2}{2}\left[\cos^2\frac{\psi}{2}\,e^{-2l_o k\sin^2\frac{\psi}{2}} + \sin^2\frac{\psi}{2}\,e^{-2l_e k\cos^2\frac{\psi}{2}}\right], \qquad 41.$$



$$J'_{\frac{\pi}{2}} = \frac{A^2}{2}. \qquad 41^a.$$

Die Vergleichung dieser Formelsysteme (38)—(41) zeigt das weitere durch die Beobachtung bestätigte Resultat:

Die Krystalle, deren Absorption dem Typus Epidot entspricht, verhalten sich, wenn ihre optische Axenebene parallel der Schwingungsebene des Polarisators ist, ebenso, wie die des Typus Andalusit bei gekreuzten Ebenen und umgekehrt[1]).

Die beiden Grunderscheinungen selbst wollen wir aus (38) und (39) erschließen.

Da e^{-2lk} neben 1 vernachlässigt wird, so wird für Werthe von ϕ nahe gleich 0 die erste Exponentialgröße zu vernachlässigen sein, für Werthe nahe π die zweite. Für mittlere Werthe werden beide sehr kleine nahe gleiche Werthe besitzen.

Im Falle der Gleichung (38), wo also $\alpha = 0$ ist, nehmen die Factoren der Exponentialgrößen zugleich mit diesen selbst den größten und kleinsten Werth an, man erhält also einen dunkeln Büschel normal zur Ebene der optischen Axen ($\phi = \pi/2$) und ein helles Feld ihr parallel, welches sich auch durch das Bild der optischen Axe hin fortsetzt.

Im Falle der Gleichung (39), entsprechend $\alpha = \pi/2$, nehmen die Factoren der Exponentialgrößen aber ihr Maximum in denjenigen Richtungen an, wo diese ihr Minimum haben, und umgekehrt; beide wirken sich also entgegen. In Folge dessen wird man mäßig dunkele Büschel sowohl normal als parallel zur Ebene der optischen Axen wahrnehmen; das Bild der optischen Axe selbst ist dunkel.

Die erste Erscheinung entspricht ungefähr der im Polarisationsapparat bei gekreuzten Schwingungsebenen erhaltenen, wenn der Krystall in der Diagonallage liegt, die letztere, wenn er in der Normallage liegt. Aber während bei gekreuzten Schwingungsebenen jedes der beiden Bilder bei einer Drehung des Krystalls um 360° viermal auftritt, zeigt es sich bei parallelen Schwingungsebenen oder nach Entfernung des einen polarisirenden Theiles, nur zweimal. Auch dies bestätigt das Experiment vollkommen. —

Beobachtet man endlich die Krystallplatten ganz ohne Polarisationsapparat, so gilt die Formel, welche aus (37) durch Bildung des Mittelwerthes für alle α hervorgeht:

---

1) A. Bertin, Ann. de chimie (5) Bd. 15. p. 396, 1878.

$$J = \frac{A^2}{4}\left(e^{-2\varkappa_o l_o} + e^{-2\varkappa_e l_e}\right) \quad \Big| \quad 41.$$

und falls die eine der beiden in der Richtung der optischen Axen fortgepflanzten Wellen stark, die andere nur unmerklich absorbirt wird, für jene Richtung:

$$J' = \frac{A^2}{4}. \quad \Big| \quad 41^a.$$

Diese Formeln geben für alle Gattungen ungleich absorbirender Krystalle dunkle Büschel normal zur Ebene der optischen Axen mit hellen Axenbildern, wie sie bereits von Brewster[1]) beobachtet sind und beim Andalusit, Epidot u. A. leicht wahrgenommen werden können, wenn man durch eine geeignet geschnittene Platte nach dem hellen Himmel blickt.

Was die schwachen Ringe anbetrifft, welche man nach Beobachtungen von Bertin[2]) und Anderen um die Richtung der optischen Axen mitunter wahrnehmen kann, auch wenn man durchaus mit natürlichem Lichte arbeitet, so ist ohne Weiteres klar, daß sie kein reines Absorptionsphänomen sein können, sondern auf Interferenz beruhen. Dazu ist nöthig, daß auf irgend eine Weise die beiden den Krystall in derselben Richtung durchlaufenden, senkrecht zueinander polarisirten Wellen aus ursprünglich palarisirtem Lichte entstanden sind und zuletzt auf eine gemeinsame Polarisationsebene zurückgeführt werden, denn bekanntlich kommt unter anderen Umständen keine Interferenz zu Stande. Herr Mallard[3]) legt um dies zu erklären der Oberflächenschicht der Krystallplatte eine polarisirende Wirkung bei, aber eine solche ist direkt nicht nachgewiesen und daher würde ihre Annahme die Schwierigkeit nicht lösen, sondern nur verlegen: es wäre dann eben diese polarisirende Wirkung zu erklären.

In vielen Fällen dürfte sich die Erscheinung durch die in Folge mehrfacher innerer Reflexion die Platten öfter als ein Mal durchsetzenden Wellen in folgender Weise erklären.

Da bei jedem Durchgang durch Absorption, und bei jeder Reflexion durch Theilung der Welle eine neue Schwächung eintritt, so genügt es, die Wellen zu betrachten, die nur drei Mal die Platte passirt haben, also nächst der direct durchgegangenen die größte Intensität haben.

---

1) Brewster, Phil. Trans. Bd. I. p. 11, 1819.
2) Bertin, l. c. p. 412.
3) S. Mallard, Z.-Schr. f. Kryst. Bd. 3. p. 646, 1879.

Von der direct durchgegangenen ordinären Welle (o), welche ich zunächst betrachte, rühren in dem im Innern im Allgemeinen schief reflectirten Licht zwei nahe senkrecht zu einander polarisirte Wellen her, die ich (oo) und (oe) nenne. Sie gewinnen auf den Rückweg zur ersten Grenze einen Gangunterschied, entsprechend ihrer verschiedenen Geschwindigkeit. Dort werden sie abermals reflectirt und geben vier Componenten nach zwei nahe zu einander senkrechten Polarisationsrichtungen: (ooo), (ooe), (oeo), (oee). Die erste und dritte, die zweite und vierte, als parallel schwingend, vermögen zu interferiren und geben also zwei senkrechte Componenten:

$$[(ooo) + (oeo)] \quad \text{und} \quad [(ooe) + (oee)].$$

Von der direct durchgehenden extraordinären Welle (e) rühren ähnlich zwei Componenten her:

$$[(eoo) + (eeo)] \quad \text{und} \quad [(eoe) + (eee)];$$

es treten also im Ganzen vier Wellen aus.

Im convergenten Licht würde, weil jede dieser Wellen aus zwei Theilen mit einem von der Neigung abhängigen Gangunterschied besteht, jede ein Ringsystem um die optische Axe geben und zwar die erste und vierte Welle eines, wie es im Polarisationsapparat bei parallelen Nicols, die zweite und dritte eines wie es bei gekreuzten erhalten werden würde. Absorbirt der Krystall nicht oder doch gleichmäßig, so werden sich beide Arten gegenseitig zerstören, auch wenn man einen Polarisator anwendet; absorbirt aber der Krystall ungleich, so werden die verschiedenen Wellen verschiedene Stärke haben und sich demnach nicht völlig neutralisiren, sondern es wird ein schwaches Ringsystem nach Art des bei parallelen Nicols im Polarisationsapparat auftretenden übrig bleiben u. zw. auch mit jenem gleiche Distanz der Ringe zeigen. Ich habe die Erscheinung nie gesehen, aber nach der Beschreibung Herrn Bertin's[1]) möchte ich glauben, daß die vorstehende Erklärung in den von ihm beobachteten Fällen der Wirklichkeit entspricht. Die Epidotkrystalle, an welchen ich durch die Freundlichkeit Herrn Prof. C. Klein's die oben entwickelte Theorie der Büschel prüfen konnte, zeigen im natürlichen Licht keine Spur von Ringen, sondern nur wenn ein Polarisator benutzt wird, z. B. wenn man vom Polarisationsapparat den oberen Nicol entfernt. Aber diese Ringe haben bedeutend größere Abstände als die, welche man nach Anbringung des oberen Nicols wahrnimmt, sie können also nicht durch Interferenz zweier Wellen, die während des Passirens der ganzen Plattendicke ver-

1) A. Bertin, l. c. p. 415.

schiedene Geschwindigkeit hatten, hervorgebracht werden. Es erscheint daher wahrscheinlich, daß eine Zwillingslamelle, wie sie Herr Klein früher schon zur Erklärung angenommen hat, in diesem Falle die Erscheinung verursacht. Diese Annahme wird durch die Beobachtung bestätigt, daß die Präparate die Ringe nur an einzelnen Stellen zeigen.

Außer diesen Erscheinungen in der Nähe der optischen Axen können noch besondere Folgen der Absorption in der Richtung der Absorptionsaxen, welche beim rhombischen System den Elasticitätsaxen parallel sind, merklich werden, da der Absorptionsindex $\varkappa$ in denselben seinen größten und kleinsten Werth annimmt. In der That sind in diesen Richtungen helle und dunkle Flecken bemerkt worden [1]).

Die aus dem Vorstehenden sich ergebende vollständige Uebereinstimmung der theoretischen Resultate mit den Beobachtungen für pleochroitische Krystalle rechtfertigt vielleicht eine kurze Zusammenstellung der Grundlagen der Theorie.

Ihre eigentlichen Wurzeln sind folgende zwei Hypothesen:

1. Die Medien, die wir als vollkommen durchsichtig bezeichnen, weil sie die Energie periodischer Aetherschwingungen nicht merklich vermindern, verhalten sich ebenso nicht periodischen Aetherbewegungen gegenüber.

2. Die Medien, welche die Energie periodischer Aetherschwingungen durch Absorption vermindern, verhalten sich ebenso nicht periodischen Aetherbewegungen gegenüber.

Aus diesen Hypothesen folgt dann mit Strenge, daß die auf den Aether wirkenden Kräfte nur zwei Hauptgattungen angehören können, entweder:

1. Energie-erhaltende sein müssen, die eine Arbeit liefern, welche der Differentialquotient nach der Zeit sein muß von einer nur durch den augenblicklichen Zustand des Systems bestimmten Function, oder:

2. Energie-vermindernde, welche eine Arbeit liefern, welche eine negative Summe von quadratischen Gliedern darstellt.

Nimmt man hinzu die auf der Beobachtung ruhende Hülfsannahme, daß die Kräfte lineäre Functionen der Verschiebungen und

---

1) Vergl. A. Bertin, l. c. p. 400.

ihrer Differentialquotienten sein müssen, so ergeben sich abermals mit Strenge

acht Gattungen Kräfte der ersten,
zwei Gattungen Kräfte der zweiten

Art als möglich, deren unbekannte Coefficienten bei periodischen Bewegungen als Functionen der Schwingungsdauer zuzulassen sind. Diese Anzahl reducirt sich auf die Hälfte, wenn man verlangt, daß beim Uebergang durch die Grenze zweier Medien die Normalcomponente der Verschiebung beiderseitig streng gleich sein soll. Es scheint nicht, daß eine solche Verfügung beschränkend wirkt und sie ist demnach von mir vielfach benutzt worden.

Ueber die Natur des Aethers sind drei Annahmen gemacht:

1) daß derselbe als incompressibel,
2) als in allen Körpern gleichartig,
3) als von einer verschwindenden Dichte gegenüber derjenigen der ponderabeln Körper zu betrachten sei.

Die letztere führt darauf, daß die ponderabeln Moleküle als ruhend einzuführen sind, was ich durch eine besondere Betrachtung noch ausführlicher begründet habe[1]).

Als Bedingungen für den Uebergang des Lichtes zwischen zwei Medien sind die Gleichungen der Continuität und das Princip der Erhaltung der Energie in der Form, welche ich als Kirchhoff'sches Princip bezeichnet habe, benutzt.

Die Folgerungen aus diesen Grundlagen sind durch Vergleichungen mit den Beobachtungen der verschiedensten Art bestätigt worden.

In der That sind auch die Grundlagen so allgemein, daß man sie kaum wesentlich abändern kann ohne die Vorstellung der Aetherschwingungen selbst aufzugeben. Damit hängt umgekehrt zusammen, daß die theoretisch möglichen Erscheinungen die beobachteten als specielle Fälle enthalten, zu welchen man durch willkürliche Verfügung über die durch die Theorie unbestimmt gebliebenen Constanten hinabsteigt. Eine Beseitigung dieser Willkür durch Aufsuchung einer Vorstellung, welche die der Beobachtung entsprechenden Verfügungen physikalisch nothwendig erscheinen läßt, würde in einer Hinsicht eine Vervollkommnung der Theorie bedeuten; andererseits freilich würde sie durch die dazu nöthige Specialisirung und Ausbildung der Hypothesen die Sicherheit des Untergrundes beeinträchtigen.

Göttingen, Juli 1884.

---

1) W. Voigt, Nachr. v. d. K. G. d. W. in Göttingen Nr. 7, p. 261, 1884.



Bemerkungen zur Theorie der planen Curven.

Von

A. Enneper.

I.

Ueber die Gleichung der verlängerten oder verkürzten Cycloide.

Die Cycloiden sind schon so häufig Gegenstand von eingehenden geometrischen und analytischen Betrachtungen geworden, daß es fast unnöthig erscheinen könnte auf ihre Untersuchung zurückzukommen. Indessen bietet die analytische Definition einen bemerkenswerthen Umstand dar, dessen genauere Erörterung der Verfasser bisher vergeblich in einer Reihe von Schriften gesucht hat, welche die Cycloiden mehr oder minder ausführlich behandeln. Die Anregung zu den folgenden Zeilen liegt in dem Bestreben die Gleichung der verkürzten Cycloide in einer solchen Form darzustellen, daß sich auf dieselbe die gewöhnlichen Regeln zur Auffindung von Doppelpuncten anwenden lassen.

Rollt ein Kreis auf einer festen Geraden, der x-Axe eines orthogonalen Coordinatensystems, so beschreibt bekanntlich ein mit dem Kreise fest verbundener Punct eine Cycloide. Die Verbindungslinie des beschreibenden Punctes mit dem Centrum des rollenden Kreises, schneidet den Umfang des letzteren in einem Puncte, welcher zu Anfang der Bewegung mit dem Anfangspunct der Coordinaten coincidiren möge. Die bemerkte Verbindungslinie falle in ihrer initialen Lage auf die y-Axe und zwar in der Richtung der abnehmenden Ordinaten. Bezeichnet man durch a den Radius des rollenden Kreises, durch b die Distanz des beschreibenden Punctes vom Centrum des Kreises, so wird eine Cycloide gewöhnlich analytisch durch die beiden folgenden Gleichungen definirt:

$$(1) \qquad x = au - b \sin u, \quad y = a - b \cos u.$$

Dem Fall $a > b$ entspricht die verlängerte Cycloide (Cycloides prolata, inflexa), für $a < b$ erhält man die verkürzte oder verschlungene Cycloide. (Cycloides curtata, nodata).

Zur Herstellung der Gleichung kann man folgenden Weg wählen, den bei einer ähnlichen Untersuchung Hr. Dr. H. Weissenborn, in seiner Schrift »Die cyclischen Curven« (Eisenach 1856, p. 22—24) eingeschlagen hat. Aus der Gleichung $\frac{a-y}{b} = \cos u$

schliesst man auf zwei Werthe von u, nämlich $u = arc\cos\frac{a-y}{b}$, wo $arc\cos$ der kleinste Bogen ist und $u = 2\pi - arc\cos\frac{a-y}{b}$, da $\cos u = \cos(2\pi - u)$ ist. Demgemäß schreibt Hr. Weissenborn:

$$u = (2\pi -)\, arc\cos\frac{a-y}{b},\ u \leqq 2\pi,$$

wo 2π und das —Zeichen eingeklammert sind um anzudeuten, daß das eine Mal der übrige Werth allein gelten soll. Um alle möglichen Werthe von u zu erhalten und die Beschränkung von $u \gtreqless 2\pi$ aufzuheben, hat man zu den beiden Werthen von u ein beliebiges Multiplum von 2π zu addiren und zu setzen:

$$u = k.\,2\pi + (2\pi -)\, arc\cos\frac{a-y}{b}.$$

Auf diesem Wege läßt sich zwischen x und y aus den Gleichungen (1) keine Gleichung herstellen, welche eine sichere Anwendung der Differentialrechnung gestattet [1]).

Um zwischen den Gleichungen (1) u zu climiniren schreibe man dieselben auf folgende Weise:

$$au - x = b\sin u,\ a - y = b\cos u.$$

Aus der Summe der Quadrate der vorstehenden Gleichungen folgt:

$$(au - x)^2 + (a - y)^2 = b^2.$$

Es seien u_1 und u_2 die beiden Wurzeln dieser Gleichung. Setzt man zur Vereinfachung:

$$\Delta = \pm\sqrt{b^2 - (a-y)^2}, \tag{2}$$

so ist:

$$au_1 - x = \Delta,\ au_2 - x = -\Delta.$$

oder auch:

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{x}{a},\ \frac{u_1 - u_2}{2} = \frac{\Delta}{a}. \tag{3}$$

Nach der zweiten Gleichung (1) ist:

$$a - y - b\cos u = 0.$$

Diese Gleichung gilt für $u = u_1$ und $u = u_2$. Es ist also:

$$(a - y - b\cos u_1)(a - y - b\cos u_2) = 0,$$

oder:

1) Eine neuere Schrift über Cycloiden »A treatise on the Cycloid and all forms of cycloidal curves. By R. A. Proctor« London 1878. (8°. 256 ff., mit 161 Holzschnitten) behandelt die betreffenden Curven rein geometrisch.

$$(a-y)^2 - b\,(a-y)\,(\cos u_1 + \cos u_2) + b^2 \cos u_1 \cos u_2 = 0.$$

Die vorstehende Gleichung läßt sich schreiben:

$$(4)\qquad (a-y)^2 - 2b\,(a-y)\cos\frac{u_1+u_2}{2}\cos\frac{u_1-u_2}{2}$$

$$+\frac{b^2}{2}\left[\cos(u_1+u_2)+\cos(u_1-u_2)\right] = 0.$$

Setzt man noch:

$$\cos(u_1+u_1)+\cos(u_1-u_2) = 2\left[\cos^2\frac{u_1+u_2}{2}+\cos^2\frac{u_1-u_2}{2}-1\right],$$

so läßt sich die Gleichung (4) auf folgende Form bringen:

$$(a-y)^2 - 2b\,(a-y)\cos\frac{u_1+u_2}{2}\cos\frac{u_1-u_2}{2}$$

$$+b^2\left[\cos^2\frac{u_1+u_2}{2}+\cos^2\frac{u_1-u_2}{2}-1\right] = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $\frac{u_1+u_2}{2}$ und $\frac{u_1-u_2}{2}$ aus (3), bezeichnet die linke Seite der resultirenden Gleichung durch F, so folgt:

$$(5)\quad F = (a-y)^2 - 2b\,(a-y)\cos\frac{x}{a}\cos\frac{\Delta}{a} + b^2\left[\cos^2\frac{x}{a}+\cos^2\frac{\Delta}{a}-1\right] = 0.$$

Mit Rücksicht auf den Werth von Δ aus der Gleichung (2) läßt sich die vorstehende Gleichung leicht auf eine der folgenden Formen bringen:

$$(6)\begin{cases} F = \left[a-y-b\cos\frac{x}{a}\cos\frac{\Delta}{a}\right]^2 - b^2\sin^2\frac{x}{a}\sin^2\frac{\Delta}{a}. \\ F = \left[(a-y)\cos\frac{x}{a}-b\cos\frac{\Delta}{a}\right]^2 - \Delta^2\sin^2\frac{x}{a}. \\ F = \left[(a-y)\cos\frac{\Delta}{a}-b\cos\frac{x}{a}\right]^2 - \Delta^2\sin^2\frac{\Delta}{a}. \end{cases}$$

Geht man von der ersten Gleichung (1) aus, nämlich:

$$x - au + b\sin u = 0$$

und bildet:

$$(x-au_1+b\sin u_1)\,(x-au_2+b\sin u_2) = 0,$$

so folgt auch mittels der Gleichungen (2) und (3)

$$(7) \qquad -\Delta^2 + 2b\Delta\cos\frac{x}{a}\sin\frac{\Delta}{a} + b^2\left(\cos^2\frac{\Delta}{a} - \cos^2\frac{x}{a}\right) = 0.$$

Man kann die vorstehende Gleichung auch aus einer der Gleichungen (6) herleiten, wobei die Rechnungen indeß etwas weitläufig sind. Eine der Gleichungen (5), (6) oder (7) kann als Gleichung einer verkürzten oder verlängerten Cycloide genommen werden, diese Gleichungen haben den Vortheil, daß sie für alle Puncte der Curve gelten und sich nicht allein auf einen endlichen Theil beziehen. Zur Bestimmung der Doppelpuncte bilde man aus (5) die folgenden Differentialquotienten:

$$(8)\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{b}{a}\left[(a-y)\cos\dfrac{\Delta}{a} - b\cos\dfrac{x}{a}\right]\sin\dfrac{x}{a}. \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dF}{dy} = -(a-y) + b\cos\dfrac{x}{a}\cos\dfrac{\Delta}{a} \\ \qquad + \dfrac{b}{a}\left[(a-y)\cos\dfrac{x}{a} - b\cos\dfrac{\Delta}{a}\right]\dfrac{a-y}{\Delta}\sin\dfrac{\Delta}{a}. \end{cases}$$

$$(9)\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2F}{dx^2} = \left(\dfrac{b}{a}\sin\dfrac{x}{a}\right)^2 + \dfrac{b}{a^2}\left[(a-y)\cos\dfrac{\Delta}{a} - b\cos\dfrac{x}{a}\right]\cos\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2F}{dx\,dy} = -\dfrac{b}{a}\left[\cos\dfrac{\Delta}{a} + \dfrac{(a-y)^2}{a\Delta}\sin\dfrac{\Delta}{a}\right]\sin\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2F}{dy^2} = 1 - 2\dfrac{b}{a_1}\cos\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{a-y}{\Delta}\sin\dfrac{\Delta}{a} + \left[\dfrac{b}{a}\dfrac{a-y}{\Delta}\sin\dfrac{\Delta}{a}\right]^2 \\ \qquad + \dfrac{b}{a}\left[(a-y)\cos\dfrac{x}{a} - b\cos\dfrac{\Delta}{a}\right]\left[-\dfrac{b^2}{\Delta^3}\sin\dfrac{\Delta}{a} + \dfrac{(a-y)^2}{a\Delta^2}\cos\dfrac{\Delta}{a}\right]. \end{cases}$$

Mittels der Gleichungen (6) erkennt man unmittelbar, daß die rechten Seiten der Gleichungen (8) gemeinsame Faktoren haben. Dieses läßt sich in einfachster Form unter Zuziehung der Gleichungen (1) und (2) darthun. Infolge dieser Gleichungen ist:

$$(10) \qquad \frac{x}{a} = u - \frac{b}{a}\sin u, \quad a-y = b\cos u, \quad \Delta = \pm b\sin u.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die Gleichungen (8) und (9) auf folgende Formen bringen:

$$(11)\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dF}{dx} = -\dfrac{b^2}{a}\sin u\sin\left(\dfrac{b}{a}\sin u\right)\sin\left(u - \dfrac{b}{a}\sin u\right), \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dF}{dy} = \dfrac{b}{a}(a - b\cos u)\sin\left(\dfrac{b}{a}\sin u\right)\sin\left(u - \dfrac{b}{a}\sin u\right). \end{cases}$$

$$(a-y)^2 - b\,(a-y)\,(\cos u_1 + \cos u_2) + b^2 \cos u_1 \cos u_2 = 0.$$

Die vorstehende Gleichung läßt sich schreiben:

$$(4)\qquad (a-y)^2 - 2b\,(a-y)\cos\frac{u_1+u_2}{2}\cos\frac{u_1-u_2}{2}$$
$$+\frac{b^2}{2}\left[\cos(u_1+u_2)+\cos(u_1-u_2)\right] = 0.$$

Setzt man noch:

$$\cos(u_1+u_1) + \cos(u_1-u_2) = 2\left[\cos^2\frac{u_1+u_2}{2} + \cos^2\frac{u_1-u_2}{2} - 1\right],$$

so läßt sich die Gleichung (4) auf folgende Form bringen:

$$(a-y)^2 - 2b\,(a-y)\cos\frac{u_1+u_2}{2}\cos\frac{u_1-u_2}{2}$$
$$+b^2\left[\cos^2\frac{u_1+u_2}{2} + \cos^2\frac{u_1-u_2}{2} - 1\right] = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $\frac{u_1+u_2}{2}$ und $\frac{u_1-u_2}{2}$ aus (3), bezeichnet die linke Seite der resultirenden Gleichung durch F, so folgt:

$$(5)\quad F = (a-y)^2 - 2b\,(a-y)\cos\frac{x}{a}\cos\frac{\Delta}{a} + b^2\left[\cos^2\frac{x}{a} + \cos^2\frac{\Delta}{a} - 1\right] = 0.$$

Mit Rücksicht auf den Werth von Δ aus der Gleichung (2) läßt sich die vorstehende Gleichung leicht auf eine der folgenden Formen bringen:

$$(6)\begin{cases} F = \left[a-y-b\cos\frac{x}{a}\cos\frac{\Delta}{a}\right]^2 - b^2\sin^2\frac{x}{a}\sin^2\frac{\Delta}{a}. \\ F = \left[(a-y)\cos\frac{x}{a} - b\cos\frac{\Delta}{a}\right]^2 - \Delta^2\sin^2\frac{x}{a}. \\ F = \left[(a-y)\cos\frac{\Delta}{a} - b\cos\frac{x}{a}\right]^2 - \Delta^2\sin^2\frac{\Delta}{a}. \end{cases}$$

Geht man von der ersten Gleichung (1) aus, nämlich:

$$x - au + b\sin u = 0$$

und bildet:

$$(x - au_1 + b\sin u_1)\,(x - au_2 + b\sin u_2) = 0,$$

so folgt auch mittels der Gleichungen (2) und (3)

$$(7) \qquad -\Delta^2 + 2b\Delta\cos\frac{x}{a}\sin\frac{\Delta}{a} + b^2\left(\cos^2\frac{\Delta}{a} - \cos^2\frac{x}{a}\right) = 0.$$

Man kann die vorstehende Gleichung auch aus einer der Gleichungen (6) herleiten, wobei die Rechnungen indeß etwas weitläufig sind. Eine der Gleichungen (5), (6) oder (7) kann als Gleichung einer verkürzten oder verlängerten Cycloide genommen werden, diese Gleichungen haben den Vortheil, daß sie für alle Puncte der Curve gelten und sich nicht allein auf einen endlichen Theil beziehen. Zur Bestimmung der Doppelpuncte bilde man aus (5) die folgenden Differentialquotienten:

$$(8) \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{b}{a}\left[(a-y)\cos\dfrac{\Delta}{a} - b\cos\dfrac{x}{a}\right]\sin\dfrac{x}{a}. \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dF}{dy} = -(a-y) + b\cos\dfrac{x}{a}\cos\dfrac{\Delta}{a} \\ \qquad + \dfrac{b}{a}\left[(a-y)\cos\dfrac{x}{a} - b\cos\dfrac{\Delta}{a}\right]\dfrac{a-y}{\Delta}\sin\dfrac{\Delta}{a}. \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2F}{dx^2} = \left(\dfrac{b}{a}\sin\dfrac{x}{a}\right)^2 + \dfrac{b}{a^2}\left[(a-y)\cos\dfrac{\Delta}{a} - b\cos\dfrac{x}{a}\right]\cos\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2F}{dx\,dy} = -\dfrac{b}{a}\left[\cos\dfrac{\Delta}{a} + \dfrac{(a-y)^2}{a\Delta}\sin\dfrac{\Delta}{a}\right]\sin\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2F}{dy^2} = 1 - 2\dfrac{b}{a_1}\cos\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{a-y}{\Delta}\sin\dfrac{\Delta}{a} + \left[\dfrac{b}{a}\dfrac{a-y}{\Delta}\sin\dfrac{\Delta}{a}\right]^2 \\ \qquad + \dfrac{b}{a}\left[(a-y)\cos\dfrac{x}{a} - b\cos\dfrac{\Delta}{a}\right]\left[-\dfrac{b^2}{\Delta^3}\sin\dfrac{\Delta}{a} + \dfrac{(a-y)^2}{a\Delta^2}\cos\dfrac{\Delta}{a}\right]. \end{cases}$$

Mittels der Gleichungen (6) erkennt man unmittelbar, daß die rechten Seiten der Gleichungen (8) gemeinsame Faktoren haben. Dieses läßt sich in einfachster Form unter Zuziehung der Gleichungen (1) und (2) darthun. Infolge dieser Gleichungen ist:

$$(10) \qquad \frac{x}{a} = u - \frac{b}{a}\sin u, \quad a-y = b\cos u, \quad \Delta = \pm b\sin u.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die Gleichungen (8) und (9) auf folgende Formen bringen:

$$(11) \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dF}{dx} = -\dfrac{b^2}{a}\sin u\sin\left(\dfrac{b}{a}\sin u\right)\sin\left(u - \dfrac{b}{a}\sin u\right), \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dF}{dy} = \dfrac{b}{a}(a - b\cos u)\sin\left(\dfrac{b}{a}\sin u\right)\sin\left(u - \dfrac{b}{a}\sin u\right). \end{cases}$$

$$
(12)\begin{cases}
\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2\left[\sin^2\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right)-\sin u\sin\left(\frac{b}{a}\sin u\right)\cos\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right)\right],\\
\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx\,dy} = -\frac{b}{a}\left[\cos\left(\frac{b}{a}\sin u\right)+\frac{b\cos^2 u}{a\sin u}\sin\left(\frac{b}{a}\sin u\right)\right]\sin\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right),\\
\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dy^2} = \sin^2\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right)+\left[\cos\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right)-\frac{b\cos u}{a\sin u}\sin\left(\frac{b}{a}\sin u\right)\right]^2\\
\qquad +\frac{b}{a}\sin\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{b}{a}\sin u\right)}{\sin^2 u}-\frac{b}{a}\frac{\cos^2 u\cos\left(\frac{b}{a}\sin u\right)}{\sin u}\right].
\end{cases}
$$

Die Gleichungen (11) geben:

$$
-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{b\sin u}{a-b\cos u},
$$

oder:

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{b\sin u}{a-b\cos u},
$$

welche Relation auch unmittelbar aus den Gleichungen (1) folgt. Es folgt ferner aus den Gleichungen (11), daß $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ den gemeinsamen Factor:

$$
(13) \qquad \frac{b}{a}\sin\left(\frac{b}{a}\sin u\right)\sin\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right)
$$

haben, welcher bei der directen Bildung von $\frac{dy}{dx}$ aus den Gleichungen (1) wegfällt. Es verschwinden $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ für $\sin u = 0$, da aber bei der Bildung von $\frac{dy}{dx}$ der Factor $\sin u$ — wenn der gemeinsame Factor im Zähler und Nenner nach Potenzen von $\sin u$ entwickelt wird — sich nicht vollständig weghebt, so kann der Annahme $\sin u = 0$ kein Doppelpunct entsprechen.

In den Gleichungen (11) nehme man:

$$
(14) \qquad \sin\left(\frac{b}{a}\sin u\right) = 0,
$$

also:

$$
\cos\left(\frac{b}{a}\sin u\right) = \pm 1,\ \sin\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right) = \pm\sin u.
$$

Die Gleichungen (12) geben dann:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2} = \left(\frac{b}{a}\sin u\right)^2, \ \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dxdy} = -\frac{b}{a}\sin u, \ \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dy^2} = 1-\left(\frac{b}{a}\cos u\right)^2.$$

Der entsprechende Punct ist ein Doppelpunct. Die Richtungen der Tangenten in demselben sind bestimmt durch:

$$(15) \qquad \left(\frac{b}{a}\sin u - \frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\cos u\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\sin u}{a-b\cos u}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\sin u}{a+b\cos u}.$$

Die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ gehen durch Vertauschung von u mit $\pi-u$ in einander über. Ist μ eine ganze Zahl, so gibt die Gleichung (14)

$$\frac{b}{a}\sin u = \mu\pi,$$

oder:

$$(16) \qquad \sin u = \frac{\mu a\pi}{b}.$$

Diese Gleichung kann nur in dem besondern Fall bestehn, daß $b \geqq a\mu\pi$. Der in (13) aufgestellte Ausdruck läßt sich mittels der Gleichungen (1) und (2) auch auf die Form:

$$\pm\frac{b}{a}\sin\frac{\Delta}{a}\sin\frac{x}{a}$$

bringen. Der Annahme (16) entspricht dann $\sin\frac{\Delta}{a} = 0$. Wenn in (16) $b = \mu a\pi$ ist, so folgt $\sin u = 1$, die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung (16) fallen dann zusammen, der Doppelpunct ist ein Rückkehrpunct.

In den Gleichungen (11) nehme man:

$$(17) \qquad \sin\left(u-\frac{b}{a}\sin u\right) = 0.$$

Es ist dann:

$$\sin\left(\frac{b}{a}\sin u\right) = \pm\sin u, \ \cos\left(\frac{b}{a}\sin u\right) = \pm\cos u.$$

In diesem Falle nehmen die Gleichungen (12) folgende Formen an

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2} = -\left(\frac{b}{a}\sin u\right)^2, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dy^2} = \left(1-\frac{b}{a}\cos u\right)^2.$$

Der entsprechende Punct ist ein Doppelpunct. Die Richtungen der Tangenten in demselben sind durch die Gleichung:

$$\left(\frac{b}{a}\sin u\right)^2 = \left(1-\frac{b}{a}\cos u\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

bestimmt. Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\sin u}{a-b\cos u}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\sin u}{a-b\cos u}.$$

Die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ gehen in einander über durch Vertauschung von u mit $2\pi-u$. Die Gleichung (17) bleibt unverändert, wenn u durch $u\pm 2\mu\pi$ ersetzt wird, wo μ eine ganze, positive Zahl bedeutet. Man kann sich auf den Fall:

$$u-\frac{b}{a}\sin u = 0$$

beschränken, eine Gleichung, welche für $b>a$ immer eine reelle Wurzel hat. Der Bedingung $b>a$ genügt die verkürzte Cycloide. Es scheint nicht ohne Interesse zu sein die allgemeinen Gleichungen (5), (6) oder (7) zur Aufsuchung von Doppelpuncten zu benutzen, deren Existenz sich natürlich auch durch rein geometrische Betrachtungen darthun läßt. Man hat nur nöthig einen ähnlichen Weg für die Cycloiden zu verfolgen, wie er sich bei Betrachtung der Epicycloiden von Hrn. Salmon vorgezeichnet findet. (A treatise on higher plane curves. Second edition. Dublin 1873. pag. 268).

II.

Ueber die Evolvente des Kreises.

Für den Kreis mit dem Radius a ist die Evolvente durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{x}{a} = \cos u + u\sin u, \quad \frac{y}{a} = \sin u - u\cos u$$

analytisch definirt. Diese Gleichungen geben:

$$x\cos u + y\sin u = a, \quad x\sin u - y\cos u = au.$$

Hieraus folgt, daß die Evolvente als Enveloppe der Geraden, bestimmt durch die Gleichung $x \sin u - y \cos u = au$, angesehen werden kann. Legt man in den Gleichungen (1) der Variabeln u alle reellen, positiven und negativen Werthe bei, so geben diese Gleichüngen zu analogen Bemerkungen Veranlassung wie die in I. behandelten Gleichungen der allgemeinen Cycloide.

Die Gleichungen (1) geben

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = 1+u^2.$$

Nimmt man also

$$(2) \qquad \Delta = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2}-1}$$

so hat u die beiden Werthe Δ und $-\Delta$. Ist $F=0$ die Gleichung der Evolvente, so läßt sich diese Gleichung, mit Rücksicht auf die beiden Werthe von u, mittels der Gleichungen (1) auf eine der beiden folgenden Formen bringen:

$$F = (x\cos\Delta + y\sin\Delta - a)(x\cos\Delta - y\sin\Delta - a) = 0,$$
$$F = (x\sin\Delta - y\cos\Delta - a\Delta)(x\sin\Delta + y\cos\Delta + a\Delta) = 0,$$

oder:

$$(3) \qquad F = (x\cos\Delta - a)^2 - (y\sin\Delta)^2,$$
$$(4) \qquad F = (x\sin\Delta - a\Delta)^2 - (y\cos\Delta)^2.$$

Ist aber $F = P^2 - Q^2$ die Gleichung einer Curve, so hat man gleichzeitig

$$F=0,\ \frac{dF}{dx}=0,\ \frac{dF}{dy}=0$$

für $P=0$ und $Q=0$. Man kann auch bei der Discussion der Gleichung (3) oder (4) ein ähnliches Verfahren wie in I anwenden. Die Gleichung (3) gibt:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{dF}{dx} &= (x\cos\Delta - a)\left(\cos\Delta - \frac{x^2}{a^2}\frac{\sin\Delta}{\Delta}\right) - \frac{y^2x}{a^2}\frac{\sin\Delta\cos\Delta}{\Delta}, \\ \frac{1}{2}\frac{dF}{dy} &= -(x\cos\Delta - a)\frac{xy}{a^2}\frac{\sin\Delta}{\Delta} - y\sin\Delta\left(\sin\Delta + \frac{y^2}{a^2}\frac{\cos\Delta}{\Delta}.\right) \end{aligned}$$

Es ist, da $u = \pm\Delta$, wegen der ersten Gleichung (1),

$$x\cos\Delta - a = x\cos u - a = -y\sin u.$$

Die Gleichungen (5) lassen sich mittels der Gleichungen (1) auf folgende einfache Formen bringen:

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\frac{dF}{dx} = yu\sin u\sin u,\ \frac{1}{2}\frac{dF}{dx} = -yu\sin u\cos u.$$

Nimmt man $y = 0$, also $u = \operatorname{tang} u$, so geben die Gleichungen (6)

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Es ist dann aus (5) für $u = \operatorname{tang} u$:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2} = \left(\cos\Delta - \frac{x^2}{a^2}\frac{\sin\Delta}{\Delta}\right)^2 = \cos^2 u\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\frac{\operatorname{tang} u}{u}\right)$$

$$= \cos^2 u.\left(1 - \frac{1}{\cos^2 u}\right)^2 = \sin^2 u \operatorname{tang}^2 u.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx\,dy} = 0.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dy^2} = -\sin^2 u.$$

Für $u = \operatorname{tang} u$ ist also $\frac{dy}{dx}$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \operatorname{tang}^2 u$$

bestimmt. Es gibt also auf der y-Axe unendlich viele Puncte in denen sich zwei congruente Curven schneiden, welche von einem Puncte der Peripherie des Kreises ausgehend in entgegengesetzten Richtungen fortlaufend, den Kreis in immer größer werdenden Windungen umgeben.

Es möge bei dieser Gelegenheit auf eine Eigenschaft der Evolvente des Kreises hingewiesen sein, welche auf die Lösung eines allgemeineren' Problems führt. Es sei ρ der Krümmungsradius einer Curve im Puncte (x, y). Mittels der Gleichungen (1) findet man

$$x^2 + y^2 = a^2 + \rho^2. \tag{7}$$

Hierbei bietet sich das Problem: Für welche Curven findet die Gleichung (7) überhaupt statt?

Der Versuch die Gleichung (7) mit Hülfe von Polarcoordinaten zu lösen gibt zu etwas weitläufigen, wenn auch nicht uninteressanten, Rechnungen Veranlassung. Auf folgendem Wege läßt sich die Frage wohl am einfachsten beantworten. Es sei $d\varepsilon$ der Contingenzwinkel, also

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = \rho\cos\varepsilon, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = \rho\sin\varepsilon. \tag{8}$$

Die Gleichung (7) successive nach ε differentiert gibt:

$$x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = \frac{d\rho}{d\varepsilon}, \quad -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon = \frac{d^2\rho}{d\varepsilon^2} - \rho. \tag{9}$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen mit der Gleichung



(7) verglichen gibt:

$$\left(\rho-\frac{d^2\rho}{d\varepsilon^2}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{d\varepsilon}\right)^2 = a+\rho^2,$$

oder:

$$\rho-\frac{d^2\rho}{d\varepsilon^2} = \pm\sqrt{a^2+\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\varepsilon}\right)^2}.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$ und integrire. Bezeichnet b eine Constante, so folgt:

$$\pm\sqrt{a^2+\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\varepsilon}\right)^2} = \rho-b,$$

oder:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varepsilon}\right)^2 = a^2-b^2+2b\rho. \tag{10}$$

Ist b von Null verschieden, bedeutet ε_0 eine Constante, so folgt aus (10) durch Integration:

$$\pm\sqrt{a^2-b^2+2b\rho} = b(\varepsilon-\varepsilon_0). \tag{11}$$

Da sich ε_0 nur auf eine Drehung der Coordinatenaxen bezieht, so kann man einfach in (11) $\varepsilon_0 = 0$ nehmen, dann ist:

$$2b\rho = b^2(1+\varepsilon^2)-a^2. \tag{12}$$

Man bringe die Gleichungen (9) auf die Form:

$$x-\rho\sin\varepsilon = \frac{d\rho}{d\varepsilon}\cos\varepsilon-\frac{d^2\rho}{d\varepsilon^2}\sin\varepsilon,\quad y+\rho\sin\varepsilon = \frac{d\rho}{d\varepsilon}\sin\varepsilon+\frac{d^2\rho}{d\varepsilon^2}\cos\varepsilon.$$

Wegen der Gleichung (12) folgt:

$$x-\rho\sin\varepsilon = b(\varepsilon\cos\varepsilon-\sin\varepsilon),\quad y+\rho\cos\varepsilon = b(\varepsilon\sin\varepsilon+\cos\varepsilon). \tag{13}$$

Die linken Seiten der Gleichungen (13) bestimmen einen Punct der Evolute der gesuchten Curve, die rechten Seiten zeigen, daß diese Evolute die Evolvente eines Kreises ist. Für den Fall, daß in (10) $b = 0$ ist, folgt $\rho = a\varepsilon$. Diesem Werthe von ρ entsprechend geben die Gleichungen (9):

$$\frac{x}{a} = \cos\varepsilon+\varepsilon\sin\varepsilon,\quad \frac{y}{a} = \sin\varepsilon-\varepsilon\cos\varepsilon,$$

welche Gleichungen mit den Gleichungen (1) übereinstimmen. Aus dem Vorstehenden folgt:

Theorem:

Die Curve definirt durch die Gleichung $x^2+y^2 = a^2+\rho^2$ ist die Evolvente eines Kreises, oder die Evolvente der Evolventen eines Kreises.

Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle.

Von

B. Minnigerode.

Zweite Abhandlung.

Ich beschäftige mich im Folgenden mit dem hexagonalen System und lege rechtwinklige Coordinatenaxen zu Grunde, die mit der 6- oder 3-zähligen Symmetrieaxe gleiche Winkel bilden; ich stelle die Gruppen der Unterabtheilungen auf und discutire ihre Symmetrieeigenschaften.

Um dann das Potential der elastischen Kräfte aufzustellen, verfahre ich ebenso wie bei den übrigen Krystallsystemen und fasse zunächst diejenigen Unterabtheilungen zusammen, denen in elastischer Beziehung dieselbe Gruppe zukommt, wenn ausschließlich die Eigenschaft des Potentials benutzt wird, ein Centrum der Symmetrie zu besitzen. Es zeigt sich, daß hierdurch jede der beiden Abtheilungen des hexagonalen in zwei Classen zerfällt. Bei Benutzung der speciellen Form des Potentials bleiben die beiden Classen der zweiten Abtheilung getrennt, während die beiden Classen der ersten Abtheilung sich vereinigen.

Bei der üblichen geometrischen Behandlung des hexagonalen Systems wird ein 4-axiges Coordinatensystem zu Grunde gelegt. Ich behalte mir vor, hierauf bezügliche Entwicklungen vom Standpunkt der vorliegenden Untersuchungen aus bei einer anderen Gelegenheit zu geben.

Greifswald, 13. Juli 1884.

---

§ 13.

Für die erste Abtheilung des hexagonalen Systems sind Substitutionen von 12 Elementen zu betrachten. Wird

$$\alpha' = \tfrac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha,$$
$$\beta' = \tfrac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)-\beta,$$
$$\gamma' = \tfrac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)-\gamma$$

gesetzt, so treten folgende Substitutionen auf

$$Q = (\alpha,\ \gamma',\ \beta,\ \alpha',\ \gamma,\ \beta')(\bar{\alpha},\ \bar{\gamma}',\ \bar{\beta},\ \bar{\alpha}',\ \bar{\gamma},\ \bar{\beta}'),$$
$$H = (\alpha,\ \beta)(\alpha',\ \beta')(\bar{\alpha},\ \bar{\beta})(\bar{\alpha}',\ \bar{\beta}'),$$
$$D = (\alpha,\ \bar{\alpha})(\beta,\ \bar{\beta})(\gamma,\ \bar{\gamma})(\alpha',\ \bar{\alpha}')(\beta',\ \bar{\beta}')(\gamma',\ \bar{\gamma}'),$$



die den Gleichungen genügen

$$Q^2 = (\alpha, \beta, \gamma)(\alpha', \beta', \gamma')(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})(\bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}'),$$
$$Q^3 = (\alpha, \alpha')(\beta, \beta')(\gamma, \gamma')(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}')(\bar{\beta}, \bar{\beta}')(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}'),$$
$$Q^4 = (\alpha, \gamma, \beta)(\alpha', \gamma', \beta')(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \bar{\beta})(\bar{\alpha}', \bar{\gamma}', \bar{\beta}'),$$
$$Q^5 = (\alpha, \beta', \gamma, \alpha', \beta, \gamma')(\bar{\alpha}, \bar{\beta}', \bar{\gamma}, \bar{\alpha}', \bar{\beta}, \bar{\gamma}'),$$
$$Q^6 = 1, \qquad H^2 = 1, \qquad D^2 = 1,$$
$$QH = (\alpha, \gamma')(\beta, \beta')(\gamma, \alpha')(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}')(\bar{\beta}, \bar{\beta}')(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}') = HQ^5,$$
$$Q^2 H = (\beta, \gamma)(\beta', \gamma')(\bar{\beta}, \bar{\gamma})(\bar{\beta}', \bar{\gamma}') = HQ^4,$$
$$Q^3 H = (\alpha, \beta')(\beta, \alpha')(\gamma, \gamma')(\bar{\alpha}, \bar{\beta}')(\bar{\beta}, \bar{\alpha}')(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = HQ^3,$$
$$Q^4 H = (\alpha, \gamma)(\alpha', \gamma')(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})(\bar{\alpha}', \bar{\gamma}') = HQ^2,$$
$$Q^5 H = (\alpha, \alpha')(\beta, \gamma')(\gamma, \beta')(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}')(\bar{\beta}, \bar{\gamma}')(\bar{\gamma}, \bar{\beta}') = HQ,$$

aus denen hervorgeht, daß die Gruppen

$$\{Q\} \quad \text{und} \quad \{H\}$$

vertauschbar sind. Die Substitution D ist mit allen übrigen vertauschbar.

Die Gruppe

$$\{Q, \; H, \; D\}$$

ist von der 24. Ordnung; ihre sämmtlichen Substitutionen hinzuschreiben, ist nicht erforderlich, indem 12 derselben bereits angegeben sind und die übrigen 12 sich durch Combination mit D ohne Weiteres ergeben.

Aus den Entwicklungen des § 3 ergiebt sich, daß die Substitution Q auf eine 6-zählige Symmetrieaxe hinweist, deren Richtungscosinus

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

sind, indem eine höhere Zähligkeit nicht auftritt. Q^2 entspricht einer 3-zähligen Symmetrieaxe und ist mit der im Vorhergehenden benutzten Substitution K identisch; Q^3 entspricht einer 2-zähligen Symmetrieaxe.

Aus den Entwicklungen des § 3 geht hervor, daß H auf eine Symmetrieebene hinweist, deren Normale die Richtungscosinus

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad -\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad 0$$

besitzt. Aus § 6 ergiebt sich, daß HD einer 2-zähligen Symmetrieaxe entspricht, die Normale der bezeichneten Symmetrieebene ist, indem eine höhere Symmetrie nicht vorkommt.

Die Substitution D entspricht einem Centrum der Symmetrie.

Für die zweite Abtheilung des hexagonalen Systems sind folgende, in den vorhergehenden Untersuchungen benutzte Substitutionen zu Grunde zu legen

$$K = (\alpha, \beta, \gamma)(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}),$$
$$H = (\alpha, \beta)(\bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$
$$D = (\alpha, \bar{\alpha})(\beta, \bar{\beta})(\gamma, \bar{\gamma}),$$

die genau dieselbe Bedeutung besitzen, wie die entsprechend für die erste Abtheilung des hexagonalen Systems bezeichneten. Sie sind mit ihnen identisch; da aber hier nur Substitutionen von 6 Elementen zu betrachten sind, tritt die einfachere Form auf.

§ 14.

Ich führe jetzt die Unterabtheilungen des hexagonalen Systems auf und füge zu jeder ihre Gruppe hinzu.

Das hexagonale System [1]).

Erste Abtheilung.

a. Holoëdrische Formen.

$$\{Q, H, D\}.$$

b. Trapezoëdrische Hemiëdrie.

$$\{Q, HD\}.$$

c. Pyramidale Hemiëdrie.

$$\{Q, D\}.$$

Zweite Abtheilung (Rhomboëdrisches System).

d. Rhomboëdrische Hemiëdrie des hexagonalen Systems.

G. $$\{K, H, D\}.$$

e. Trapezoëdrische Tetartoëdrie.

$$\{K, HD\}.$$

f. Rhomboëdrische Tetartoëdrie.

$$\{K, D\}.$$

Hemimorphien der ersten Abtheilung.

g. Erste Hemimorphie.

$$\{Q, H\}$$

h. Zweite Hemimorphie.

$$\{Q\}.$$

---

1) Liebisch a. a. O. S. 279 u. ff.

Hemimorphien der zweiten Abtheilung.

i. Dritte Hemimorphie.

G. $\{K, H\}$.

k. Vierte Hemimorphie.

$\{K\}$.

Die hemimorphen Formen gehen aus den nicht hemimorphen dadurch hervor, daß die 6- beziehungsweise 3-zählige Symmetrieaxe polar wird. Es führt a. auf g., b. und c. auf h., d. auf i., e. und f. auf k.

Die Gruppen sind im Fall a. von der 24. Ordnung, in den Fällen b., c., d., g. von der 12., in den Fällen e.. f., h., i. von der 6., im Fall k. von der 3.

Die Discussion der Symmetrieeigenschaften leite ich mit einer allgemeinen Bemerkung ein. Sind S und T irgend zwei Substitutionen und die Ordnung von S gleich n, so sind die Substitutionen

$$T, \; ST, \; S^2 T, \ldots S^{n-1} T$$

von einander verschieden: es entsprechen ihnen folglich n verschiedene auf Symmetrie bezügliche Eigenschaften des Strahlbündels. Drückt S aus, daß eine Symmetrieaxe L n-zählig ist und T, daß sie zweiseitig ist, ist also eine zu L senkrechte geradezählige Symmetrieaxe vorhanden, so folgt aus obiger Bemerkung, daß im Ganzen n verschiedene zu L senkrechte geradezählige Symmetrieaxen bestehen; je zwei benachbarte schließen den Winkel $\frac{\pi}{n}$ ein. Sie sind gleichzählig, wenn n ungerade ist; ist n gerade, so sind je $\frac{n}{2}$, von denen benachbarte den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ einschließen, gleichzählig: die beiden hieraus hervorgehenden Classen können auch gleichzählig sein, doch braucht dies nicht stattzufinden. Der erste von diesen beiden Fällen kommt beim hexagonalen und beim tetragonalen, der zweite beim regulären System vor. Drückt T aus, daß eine Symmetrieebene durch L hindurchgeht, so schneiden sich in L n verschiedene Symmetrieebenen, von denen je zwei benachbarte den Winkel $\frac{\pi}{n}$ schließen. Man verificirt dieses leicht mittelst der in § 3 und § 4 gegebenen Formeln, wenn man die Symmetrieaxe mit einer Coordinatenaxe zusammenfallen läßt [1]).

1) Dieser Bemerkung gemäß ist Seite 201 Zeile 15 v. u. »gleichzähliger« zu streichen, Zeile 13 v. u. $\frac{\pi}{n}$ statt $\frac{2\pi}{n}$ zu lesen und Zeile 8 bis 10 v. u. zu streichen. Seite 202 Zeile 10 bis 12 ist λ', μ', ν' für λ, μ, ν zu setzen.

In sämmtlichen Gruppen der ersten Abtheilung kommt Q vor, es ist also hier stets eine 6-zählige Symmetrieaxe vorhanden; aus dem Vorhandensein von K in sämmtlichen Gruppen der zweiten Abtheilung folgt, daß in dieser stets eine 3-zählige Symmetrieaxe vorhanden ist. Kommt HD vor, so tritt eine zur 6- oder 3-zähligen Symmetrieaxe senkrechte Seitenaxe der Symmetrie auf. Nach der vorhin gemachten allgemeinen Bemerkung sind also in den Fällen a., b., 6 2-zählige Symmetrieaxen vorhanden, von denen benachbarte den Winkel $\frac{\pi}{6}$ einschließen; in den Fällen d., e. sind 3 2-zählige Symmetrieaxen vorhanden, die sich unter $\frac{\pi}{3}$ schneiden.

Das Vorhandensein von D in den Fällen a., c., d., f. zeigt daß in ihnen ein Centrum der Symmetrie vorhanden ist. Auf einer geradezähligen Symmetrieaxe steht dann jedesmal eine Symmetrieebene senkrecht. In den Fällen a., c. ist also eine zur 6-zähligen Symmetrieaxe senkrechte Symmetrieebene vorhanden; im Fall a. steht senkrecht auf jeder der 6 2-zähligen, im Fall d. auf jeder der 3 2-zähligen Seitenaxen eine Symmetrieebene. Aber auch in den Fällen g. und i. sind in Folge des Bestehens von H 6, beziehungsweise 3 Symmetrieebenen vorhanden, die einander in der 6- beziehungsweise 3-zähligen Symmetrieaxe unter den Winkeln $\frac{\pi}{6}$, beziehungsweise $\frac{\pi}{3}$ schneiden.

Steht senkrecht auf einer Symmetrieaxe eine 2-zählige Symmetrieaxe, so ist sie 2-seitig. Die 6-zählige Symmetrieaxe ist also in den Fällen a., b. 2-seitig, die 3-zählige in den Fällen d., e. Die 6 in a., b. vorkommenden 2-zähligen Symmetrieaxen sind ebenfalls 2-seitig. Ist ein Centrum der Symmetrie vorhanden, so ist eine geradezählige Symmetrieaxe 1-seitig von der 1. Art; dies tritt für die 6-zählige Symmetrieaxe in den Fällen a., c. ein, für die 2-zähligen Seitenaxen in den Fällen a., d. Bei Bestehen eines Centrums der Symmetrie ist eine ungeradezählige Symmetrieaxe 1-seitig von der 2. Art; dies ist für die 3-zählige Symmetrieaxe in den Fällen d., f. der Fall. Die 6-beziehungsweise 3-zählige Symmetrieaxe ist in den Fällen g., h., i., k. polar, die 3 2-zähligen Seitenaxen der Symmetrie sind im Fall e. polar.

Enantiomorphe Formen kommen in den Fällen b., e., h., k. vor.

§ 15.

Um das Potential der elastischen Kräfte für das hexagonale System zu bilden, benutze ich zunächst, wie früher, die Eigenschaft desselben, ein Centrum der Symmetrie zu besitzen und stelle die Unterabtheilungen zusammen, denen in elastischer Beziehung dieselbe Gruppe zukommt; die betreffende Gruppe ist in der Gruppe jeder physikalischen Eigenschaften derselben Unterabtheilung des hexagonalen Systems enthalten, der ein Centrum der Symmetrie zukommt. Es folgt hier die Uebersicht der einzelnen Fälle in Anschluß an § 14 Tabelle G.

Hexagonales System.

Erste Abtheilung.

Classe I. { a. Holoëdrische Formen. b. Trapezoëdrische Hemiëdrie. g. Erste Hemimorphie.

$\{Q,\ H,\ D\}$.

Classe II. { c. Pyramidale Hemiëdrie. b. Zweite Hemimorphie.

H. $\{Q,\ D\}$.

Zweite Abtheilung (Rhomboëdrisches System).

Classe I. { d. Rhomboëdrische Hemiëdrie des hexagonalen Systems. e. Trapezoëdrische Tetartoëdrie. i. Dritte Hemimorphie.

$\{K,\ H,\ D\}$.

Classe II. { f. Rhomboëdrische Tetartoëdrie. k. Vierte Hemimorphie.

$\{K,\ D\}$

Ich beginne mit der zweiten Abtheilung, in der nur Substitutionen zur Verwendung gelangen, die schon in § 11 auftraten. Es sind.

$$K = (x_x,\ y_y,\ z_z)\ (y_z,\ z_x,\ x_y),$$
$$H = (x_x,\ y_y)\ (y_z,\ z_x),$$
$$D = 1.$$

Die Anwendung der Substitution K auf die in § 11 angegebene Form des Potentials für das trikline System gibt

$$c_{11} = c_{22} = c_{33},$$
$$c_{12} = c_{13} = c_{23},$$
$$c_{14} = c_{25} = c_{36},$$
$$c_{15} = c_{26} = c_{34},$$
$$c_{16} = c_{24} = c_{35},$$
$$c_{44} = c_{55} = c_{66},$$
$$c_{45} = c_{46} = c_{56}.$$

Es ergibt sich also für die

II. Classe der zweiten Abtheilung des hexagonalen Systems.

$$\begin{aligned}2\Phi = c_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2c_{12}(x_x y_y + x_x z_z + y_y z_z)\\ + 2c_{14}(x_x y_z + y_y z_x + z_z x_y)\\ + 2c_{15}(x_x z_x + y_y x_y + z_z y_z)\\ + 2c_{16}(x_x x_y + y_y y_z + z_z z_x)\\ + c_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) + 2c_{45}(y_z z_x + y_z x_y + z_x x_y).\end{aligned}$$

Hier kommen 7 Constante vor.

Wendet man auf diesen Ausdruck für Φ die Substitution H an, so findet man

$$c_{15} = c_{16}.$$

Es ergibt sich also für die

I. Classe der zweiten Abtheilung des hexagonalen Systems.

$$\begin{aligned}2\Phi = c_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2c_{12}(x_x y_y + x_x z_z + y_y z_z)\\ + 2c_{14}(x_x y_z + y_y z_x + z_z x_y)\\ + 2c_{15}\left(x_x(z_x + x_y) + y_y(x_y + y_z) + z_z(y_z + z_x)\right)\\ + c_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) + 2c_{45}(y_z z_x + y_z x_y + z_x x_y).\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hängt von 6 Constanten ab.

Für die erste Abtheilung des hexagonalen Systems ist die Substitution Q charakteristisch, die einer 6-zähligen Symmetrieaxe entspricht; die Substitution D, die einem Centrum der Symmetrie entspricht, ist in der angenommenen Form für das Potential bereits erfüllt. Da der für die II. Classe der zweiten Abtheilung gefundene Ausdruck des Potentials schon einer 3-zähligen Symmetrieaxe entspricht, so ist, um das zunächst gesuchte Potential zu erhalten, auf diesen Potentialausdruck nur noch die Substitution anzuwenden, die diese Symmetrieaxe noch zu einer geradezähligen macht, also Q^3.

Dieser Substitution entspricht folgende auf die Coordinaten bezügliche

$$Q^3 = (x, x')\,(y, y')\,(z, z'),$$

wenn

$$\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z, \\ y' &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}z, \\ z' &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}z, \end{aligned}$$

gesetzt wird. Läßt man u', v', w' von u, v, w in derselben Weise abhängen, wie x', y', z' von x, y, z und setzt

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = x'_x, \quad \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} = y'_z, \; \ldots,$$

so hat man auf den oben gefundenen Potentialausdruck nur noch die Substitution

$$Q^3 = (x_x, x'_x)\,(y_y, y'_y)\,(z_z, z'_z)\,(y_z, y'_z)\,(z_x, z'_x)\,(x_y, x'_y)$$

anzuwenden, in der

$$\begin{aligned} 9x'_x &= x_x + 4y_y + 4z_z + 4y_z - 2z_x - 2x_y, \\ 9y'_y &= 4x_x + y_y + 4z_z - 2y_z + 4z_x - 2x_y, \\ 9z'_z &= 4x_x + 4y_y + z_z - 2y_z - 2z_x + 4x_y, \\ 9y'_z &= 8x_x - 4y_y - 4z_z + 5y_z + 2z_x + 2x_y, \\ 9z'_x &= -4x_x + 8y_y - 4z_z + 2y_z + 5z_x + 2x_y, \\ 9x'_y &= -4x_x - 4y_y + 8z_z + 2y_z + 2z_x + 5x_y \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Man findet hiernach

$$c_{11} - c_{12} + c_{14} - \frac{c_{15} + c_{16}}{2} - 2c_{44} + 2c_{45} = 0,$$

$$c_{15} = c_{16}.$$

Daß dieses richtig ist, erkennt man leicht, wenn man den oben gefundenen Ausdruck für 2Φ in folgender Form schreibt

$$\begin{aligned} 2\Phi = {} & \left(c_{14} - \frac{c_{15} + c_{16}}{2}\right)\left((x_x + y_z)^2 + (y_y + z_x)^2 + (z_z + x_y)^2\right) \\ & + c_{12}(x_x + y_y + z_z)^2 + c_{45}(y_z + z_x + x_y)^2 \\ & \qquad + (c_{15} + c_{16})\,(x_x + y_y + z_z)\,(y_z + z_x + x_y) \\ & + 2\left(c_{44} - c_{14} + \frac{c_{15} + c_{16}}{2} - c_{45}\right)\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2\right) \\ & + \left(c_{11} - c_{12} + c_{14} - \frac{c_{15} + c_{16}}{2} - 2c_{44} + 2c_{45}\right)\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2\right) \\ & + (c_{15} - c_{16})\left(x_x(z_x - x_y) + y_y(x_y - y_z) + z_z(y_z - z_x)\right). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß

$$x_x + y_y + z_z,$$

$$x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2,$$

wie bekannt[1]) ist, für jeden Uebergang von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem andern ihre Form nicht ändern, sowie daß

$$x_x + y_z, \quad y_y + z_x, \quad z_z + x_y,$$

$$y_z + z_x + x_y$$

durch die Substitution Q^3 ungeändert bleiben, so erkennt man sofort, daß in der zuletzt angegebenen Form für 2Φ die zwei letzten Glieder wegfallen müssen, wenn die Substitution Q^3 bestehen soll.

Hier ist aber jetzt die Substitution H, die auf eine durch die Symmetrieaxe gehende Symmetrieebene hinweist, für die also

$$c_{15} = c_{16}$$

sein muß, in Folge der zu Grunde gelegten Form des Potentials schon erfüllt. Die beiden Classen der ersten Abtheilung zeigen also in elastischer Beziehung dieselben Symmetrieverhältnisse und man erhält für die

Erste Abtheilung des hexagonalen Systems.

$$\begin{aligned} 2\Phi = & \; c_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2c_{12}(x_x y_y + x_x z_z + y_y z_z) \\ & + 2c_{14}(x_x y_z + y_y z_x + z_z x_y) \\ & + 2c_{15}\big(x_x(z_x + x_y) + y_y(x_y + y_z) + z_z(y_z + z_x)\big) \\ & + c_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) + 2c_{45}(y_z z_x + y_z x_y + z_x x_y), \end{aligned}$$

$$c_{11} = c_{12} - c_{14} + c_{15} + 2c_{44} - 2c_{45}.$$

Hier kommen 5 Constante vor.

§ 16.

Es bleibt übrig, die gefundenen Formeln mit den bereits bekannten zu vergleichen. In diesen ist eine der Coordinatenaxen 6- oder 3-zählige Symmetrieaxe. Ich nehme dafür die z'-Axe und stelle folgende Formeln auf für den Uebergang vom bisher gebrauchten Coordinatensystem x, y, z zum neuen x', y', z'.

$$x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}},$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{2z}{\sqrt{6}},$$

$$z' = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}}$$

---

1) Kirchhoff, Mechanik S. 392.

sind u, v, w und u', v', w' durch dieselben Beziehungen mit einander verbunden, wie x, y, z und x', y', z', setzt man ferner

$$x'_x = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad y'_y = \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad \ldots \ldots,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
x_x &= \tfrac{1}{2} x'_x + \tfrac{1}{6} y'_y + \tfrac{1}{3} z'_z + \frac{\sqrt{2}}{6} y'_z + \frac{\sqrt{6}}{6} z'_x + \frac{\sqrt{3}}{6} x'_y, \\
y_y &= \tfrac{1}{2} x'_x + \tfrac{1}{6} y'_y + \tfrac{1}{3} z'_z + \frac{\sqrt{2}}{6} y'_z - \frac{\sqrt{6}}{6} z'_x - \frac{\sqrt{3}}{6} x'_y, \\
z_z &= \qquad\quad \tfrac{2}{3} y'_y + \tfrac{1}{3} z'_z - \frac{\sqrt{2}}{3} y'_z, \\
y_z &= \qquad - \tfrac{1}{3} y'_y + \tfrac{1}{3} z'_z - \frac{\sqrt{2}}{6} y'_z - \frac{\sqrt{6}}{6} z'_x + \frac{\sqrt{3}}{3} x'_y, \\
z_x &= \qquad - \tfrac{1}{3} y'_y + \tfrac{1}{3} z'_z - \frac{\sqrt{2}}{6} y'_z + \frac{\sqrt{6}}{6} z'_x - \frac{\sqrt{3}}{3} x'_y, \\
x_y &= - x'_x + \tfrac{1}{3} y'_y + \tfrac{2}{3} z'_z + \frac{\sqrt{2}}{3} y'_z.
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich für die

II. Classe der zweiten Abtheilung des hexagonalen Systems.

$$\begin{aligned}
2\Phi &= c'_{11}(x'^2_x + y'^2_y + \tfrac{1}{2} x'^2_y) + 2c'_{12}(x'_x y'_y - \tfrac{1}{4} x'^2_y) \\
&+ 2c'_{13}(x'_x + y'_y) z'_z + 2c'_{14}\big((x'_x - y'_y) y'_z + z'_x x'_y\big) \\
&+ 2c'_{15}\big((x'_x - y'_y) z'_x - y'_z x'_y\big) + c'_{33} z'^2_z + c'_{44}(y'^2_z + z'^2_x)
\end{aligned}$$

wobei folgende Gleichungen gelten

$$\begin{aligned}
c'_{11} &= \tfrac{1}{2}(c_{11} + c_{12} - 2c_{15} - 2c_{16} + 2c_{44}), \\
c'_{12} &= \tfrac{1}{6}(c_{11} + c_{12} - 8c_{14} - 2c_{15} - 2c_{16} - 2c_{44} + 8c_{45}), \\
c'_{13} &= \tfrac{1}{3}(c_{11} + 2c_{12} + 2c_{14} + 2c_{15} + 2c_{16} - 4c_{44} - 8c_{45}), \\
c'_{14} &= \frac{\sqrt{2}}{6}\left(c_{11} - c_{12} + c_{14} - \frac{c_{15} + c_{16}}{2} - 2c_{44} + 2c_{45}\right), \\
c'_{15} &= \frac{\sqrt{6}}{4}(c_{15} - c_{16}), \\
c'_{33} &= \tfrac{1}{3}(c_{11} + 2c_{12} + 4c_{14} + 4c_{15} + 4c_{16} + 4c_{44} + 8c_{45}), \\
c'_{44} &= \tfrac{1}{3}(c_{11} - c_{12} - 2c_{14} + c_{15} + c_{16} + c_{44} - c_{45}).
\end{aligned}$$

Ich füge die Auflösung dieser Gleichungen bei

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \tfrac{1}{9}(4c'_{11} + 4c'_{13} + c'_{33} + 8c'_{44} + 8\sqrt{2}c'_{14}),\\
c_{12} &= \tfrac{1}{9}(c'_{11} + 3c'_{12} + 4c'_{13} + c'_{33} - 4c'_{44} - 4\sqrt{2}c'_{14}),\\
c_{14} &= \tfrac{1}{9}(c'_{11} - 3c'_{12} + c'_{13} + c'_{33} - 4c'_{44} + 2\sqrt{2}c'_{14}),\\
c_{15} &= \tfrac{1}{9}(-2c'_{11} + c'_{13} + c'_{33} + 2c'_{44} - \sqrt{2}c'_{14} + 3\sqrt{6}c'_{15}),\\
c_{16} &= \tfrac{1}{9}(-2c'_{11} + c'_{13} + c'_{33} + 2c'_{44} - \sqrt{2}c'_{14} - 3\sqrt{6}c'_{15}),\\
c_{44} &= \tfrac{1}{18}(5c'_{11} - 3c'_{12} - 4c'_{13} + 2c'_{33} + 4c'_{44} - 8\sqrt{2}c'_{14}),\\
c_{45} &= \tfrac{1}{18}(-c'_{11} + 3c'_{12} - 4c'_{13} + 2c'_{33} - 2c'_{44} + 4\sqrt{2}c'_{14}).
\end{aligned}$$

Für die

I. Classe der zweiten Abtheilung des hexagonalen Systems

ist

$$c_{15} = c_{16},$$

also

$$c'_{15} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
2\Phi = {} & c'_{11}(x'^2_x + y'^2_y + \tfrac{1}{2}x'^2_y) + 2c'_{12}(x'_x y'_y - \tfrac{1}{4}x'^2_y)\\
& + 2c'_{13}(x'_x + y'_y)z'_z + 2c'_{14}\big((x'_x - y'_y)y'_z + z'_x x'_y\big)\\
& + c'_{33}z'^2_z + c'_{44}(y'^2_z + z'^2_x).
\end{aligned}$$

Für die

Erste Abtheilung des hexagonalen Systems

ist außer

$$c_{15} = c_{16}$$

noch diejenige Beziehung zwischen den Constanten c_{11}, c_{12} . . . vorhanden, für die

$$c'_{14} = 0$$

wird. Es ist also

$$\begin{aligned}
2\Phi = {} & c'_{11}(x'^2_x + y'^2_y + \tfrac{1}{2}x'^2_y) + 2c'_{12}(x'_x y'_y - \tfrac{1}{4}x'^2_y)\\
& + 2c'_{13}(x'_x + y'_y)z'_z + c'_{33}z'^2_z + c'_{44}(y'^2_z + z'^2_x).
\end{aligned}$$

Von diesen drei Formen des Potentials sind die beiden letzten mit bekannten Formen im Einklang, die erste ist neu.

In der **ersten Abhandlung** ist außer dem in der Anmerkung Seite 377 Bemerkten in dem Schema I. Seite 207 statt *AD*, *BD*, *CD* durchweg *DA*, *DB*, *DC* zu setzen.



Zur Histologie der Asteriden.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von

Dr. Otto Hamann.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Da bei den Untersuchungen über die Asteriden die histologische Zusammensetzung der Organe von den verschiedenen Autoren bei Seite gelassen wurde, sind die Ansichten derselben teils als ungenau, teils als unrichtig zu bezeichnen.

Die Körperwandung der Asteriden (Asterias rub., Solaster pappos., Asterias glacial.) besteht aus folgenden Schichten. Auf das Körperepithel folgt die Cutis (Bindesubstanzschicht), in welcher sich dorsal- wie ventralwärts die Kalkgebilde entwickeln. Auf die Bindesubstanzschicht, welche alle übrigen an Mächtigkeit überragt, folgt nach innen eine Rings- und Längsmuskelschicht. Letztere wurden von Ludwig als innere Bindesubstanzlamelle der Körperwand beschrieben. In ihr sollten ventralwärts die Wirbel entstehen. — In der Tiefe der Bindesubstanzschicht, den Muskelschichten aufliegend, treffen wir auf das Kanalsystem der Körperwandung, welches von einem Epithel ausgekleidet wird. Von der Ringsmuskelschicht gehen Muskelbündel ab, welche das Lumen der Kanäle durchsetzen und an bestimmten Orten in der Bindesubstanzschicht enden und sich verzweigen. Die Muskelschichten lassen sich auf der Ventralseite bis an die Wirbel verfolgen. Hier nehmen sie an Entwicklung ab, um zu verschwinden. Durch das Auffinden dieser Muskulatur wird erst die Bewegung eines Seesternes mit seinen Armen erklärlich. Nach Ludwig u. a. mußte man die große Beweglichkeit der Arme der zwischen den Kalkwirbeln befindlichen Muskulatur zuschreiben, welche dieselbe aber unmöglich bewirken könnte. —

Die Ambulacralkiemen sind als Ausstülpungen der Rückenwandung aufzufassen. Dieselben Schichten, welche letztere bilden, trifft man auf ihnen an. Es finden sich also auch die Muskelschichten vor, eine innere Ringsmuskellage und nach außen von derselben Längsmuskelfasern gelagert. Somit ist ihr Hervorstülpen sowol als das Einziehen derselben leicht verständlich und braucht man nicht zu der von Ludwig aufgestellten Hypothese, welche ihre Bewegungsweise erklären sollte, Zuflucht zu nehmen. Letzterer Forscher kannte nur die allerdings leicht auffindbare Längsmuskellage. Neben den Kiemen steigen die Kanäle senkrecht empor. —

Außer dem schon bekannten Gehirnring gelang es mir einen Nervenplexus in der Mundscheibe aufzufinden. Es besteht derselbe aus Nervenfibrillen mit eingestreuten Ganglienzellen, welche in der Tiefe der Epithelzellen der Mundscheibe verlaufen. Ob dieser Nervenplexus, welcher mit dem Gehirnring in Zusammenhang steht, schon in der Larve vorhanden war, darüber sollen weitere Untersuchungen unterscheiden. Durch das Vorhandensein dieses Nervenplexus in der Mundscheibe bei den Asteriden wird der Bau der Körperwandung, wie wir ihn bei der Holothurien [1]) fanden, wiederholt. Hier wie dort trifft man eine Rings- und Längsmuskelschicht nach innen von der Cutis gelagert an, mit der Ausnahme, daß bei den Holothurien die Längsmuskelschicht auf fünf Bänder reducirt ist, während sie bei Asteriden gleichmäßig verläuft.

In der Rückenhaut finden sich Nervenzüge vor, welche meist zur Längsaxe der Arme rechtwinklich verlaufen. Das Epithel des Rückens, welches auch die Ambulacralkiemen, die Pedicellarien und Stacheln überzieht, setzt sich zusammen aus einfachen Epithelzellen, (Stützzellen), zwischen deren basalen Verlängerungen die Nervenfibrillen verlaufen, aus Sinneszellen und becherförmigen Drüsenzellen.

Ueber Metanitroparatoluyl-phenyl-Harnstoff.

Von

R. Leuckart.

Vom Harnstoff, dem Amid der Kohlensäure ausgehend, lassen sich eine große Classe von Derivaten ableiten, welche in ihrem chemischen Charakter der Muttersubstanz mehr oder minder entsprechend, durch successive Substitution deren Amidwasserstoffe durch Alkohol- oder Säureradikale entstanden sind.

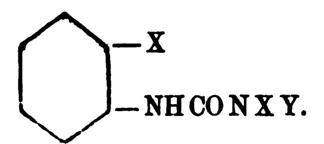
Eine große Anzahl derartiger Körper der fetten wie der aromatischen Reihe sind im Laufe der Zeit bekannt geworden, auffallender Weise jedoch wenige darunter, welche, der Benzolreihe angehörend, in dem substituirenden Phenylradikale eine weitere Substitution durch elektronegative Atome oder Atomgruppen erfahren haben.

Von dieser Classe von Verbindungen scheint mir aber namentlich eine besonderes Interesse zu verdienen diejenige nämlich, welche die

---

1) Vergl. meine: Beiträge zur Histologie der Echinodermen. Heft 1: Holothurien. Jena, Fischer 1884.

substituirende Atomgruppe in der sogenannten Orthostellung zu der Amidgruppe des Harnstoffs enthalten; Körper demnach der allgemeinen Formel:



Nach den Erfahrungen nämlich, welche besonders in neuerer Zeit über das Verhalten derartig constituirter Körper in ziemlich umfangreichem Maßstabe gesammelt sind, ist zu erwarten, daß bei denselben die substituirende Atomgruppe mit der Carbonyl oder Amidgruppe des Harnstoffs unter Bildung sogenannter Condensationsprodukte in Reaktion treten werden. Die so entstehenden Körper dürften aber, wenn auch nur wegen der allgemeinen Bedeutung und Wichtigkeit des Harnstoffs von einigem Interesse sein.

Hauptsächlich von diesem Gesichtspunkte geleitet unternahm ich einige Versuche, derartig substituirte Harnstoffe zu erhalten, Versuche, welche ich im Begriffe bin, in Gemeinschaft mit Herrn Wrampelmeyer weiter zu verfolgen.

Ich wandte mich dabei zunächst dem Studium orthonitrirter Harnstoffe zu, welche voraussichtlich bei der Reduktion unter Wasseraustritt mit der Carbonylgruppe reagiren und dabei in Körper von ausgesprochen basischem Charakter übergehen werden.

$$C_6H_4\begin{matrix}\text{--NH CO N XY}\\ \text{--}NH_2\end{matrix} \; - H_2O = C_6H_4\begin{matrix}N\\ NH\end{matrix}\!\!>\!C-NXY$$

Es war von vorn herein nur wenig aussichtsvoll, vielleicht vom Mono- oder Di-phenylharnstoff ausgehend diese Körper durch direkte Nitrirung zu erhalten; nach den Erfahrungen, welche wir über die Nitrirung aromatischer Substanzen bis jetzt gesammelt haben, werden vielmehr voraussichtlich hierbei Meta- oder Paranitro-Derivate gebildet werden; ich suchte daher eine allgemeine Bildungsweise alkylirter Harnstoffe auch für die Gewinnung solcher substituirter Alkyl-Harnstoffe in Anwendung zu bringen.

Carbimid oder deren Aether, die gewöhnlichen Cyanate, gehen bekanntlich unter Aufnahme von Ammoniak bez. primären und sekundären Aminbasen in Carbamide, bez. substituirte Carbamide über:

$$CONX + NHXY = CO\begin{matrix}NHX\\ NXY\end{matrix}$$

Erstreckte sich diese Reaktion der Cyanate aber auch auf sub-

stituirte Aminbasen, z. B. orthonitrirte, so war die Bildung substituirter z. B. orthonitrirter Alkylcarbamide zu erwarten.

Ich wählte als Ausgangsmaterial für diese Versuche Phenylcyanat, welches jetzt nach der kürzlich durch Hentschel[1]) bekannt gewordenen schönen Methode leicht und in größeren Mengen zu beschaffen ist; andererseits schien mir Metanitroparatoluidin, die relativ am leichtesten zugängliche orthonitrirte Aminbase am meisten geeignet.

In der That nun tritt dieselbe leicht und glatt in Reaktion mit dem Cyanat. Es genügt Mengen der beiden Körper, wie sie der Umsetzungsgleichung

$$CO\,NC_6H_5 + C_6H_3CH_3 \begin{matrix} NH_2 \\ NO_2 \end{matrix} = CO \begin{matrix} NH\,C_6H_5 \\ NH\,C_6H_3\,CH_3\,NO_2 \end{matrix}$$

entsprechen, wenige Minuten mit einander zu erwärmen, um sogleich die charakteristische rothe Farbe der Aminbase ebenso wie den stechenden Geruch des Phenylcyanates verschwinden zu machen. Die dann fest gewordene Masse kocht man mit wenig verdünntem Alkohol aus, welcher etwa überschüssiges Amin oder Cyanat entfernt, das letztere unter Ueberführung in das leicht lösliche Urethan. Den hierbei ungelöst gebliebenen Rückstand krystallisirt man aus viel siedendem Alkohol um.

Man erhält so schön citronengelbe Nadeln, welche leicht löslich in Aether, Benzol und Chloroform, sich nur schwierig in kochendem Alkohol auflösen. In Wasser ist die Verbindung ganz unlöslich, ebenso in kaltem Alkohol und Ligroin; welches sie daher aus ihrer Benzollösung in kleinen gelben Nadeln ausfällt. Der Schmelzpunkt liegt bei 194°. Der Körper ist völlig indifferent und zersetzt sich über seinen Schmelzpunkt erhitzt partiell, unter Abgabe von Dämpfen von Phenylcyanat und Metanitroparatoluidin. Zeigt demnach der Körper die Eigenschaften eines alkylirten Harnstoffes, so stimmt auch seine Zusammensetzung mit dieser Auffassung überein. Seine Analyse führte zu der Formel $C_{14}H_{13}N_3O_3$ entsprechend seiner Constitution:

$$CO \begin{matrix} NH\,C_6H_5 \\ NH\,C_6H_3\,CH_3\,NO_2 \end{matrix}$$

Bei der Reduktion mit Zinn und Salzsäure geht er in eine schön krystallisirende Base über, mit deren Untersuchung ich eben beschäftigt bin.

Dieselbe Base hoffe ich auch bei der Einwirkung von Orthotoluylendiamin auf Phenylcyanat zu erhalten. Die Reaktion beider Körper auf einander ist äußerst heftig, so daß es vortheilhaft ist

1) Berl. Ber. XVII 1284.

beide Agentien mit Benzol stark zu verdünnen. Je nach den Mengenverhältnissen in welchen man so beide Substanzen auf einander reagiren läßt; erhält man verschiedene Produkte, welche vermuthlich den Körpern

$$CO\,NC_6H_5 + C_6H_3CH_3\begin{matrix}NH_2\\NH_2\end{matrix} = CO\begin{matrix}NH\,C_6H_5\\NH\,C_6H_3CH_3NH_2\end{matrix}$$

respektive

$$2\,CO\,NC_6H_5 + C_6H_3CH_3\begin{matrix}NH_2\\NH_2\end{matrix} =$$

$$\begin{matrix}CO & \begin{matrix}NH\,C_6H_5\\NH\end{matrix}\\ & \;\;>C_6H_3CH_3\\CO & \begin{matrix}NH\\NH\,C_6H_5\end{matrix}\end{matrix}$$

beziehentlich Condensationsprodukten derselben entsprechen werden. Die genauere Untersuchung dieser gut charakterisirten Verbindungen beschäftigt mich eben; ebenso habe ich, bis jetzt allerdings noch ohne Erfolg Versuche aufgenommen, die interessanten, bis jetzt noch ganz unbekannten Substitutionsderivate der Carbimidäther, namentlich orthonitrirte Cyanate zu gewinnen; von diesen aus hoffe ich dann durch Einwirkung von Aminbasen substituirte Alkylharnstoffe, dieselben, welche ich bei der Einwirkung von Carbimid auf substituirte Amine erhalten habe oder vielleicht Isomere derselben darstellen zu können, und so auf die immer noch schwebende, allerdings schon oft ventilirte Frage nach der Existenz derartig isomerer Harnstoffe, bez. der Gleichwerthigkeit der beiden Valenzen der Carbonylgruppe zurückzukommen [1]).

$$\text{I.}\quad C_6H_3CH_3\begin{matrix}NH_2\\NO_2\end{matrix} + CO\,NC_6H_5 = CO\begin{matrix}NH\,C_6H_3CH_3NO_2\\NH\,C_6H_5\end{matrix}$$

$$\text{II.}\quad C_6H_5NH_2 + CO\,N\,C_6H_3\cdot CH_3\cdot NO_2 = CO\begin{matrix}NH\,C_6H_5\\NH\,C_6H_3CH_3NO_2\end{matrix}$$

Leider zwingt mich der Schluß des Semesters die begonnenen Versuche für einige Zeit abzubrechen; ich hoffe jedoch bald in der Lage zu sein über den Verlauf derselben berichten zu können.

Göttingen, den 2. August 1884.

Ueber Metanitroparatoluylphtalimid.

Von

Dr. Leuckart.

Gelegentlich seiner »Versuche zur Oxydation stickstoffhaltiger

---

1) Vergl. u. A. Leuckart, J. pr. Ch. N. F. XXI 1 ff. Schreiner, J. pr. Ch. N. F. XXII, 358 ff.

methylirter Benzolabkömmlinge« erhielt A. Brückner[1]) durch Oxydation des Anhydroparatoluyldiamidobenzols einen Körper von ausgesprochen saurem Charakter »Anhydrobenzamidoparatoluylsäure.«

$$C_6H_4 \begin{matrix} NH \\ N \end{matrix} \gg \overset{1)}{C} - C_6H_4 - \overset{p}{C}H_3 + O_3 =$$

$$C_6H_4 \begin{matrix} NH \\ N \end{matrix} \gg \overset{1)}{C} - C_6H_4\overset{p}{C}OOH + H_2O$$

einen Körper, welcher als »der erste Repräsentant einer neuen Classe stickstoffhaltiger Säuren« anzusehen ist. Brückner hat diese Säure durch einige Salze charakterisirt, sowie weiter ihr Keton »Anhydrotoluylketamin« dargestellt.

Da das Studium derartiger Substanzen sonst nicht weiter durchgeführt ist, dasselbe jedoch einiges Interesse verdient, schien es mir wünschenswerth, im Anschluß an die im hiesigen Laboratorium ausgeführten Untersuchungen »über Anhydroverbindungen« Versuche über diese Körperklasse wieder aufzunehmen. Hierbei schienen mir jedoch mehr noch als diese Paraverbindungen Brückner's entsprechende Orthoverbindungen Interesse zu verdienen, zumal dieselben, ausgehend von Phtalsäureanhydrid, eventuell leicht in größerer Menge zu erhalten waren. Ließ sich nämlich aus einem Orthonitrophtalanil eine orthonitrirte Phtalanilsäure darstellen, so kann diese eventuell bei der Reduktion in eine »Anhydrobenzamidoorthotoluylsäure« übergehen.

$$1)\quad C_6H_4 \begin{matrix} NO_2 \\ N \end{matrix} \begin{matrix} -CO \\ -CO \end{matrix} \Big\} C_6H_4 + HOH =$$

$$C_6H_4 \begin{matrix} NO_2 \\ NH \end{matrix} \overset{1)}{C}O - C_6H_4 - \overset{0)}{C}OOH$$

$$2)\quad C_6H_4 \begin{matrix} NO_2 \\ NHCO \end{matrix} - C_6H_4COOH + 3H_2 =$$

$$C_6H_4 \begin{matrix} NH_2 \\ NH \end{matrix} \overset{1)}{C}O - C_6H_4\overset{0)}{C}OOH$$

$$C_6H_4 \begin{matrix} NH_2 \\ NH \end{matrix} - CO - C_6H_4COOH = H_2O +$$

$$C_6H_4 \begin{matrix} N \\ NH \end{matrix} \gg \overset{1)}{C} - C_6H_4 - \overset{0)}{C}OOH$$

Orthonitrophtalanil würde unter den gleichen Bedingungen zu einem Anhydrid

$$C_6H_4 \begin{matrix} N \\ N \end{matrix} \gg \overset{1)}{C} - C_6H_4 - \overset{0)}{C}O$$

führen.

1) A. Brückner, Ann. der Chem. u. Pharm. 205, 113.

Ladenburg[1]) hat zwar aus der entsprechenden Oxyverbindung, Orthooxyphtalanil, nicht eine zugehörige Anhydroverbindung erhalten, sondern einen Zerfall der Verbindung in Kohlensäure und Benzenylamidophenol beobachtet,

$$C_6H_4 \begin{matrix} OH \\ N \end{matrix} \begin{matrix} -CO \\ -CO \end{matrix}\Big\} C_6H_4 = CO_2 + C_6H_4 \begin{matrix} O \\ N \end{matrix} \gg C - C_6H_5$$

indessen schien mir dieser negative Erfolg nicht ohne Weiteres gegen die Möglichkeit der gewünschten Anhydridbildung bei der amidirten Verbindung zu sprechen. Bekanntlich nämlich zeigen orthoamidirte Körper eine viel größere Neigung zur Wasserabspaltung als die Oxyverbindungen, welche Ladenburg der trockenen Destillation hat unterwerfen müssen um das Anhydroderivat zu erhalten.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend versuchte ich zunächst die Darstellung orthonitrirter Phtalanile.

Phtalanil entsteht leicht bei der Destillation gleicher Moleküle Phtalsäure und Anilin[2]) und ebenso hat Gabriel[3]) eine Anzahl substituirter Phtalanile dargestellt u. a. auch Metanitrophtalanil. Nach derselben Reaktion lassen sich aber auch wie ich beobachtet habe orthonitrirte Derivate erhalten.

Ich wählte als Ausgangsmaterial Metronitroparatoluidin. Erhitzt man dieses mit etwas mehr als einem Molekül Phtalsäureanhydrid auf 160—180°, so erhält man eine homogene Schmelze, welche bald Wasser abscheidet und dabei ihre anfänglich rothe Färbung verliert. Ist keine weitere Abgabe von Wasser bemerkbar, so kocht man die nach dem Erkalten erstarrte Masse mehrmals mit Wasser oder auch verdünntem Alkohol aus, um überschüssiges Phtalsäureanhydrid zu entfernen und krystallisirt den hierbei ungelöst gebliebenen Rückstand aus viel heißem Alkohol um. Man erhält so derbe farblose tafelartige Krystalle, welche bei der Analyse die Zusammensetzung des Metanitroparatoluylphtalimids zeigen. Für die Verbindung

$$C_6H_3 \cdot CH_3 \cdot \begin{matrix} NO_2 \\ N \end{matrix} \begin{matrix} -CO \\ -CO \end{matrix}\Big\} C_6H_4$$

berechet sich:	Gefunden
N = 9,93	10,12.

Der Körper schmilzt bei 186°, erstarrt nach dem Schmelzen schön krystallinisch und läßt sich bei vorsichtigem Erhitzen auch unzersetzt destilliren. Er ist ganz unlöslich in Wasser, sehr schwer

1) Berl. Ber. 9, 1527.
2) Laurent, Gerhardt, J. 1847/48 605.
3) Gabriel, Berl. Ber. XI. 2260.

löslich in Alkohol, selbst beim Kochen, wenig löslich ferner in Aether und Ligroin, leicht dagegen in Chloroform und Benzol, aus welchem letzteren Lösungsmittel er in besonders schönen derben Krystallen erhalten wird.

Das weitere Studium dieser Substanz beschäftigt mich zur Zeit und werde ich, wie bemerkt, mein Augenmerk hauptsächlich auf die Reduktionsprodukte desselben sowie die entsprechende Phtalanilsäure und deren Reduktionsprodukte richten.

Göttingen, den 2. August 1884.

Ueber die Darstellung größerer Mengen von Orthodinitrobenzol[1]).

Von

Paul Jannasch.

(Vorgelegt von C. Klein).

Vor einiger Zeit erhielt der am 13. Juli durch einen plötzlichen Tod der Wissenschaft entrissene Professor H. Hübner aus der Chemischen Fabrik von C. A. F. Kahlbaum in Berlin eine größere Menge (c. 20 Kilo) von Mutterlaugenrückständen von der Darstellung von Meta-Dinitrobenzol im Großen. Dieselben bildeten eine lose aus Nadeltrümmern bestehende Krystallmasse, welche zur Hauptsache Meta-Dinitrobenzol war, mit verhältnißmäßig geringen Verunreinigungen an Mononitrobenzol, Theeröl u. s. f., im Uebrigen aber, wie ein von mir unternommenes genaueres Studium des Productes sehr bald lehrte, reichliche Mengen von Orthodinitrobenzol enthielt. Die Darstellung dieser bislang so kostbaren Verbindung aus dem vorliegenden Gemisch gelang mir nach dem folgenden Verfahren in einfachster Weise. Man überschüttet nämlich die vorher zerriebene Krystallmasse in einem Becherglase mit ungefähr der anderthalbfachen bis doppelten Menge Benzol (auf 100 gr. Substanz 150—200 Cc.) und durchrührt sie so lange damit bis sich nichts mehr löst; das Meta-Derivat wird von dem kalten Benzol unter starker Abkühlung sehr leicht und rasch aufgenommen, während das Ortho-Dinitrobenzol nur in sehr geringen Mengen darin löslich ist. Man giebt nun den ungelöst gebliebenen Antheil auf ein Filter und wäscht ihn mit Benzol aus. Ein einmaliges Umkrystallisiren des so erhaltenen har-

---

1) Die interessanten optischen Eigenschaften des Ortho-Dinitrobenzols cf. Dr. E. Wickel in dessen Inaugural-Dissertation Göttingen 1884 bei W. Fr. Kästner. —

ten Krystallpulvers aus Benzol oder Alkohol genügte bereits zur Herstellung eines reinen, constant bei 118° schmelzenden Präparates. Es sind nach dieser meiner Methode im hiesigen Laboratorium mehrere Pfunde chemisch reines Ortho-Dinitrobenzol gewonnen worden. Das erste von Kahlbaum gelieferte Product war ungemein reich daran, es lieferte durchschnittlich 12—15%; eine spätere Sendung enthielt nur 5—7%.

Sehr werthvoll würde jedenfalls im Hinblick auf eine spätere technische Verwendung des Orthodinitrobenzols die Entscheidung der Frage sein, ob die in dem Kahlbaum'schen Product vorhandenen, außergewöhnlich großen Massen der Verbindung einzig und allein den in der genannten Fabrik üblichen Umkrystallisationsmethoden, also einer systematischen Anreicherung der Mutterlaugen, ihren Ursprung verdanken, oder ob gewisse Modificationen im Nitrirungsprocesse die Entstehung derselben veranlaßten, und möchte ich hiermit zuerst die Aufmerksamkeit auf diese nicht unwichtige Angelegenheit gelenkt haben. —

Göttingen im Juli 1884.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juli 1884.

(Fortsetzung.)

Acta mathematica 4 : 1.
Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. 22. Jahrg. No. 1—4.
21. Jahresbericht des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. 1882/3.
Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. k. Akademie der Wissensch. 1884. Hft. 1.
Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. k. Akademie der Wissenschaft. Bd. XIV. Abth. 3.
L. Radlkofer, Festrede über die Methoden in der botanischen Systematik. München 1883.
K. Haushofer, Franz von Kobell. München 1884.
C. Kupffer, Gedächtnißrede auf Theodor L. W. v. Bischoff. München 1884.
A. von Druffel, Monumenta Tridentina. Hft. 1.
Preisschriften, gekrönt und herausgegeben von der fürstl. Jablonovski'schen Gesellsch. zu Leipzig. No. XVI der historisch-national-ökonom. Section.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVII. Entr. 5.
Rhenus. 2. Jahrgg. No. 7.
Nature. No. 766. 767. 768. 769.
Atti della r. accademia delle scienze di Torino. Vol. XIX. Disp. 4.

Bolletino dell' observatorio della r. Universita die Torino. Anno XVIII.
Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins in Bremen. Bd. VIII Hft. 2. Bd. IX Hft. 1.
Report on the scientific results of the exploring voyage of her Maj. Ship Challenger 1873—1876. Narrative. Vol. II. Physics and chemistry. Vol. I. Zoology Vol. I—VIII.
Ztschr. der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Juli.
Leopoldina. Hft. 20. No. 11. 12.
Atti della societa toscana di scienze naturali, Processi verbali. Vol. IV. 4 maggio.
Archives neerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. XIX. Livre 2.
Veröffentlichungen der großherzoglichen Sternwarte zu Karlsruhe. Hft. 1.
Atti della r. accademia dei Lincei. Serie 3ª. Transunti. Fasc. 11. 12.
Proceedings of the london mathematical society. No. 219—221.
Das Wetter, meteorologische Monatsschrift. 1. Jahrgg. No. 3.
Johns Hopkins University circulars. Vol. III. No. 31. 32.
Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. XIX. Hft. 2.
Proceedings of the scientific meetings of the zoological society of London. 1884. P. I.
Mémoires de la société roy. des sciences de Liège. Supplément au T. X. 12 tables pour le calcul des réductions stellaires par F. Folie.
E. Rethwisch, der Irrthum der Schwerkrafthypothese. 2. Aufl. Freiburg 1884.
Jahrbuch für schweizerische Geschichte. Bd. IX.
A. Sacchi, nuove ricerche sulle forme cristalline dei paratartrati acidi di ammonio e di potasso. Napoli 1884. 4.
Bulletin of the california academy of sciences. No. 1. Febr. 1884.
H. W. Harkness and Justin P. Moore, Catalogue of the pacific coast fungi.
W. Phillips and H. W. Harkness, Fungi of California. Read before the Californ. acad. of sc.
Lotos, N. F. Bd. V.
Annales de l'observatoire royal de Bruxelles. N. F. Annales astronomiques. T. IV.
Annales de l'observatoire roy de Bruxelles. Appendice à la nouvelle série. Vade-mecum de l'astronome par J. C. Houzeau. Bruxelles 1882.
J. C. Houzeau et A. Lancaster, bibliographie générale de l'astronomie. T. II.
Observations météorologiques faites aux stations internationale de la Belgique et des pays-bas. 4e année 1880.
Ch. Lagrange, exposition critique de la méthode de Wronski etc. 1e partie.
Annuaire de l'observation royal de Bruxelles. 1882. 1883. 1884.
Diagrammes du météorographe van Rysselberghe. 1879. 1880. 1881. 1882.
Annales de la faculté des lettres de Bordeaux. 3e année. No. 1—5. 4e année. No. 1—5. 5e année. No. 1—4. 2e Série. 1884. No. 1.
K. Weihrauch, meteorologische Beobachtungen, angestellt in Dorpat. Bd. III. Hft. 2—5.
Mittheilnngen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ost-Asiens. Bd. II. III. Titel.
Bulletin of the american geographical society. 1883. No. 6. 1884. No. 2.
Oeuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'academie des sciences. T. VI.
Neues lausitzisches Magazin. Bd. LX. Hft. 1.
Boncompagni, bulletins di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. T. XVI. Sett. Ott. (für die Gauss-Bibliothek).
Bijdragen tot de taal- land- en volkenkunde van nederlandsch-Indie. Deel VIII. St. 2.
Atti della reale accademia di Torino. Vol. XIX. Disp. 5.
Verhandlungen des naturhistorisch-medicin. Vereins in Heidelberg. N. F. Bd. III. Hft. 3.
Proceedings of the american pharmaceutical association at the 31th annual meeting. Philadelphia 1884.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

12. November. № 10. 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.

Von **K. Weierstrass**, Ausw. Mitgl.

[**Auszug** aus einem an H. A. Schwarz gerichteten Briefe, der Königlichen Gesellschaft mitgetheilt in der Sitzung am 1. December 1883.]

Berlin, 19—27. Juni 1883.

...... Ich komme jetzt zur Beantwortung Ihres Briefes vom 9. d. M. Die Fragen, die derselbe enthält, lassen sich, wie ich glaube, in völlig befriedigender Weise erledigen.

In der Selbstanzeige seiner zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste schließt Gauß, nachdem er seine Auffassungsweise des Begriffes und der Theorie der aus zwei Haupteinheiten $(1, i)$ gebildeten complexen Größen dargelegt hat, mit folgender Bemerkung:

»Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird«. (Gauß Werke, Band II. Seite 178.)

Aus dieser Bemerkung scheint mir hervorzugehen, daß Gauß Untersuchungen darüber angestellt habe, ob sich für complexe Größen mit n Haupteinheiten die Grundoperationen, Addition, Multiplication, Subtraction und Division so definiren lassen, daß die im Gebiete der

sogenannten reellen Zahlgrößen (der Größen mit einer Haupteinheit) bestehenden arithmetischen Gesetze ihre Gültigkeit behalten, und daß er dabei zu der Ueberzeugung gekommen sei, es werde dies unmöglich, sobald $n > 2$.

Um über diesen Punkt ins Klare zu kommen, habe ich bereits vor Jahren[1]) folgende Betrachtungen angestellt.

Nach Aufstellung des Begriffes einer aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größe ist zunächst zu untersuchen, ob und wie sich für ein Gebiet solcher Größen, d. h. für die Gesammtheit der aus denselben Haupteinheiten $(e_1, e_2, \dots e_n)$ gebildeten Größen die arithmetischen Grundoperationen so definiren lassen, daß erstens, wenn $a, b, c, \dots$ beliebige Größen des Gebietes sind,

$$a+b, \quad a-b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}$$

ebenfalls dem Gebiete angehören, und daß zweitens die in den folgenden Gleichungen ausgesprochenen Gesetze gelten:

$$(1.)\left\{\begin{aligned} a+b &= b+a \\ (a+b)+c &= (a+c)+b \\ (a-b)+b &= a, \end{aligned}\right. \qquad (2.)\left\{\begin{aligned} ab &= ba \\ (ab)c &= (ac)b \\ a(b+c) &= ab+ac \\ \frac{a}{b}b &= a. \end{aligned}\right.$$

Es mögen im Folgenden mit den griechischen Buchstaben Zahlgrößen bezeichnet werden, die aus einer unbenannten Haupteinheit gebildet sind, so kann jede Größe des betrachteten Gebietes in der Form

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

dargestellt werden, wenn man unter $\xi_\alpha e_\alpha$ die Größe versteht, die man dadurch erhält, daß man e_α an die Stelle der unbenannten Haupteinheit von ξ_α setzt. Die Zahlgrößen ξ_α sollen die Coordinaten der betrachteten complexen Größe genannt werden. Dies vorausgeschickt, sei

$$a = \sum_\alpha \alpha_\alpha e_\alpha, \qquad b = \sum_\alpha \beta_\alpha e_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (1.), daß $a+b$, $a-b$ zu definiren sind durch die Formeln

$$(3.)\quad a+b = \sum_\alpha (\alpha_\alpha + \beta_\alpha) e_\alpha, \qquad a-b = \sum_\alpha (\alpha_\alpha - \beta_\alpha) e_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n).$$

---

1) Im Wintersemester 1861—62 habe ich zum ersten Male über diesen Gegenstand etwas vorgetragen.

Ferner folgt aus (2.)

(4.) $$ab = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} (\alpha_{\mathfrak{b}}\beta_{\mathfrak{c}})(e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{c}}), \qquad (\mathfrak{b},\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots n)$$

oder, da $e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{c}}$ die Form

(5.) $$e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{c}} = \sum_{\mathfrak{a}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} e_{\mathfrak{a}}$$

haben soll:

(6.) $$ab = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} (\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\alpha_{\mathfrak{b}}\beta_{\mathfrak{c}}) e_{\mathfrak{a}}.$$

Aus den Gleichungen

(7.) $$e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{c}} = e_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{b}}, \qquad (e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{c}})e_{\mathfrak{d}} = (e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{d}})e_{\mathfrak{c}}, \qquad (\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d} = 1, 2, \ldots n)$$

ergiebt sich nun eine Anzahl von Bedingungsgleichungen, denen die Größen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ genügen müssen, welche hinzuschreiben für das Folgende jedoch nicht erforderlich ist. Man überzeugt sich aber leicht, daß denselben durch unendlich viele Werthsysteme der Größen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ Genüge geschehen kann. Wählt man irgend eins dieser Werthsysteme aus, so wird durch die Gleichung (6.) das Product ab stets so definirt, daß die Gleichungen

$$ab = ba, \quad (ab)c = (ac)b, \quad a(b+c) = ab+ac$$

bestehen. Um dann $\frac{a}{b}$ zu definiren, setze man

$$\frac{a}{b} = \sum_{\mathfrak{a}} \gamma_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}; \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n).$$

dann sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ so zu bestimmen, daß die Gleichungen

(8.) $$\alpha_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \beta_{\mathfrak{b}} \gamma_{\mathfrak{c}} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n)$$

bestehen.

Hat nun die Determinante

$$\varepsilon = \left| \sum_{\mathfrak{b}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \beta_{\mathfrak{b}} \right| \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots n)$$

einen von Null verschiedenen Werth, so sind durch die vorstehenden Gleichungen die Coordinaten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ eindeutig bestimmt, und es ist demnach die Division von a durch b möglich. Ist aber $\varepsilon = 0$, so ist die Division nur dann ausführbar, wenn unter den Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ eine bestimmte Relation stattfindet; es hat aber dann der Quotient $\frac{a}{b}$ unendlich viele Werthe.

Hiernach ist die Wahl der Größen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ der Beschränkung zu unterwerfen, daß die in Rede stehende Determinante nicht identisch, d. h. für beliebige Werthe von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ verschwinden darf. Aber,

wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann es doch specielle Größen b geben, für welche die zugehörige Determinante verschwindet — eine genauere Untersuchung zeigt sogar, daß solche Größen stets existiren, sobald $n > 2$ ist,[1]) worauf jedoch hier noch nicht eingegangen zu werden braucht. Eine derartige Größe b ist dadurch charakterisirt, daß sich ihr, und zwar auf unendlich viele Arten, eine andere Größe c, die nicht gleich Null ist, so zugesellen läßt, daß

$$bc = 0$$

ist; ich will sie deshalb einen »Theiler der Null« nennen, und diese Benennung auch auf den Fall ausdehnen, wo sie selbst den Werth Null hat. Es ist klar, daß ein Theiler der Null wieder einen solchen giebt, wenn er mit einer beliebigen Größe multiplicirt wird.

Hiernach wird die Gleichung

$$a + bx = 0$$

durch unendlich viele Werthe von x befriedigt, wenn a, b die Form

$$a = ka', \qquad b = kb'$$

haben und k ein Theiler der Null ist, b' aber nicht. Denn dann kann man, wenn l irgend ein solcher Theiler der Null ist, der mit k multiplicirt, das Product 0 giebt, x so bestimmen, daß $a' + b'x = l$ ist, und hat dann

$$k(a' + b'x) = kl = 0.$$

Ebenso kann eine algebraische Gleichung beliebigen Grades

$$a + bx + \cdots + hx^m = 0$$

unendlich viele Wurzeln besitzen, wenn ihre Coefficienten $(a, b, \ldots h)$ die Form

$$a = ka', \quad b = kb', \quad \ldots \quad h = kh'$$

haben und k ein Theiler der Null ist. Dazu brauchen bloß die Größen $a', b', \ldots h'$ so beschaffen zu sein, daß sich die Gleichung

$$a' + b'x + \cdots + h'x^m = l$$

für unendlich viele Werthe von l, für welche $kl = 0$ ist, lösen läßt.

Die Existenz der »Theiler der Null«, welche nicht gleich Null sind, scheint also einen wesentlichen Unterschied zwischen der Arithmetik der aus mehreren Haupteinheiten gebildeten Größen und der

1) Auch in dem Falle, wo $n = 2$, kann es solche Größen geben, wenn man bei der Definition der Multiplication die Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ den angegebenen Bedingungen entsprechend, im Uebrigen aber nach Willkür annimmt.



gewöhnlichen Arithmetik zu begründen. Indessen, da es im Gebiete der aus einer Haupteinheit gebildeten Größen keinen anderen Theiler der Null giebt, als diese selbst, so ist der Satz, daß in der Arithmetik der allgemeinen complexen Größen eine algebraische Gleichung von der angegebenen Beschaffenheit unendlich viele Wurzeln haben könne, eine naturgemäß begründete Analogie zu dem in der gewöhnlichen Arithmetik geltenden, daß eine algebraische Gleichung unendlich viele Wurzeln hat, wenn alle ihre Coefficienten gleich Null sind. Und diese Analogie würde eine vollkommene sein, und die Arithmetik der allgemeinen complexen Größen mit der Arithmetik der aus einer Haupteinheit gebildeten, so weit als es überhaupt möglich ist, in Einklang gebracht werden, wenn es sich herausstellte, daß im Allgemeinen, d. h. wenn bei der Festsetzung des Multiplicationsverfahrens nur specielle — bestimmt anzugebende — Werthsysteme der Größen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ ausgeschlossen werden, eine algebraische Gleichung nur in dem Falle, wo alle ihre Coefficienten aus einem und demselben Theiler der Null durch Multiplication desselben mit beliebigen Größen hervorgehen, unendlich viele Wurzeln haben könne.

Dies verhält sich aber in der That so. —

Angenommen wird also zunächst, daß die vorhin mit ε bezeichnete Determinante nicht identisch $= 0$ sei. Daraus ergiebt sich die Existenz einer Größe e_0 von der Eigenschaft, daß $e_0 a = a e_0 = a$ ist für jeden Werth von a.[1])

Nun sei

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

eine Größe des betrachteten Gebietes mit unbestimmten Coordinaten $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, und es werde x^ν auf die Form

$$x^\nu = \xi_1^{(\nu)} e_1 + \xi_2^{(\nu)} e_2 + \cdots + \xi_n^{(\nu)} e_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \tag{9.}$$

gebracht. Angenommen nun, es sei die Determinante

$$| \xi_\mu^{(\nu)} | \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

identisch gleich Null, so läßt sich aus den Gleichungen (9.) eine andere von der Form

$$X_0 x^{m+1} + X_1 x^m + \cdots + X_m x = 0$$

ableiten, wo $m < n$ und die Coefficienten X_μ ganze Functionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind, von denen X_0 nicht identisch gleich Null ist.

1) Siehe die Anmerkung auf Seite 414.

Man lege nun den Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bestimmte Werthe $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n$ bei, wodurch X_μ den Werth X'_μ erhalte. Dann existiren, wenn man von particulären Werthsystemen der Größen ξ'_ν absieht, unendlich viele Werthsysteme $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, für welche die Gleichungen

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{X'_1}{X'_0}, \quad \ldots \quad \frac{X_m}{X_0} = \frac{X'_m}{X'_0}$$

bestehen.[1]) Setzt man daher

$$a_\mu = X'_\mu e_0, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots m)$$

so hat die Gleichung

$$a_0 x^{m+1} + a_1 x^m + \cdots + a_m x = 0$$

unendlich viele Wurzeln, ohne daß ihre Coefficienten sämmtlich Theiler der Null sind.

Die Determinante

$$|\xi_\mu^{(\nu)}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

ist eine homogene ganze Function der Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und im Allgemeinen nicht identisch gleich Null, wie man leicht nachweisen kann.[2]) Ihre Coefficienten können mithin nur für specielle Werthsysteme der Größen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ verschwinden, und diese müssen also ausgeschlossen werden, wenn der Forderung, daß eine algebraische Gleichung nur in dem besprochenen Falle solle unendlich viele Wurzeln haben können, genügt werden soll.

Dies vorausgesetzt, gebe man den Coordinaten ξ_μ irgend welche bestimmte Werthe, für welche die in Rede stehende Determinante einen von Null verschiedenen Werth und zugleich x einen Werth g erhält, der nicht ein Theiler der Null ist. Dann lassen sich die Größen $e_1, e_2, \ldots e_n$ in der Form

$$(10.) \qquad e_\mathfrak{a} = \sum\nolimits_\mathfrak{b} \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} g^\mathfrak{b} \qquad (\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots n)$$

darstellen, und man erhält, wenn man auch g^{n+1} bildet, eine Gleichung

$$(11.) \qquad g^{n+1} + \varepsilon_1 g^n + \varepsilon_2 g^{n-1} + \cdots + \varepsilon_n g = 0$$

oder

$$(11.\text{a}) \qquad g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \varepsilon_2 g^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n e_0 = 0.$$

Setzt man nun, unter $\mathfrak{n}$ irgend eine ganze positive Zahl verstehend,

1) Siehe die Anmerkung auf Seite 415.

2) Siehe die Anmerkung auf Seite 419.



(12.) $$g_n = g^n, \qquad g_0 = e_0,$$

so läßt sich jede Größe a des betrachteten Gebietes in der Form

(13.) $$a = \sum_a \alpha_a g_a \qquad (a=0,1,..n-1)$$

darstellen. Dann ist

(14.) $$(\sum_a \alpha_a g_a)(\sum_a \beta_a g_a) = \sum_{b,c}(\alpha_b \beta_c) g_{b+c}, \qquad (b,c=0,1,..n-1)$$

und mittels der aus (11. a) sich ergebenden Gleichungen

(15.) $$g_{n+n} + \varepsilon_1 g_{n+n-1} + \varepsilon_2 g_{n+n-2} + \cdots + \varepsilon_n g_n = 0, \qquad (n=0,1,\ldots\infty)$$

kann dann das Product auf die Form

$$\sum_a \gamma_a g_a \qquad (a=0,1,..n-1)$$

gebracht werden.

Führt man nun die Größen $g_0, g_1, \ldots g_{n-1}$ statt der Größen $e_1, e_2, \ldots e_n$ als Haupteinheiten ein, so erhält man ein vereinfachtes Multiplicationsverfahren, bei welchem jede der Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ eine ganze Function der Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ ist, oder auch einen der Werthe 0, 1 hat. Dasselbe läßt sich nun auch folgendermaßen formuliren.

Man verstehe unter ξ eine unbestimmte Größe mit einer unbenannten Haupteinheit und setze

$$f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \varepsilon_2 \xi^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n.$$

Ferner werde, wenn

$$a = \sum_a \alpha_a g_a \qquad (a=0,1,..n-1)$$

ist, die Function

$$\sum_a \alpha_a \xi^a$$

als die zu a gehörige Function von ξ bezeichnet, sowie umgekehrt a die zu dieser Function gehörige Größe genannt. Dann läßt sich das Multiplicationsverfahren kurz so ausdrücken:

Es seien $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ die zu zwei gegebenen Größen a, b gehörigen Functionen, $\chi(\xi)$ der Rest, welcher bei der Division des Productes $\varphi(\xi)\cdot\psi(\xi)$ durch $f(\xi)$ bleibt, so daß man

$$\varphi(\xi)\cdot\psi(\xi) = \vartheta(\xi)\cdot f(\xi) + \chi(\xi)$$

hat, wo $\vartheta(\xi)$, $\chi(\xi)$ ganze Functionen der Größe ξ von nicht höherem als beziehlich dem $(n-2)^{\text{ten}}$ und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade sind — und c die zu $\chi(\xi)$ gehörige Größe, so ist

$$ab = c.$$

Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß die in den Gleichungen

$$ab = ba, \qquad (ab)c = (ac)b, \qquad a(b+c) = ab+ac$$

ausgesprochenen Gesetze der Multiplication bestehen, wenn man nach willkürlicher Annahme der Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ das angegebene Multiplicationsverfahren anwendet. Dasselbe läßt sich übrigens unverändert auch auf ein Product von mehr als zwei Factoren anwenden.

Die Function $f(\xi)$ werde in Factoren ersten oder zweiten Grades mit reellen Coefficienten zerlegt; diese seien $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots f_n(\xi)$, und in jedem derselben sei der Coefficient der höchsten Potenz von ξ gleich Eins.

Angenommen nun, es seien unter diesen Factoren gleiche vorhanden und es komme z. B. der Factor $f_1(\xi)$ λ-mal vor, so setze man

$$f(\xi) = f_1^\lambda(\xi)\cdot F(\xi)$$
$$\varphi(\xi) = f_1(\xi)\cdot F(\xi)\cdot \varphi_1(\xi)$$

unter $\varphi_1(\xi)$ eine ganze Function mit willkürlich anzunehmenden reellen Coefficienten verstehend, deren Grad kleiner ist als der von $f_1^{\lambda-1}(\xi)$ — wo dann, wenn $\lambda = 2$ und $f_1(\xi)$ vom ersten Grade ist, $\varphi_1(\xi)$ auf eine Constante sich reducirt — so ist

$$\varphi^\lambda(\xi) \text{ durch } f(\xi)$$

theilbar. Es ergiebt sich aber aus dem angegebenen Multiplications-Verfahren, daß ein Product beliebig vieler Factoren den Werth Null hat, wenn das Product der zugehörigen Functionen durch $f(\xi)$ theilbar ist. Folglich hat man, wenn x die zu $\varphi(\xi)$ gehörige complexe Größe ist,

$$x_1^\lambda = 0.$$

Diese Gleichung besteht also für unendlich viele Werthe von x.

Wenn also für die Arithmetik der aus n Haupteinheiten gebildeten Größen gelten soll, daß ausschließlich algebraische Gleichungen von der oben angegebenen Beschaffenheit möglicherweise unendlich viele Wurzeln haben, so müssen von den Werthsystemen der Größen $\varepsilon_{a,b,c}$, welche den aus den Gleichungen (7.) sich ergebenden Bedingungsgleichungen genügen, außer den bereits angegebenen noch alle diejenigen ausgeschlossen werden, bei denen für irgend eine Größe g die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ solche Werthe erhalten, daß die Discriminante der Gleichung

$$\xi^n + \varepsilon_1\xi^{n-1} + \varepsilon_2\xi^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n = 0$$

verschwindet.

Es läßt sich aber nachweisen, daß die in Rede stehende Forderung

stets befriedigt wird, wenn für ein bestimmtes Werthsystem der Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

Aus den Gleichungen (9.) erhält man für jede Größe

$$x = \sum_a \xi_a e_a \qquad (a=1,2,\dots n)$$

eine Gleichung

$$X_0 x^{n+1} + X_1 x^n + \dots + X_n x = 0,$$

wo

$$X_0 = |\,\xi_\mu^{(\nu)}\,| \qquad (\mu,\nu = 1,2,\dots n)$$

und die Coefficienten $X_1, \dots X_n$ ebenso wie X_0 homogene ganze Functionen von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ sind. Dann sind von den fraglichen Werthsystemen der Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ nur diejenigen auszuschließen, für welche entweder die oben mit ε bezeichnete Determinante, oder X_0, oder endlich die Discriminante der Gleichung

$$X_0 \xi^n + X_1 \xi^{n-1} + \dots + X_n = 0$$

identisch verschwindet.

Denn man wähle aus den übrigen Systemen irgend eins aus und gebe den Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ bestimmte Werthe, daß weder ε, noch X_0, noch die genannte Discriminante gleich Null wird, setze

$$(15.) \qquad g = \sum_a \xi_a e_a, \qquad g_0 = \frac{g}{g}, \qquad g_n = g^n, \qquad \varepsilon_a = \frac{X_a}{X_0},$$

und definire die Multiplication auf die vorhin angegebene Weise mit Hülfe der Function

$$f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \dots + \varepsilon_n.$$

Den Functionen, welche zu den mit einander zu multiplicirenden Größen gehören, gebe man aber eine andere Form. Unter den vorhin mit $f_1(\xi), f_2(\xi), \dots f_r(\xi)$ bezeichneten Factoren giebt es jetzt weder gleiche, noch solche, die einen gemeinschaftlichen Theiler haben; man kann also dem Quotienten $\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)}$, wenn $\varphi(\xi)$ eine beliebige ganze Function von nicht höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade mit reellen Coefficienten ist, die Gestalt

$$(16.) \qquad \frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\varphi_1(\xi)}{f_1(\xi)} + \frac{\varphi_2(\xi)}{f_2(\xi)} + \dots + \frac{\varphi_r(\xi)}{f_r(\xi)}$$

geben, in der Art, daß $\varphi_\mu(\xi)$ eine reelle Constante oder eine ganze lineare Function von ξ mit reellen Coefficienten ist, jenachdem $f_\mu(\xi)$ vom ersten oder zweiten Grade ist. In dieser Form wollen wir uns fortan $\varphi(\xi)$ dargestellt denken. Die Gesammtheit der Größen, für welche die zugehörige Function von ξ die Form

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\varphi_\mu(\xi)$$

hat, und die mit $\mathfrak{G}_\mu$ bezeichnet werde, bildet nun eine Mannigfaltigkeit von einer oder von zwei Dimensionen, jenachdem $f_\mu(\xi)$ vom ersten oder zweiten Grade ist, indem alle in ihr enthaltenen Größen im ersten Falle aus der zu $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$ gehörigen Größe, im anderen aber aus den zu $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$, $\frac{\xi f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$ gehörigen zwei Größen abgeleitet werden können. Demnach lehrt die Gleichung (16.), daß jede dem betrachteten Gebiete angehörige Größe a dargestellt werden kann als Summe von r anderen $(a_1, \dots a_r)$, die beziehlich den Theilgebieten $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ angehören und die Componenten von a genannt werden mögen. Dabei ist noch zu bemerken: Nach (16.) ist $\varphi(\xi)$ nur dann identisch gleich Null, wenn sämmtliche $\varphi_\mu(\xi)$ es sind. Eine Größe a hat also nur dann den Werth Null, wenn ihre Componenten $(a_1, \dots a_r)$ sämmtlich verschwinden; woraus noch folgt, daß a nur auf eine einzige Art als Summe von r den Gebieten $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ angehörigen Größen dargestellt werden kann.

Dies vorausgeschickt, seien nun a_μ, b_ν zwei Größen, die den Theilgebieten $\mathfrak{G}_\mu$ und $\mathfrak{G}_\nu$ angehören, und

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\varphi_\mu(\xi), \qquad \psi(\xi) = \frac{f(\xi)}{f_\nu(\xi)}\psi_\nu(\xi)$$

die zu ihnen gehörigen Functionen. Dann ist, wenn $\mu \gtrless \nu$, $\varphi(\xi)\cdot\psi(\xi)$ durch $f(\xi)$ theilbar, also

$$a_\mu \cdot b_\nu = 0. \tag{17.}$$

Wenn aber $\nu = \mu$, so ist aus der Gleichung

$$\varphi(\xi)\cdot\psi(\xi) = \vartheta(\xi)\cdot f(\xi) + \chi(\xi)$$

ersichtlich, daß $\chi(\xi)$ den Theiler $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$, also die Form $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\chi_\mu(\xi)$ hat, wo $\chi_\mu(\xi)$ eine Constante oder eine ganze lineare Function von ξ ist, jenachdem $f_\mu(\xi)$ vom ersten oder zweiten Grade ist. Es ist also $a_\mu \cdot b_\mu$ eine Größe, die demselben Theilgebiete angehört, wie a_μ, b_μ.

Es ist ferner ersichtlich, daß das Product

$$\varphi(\xi)\cdot\psi(\xi) = \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\cdot\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\cdot\varphi_\mu(\xi)\cdot\psi_\mu(\xi)$$

nur dann durch $f(\xi)$ theilbar sein kann, wenn eine der Functionen $\varphi_\mu(\xi)$, $\psi_\mu(\xi)$ identisch gleich Null ist. Denn da $f_\mu(\xi)$ und $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$



keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß, wenn

$$\frac{1}{f_\mu(\xi)}\cdot\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\cdot\varphi_\mu(\xi)\cdot\psi_\mu(\xi)$$

eine ganze Function sein soll, $\varphi_\mu(\xi)\cdot\psi_\mu(\xi)$ durch $f_\mu(\xi)$ theilbar sein, wozu erforderlich ist, daß $\varphi_\mu(\xi)\cdot\psi_\mu(\xi)$ identisch gleich Null sei, was in dem Falle, wo $f_\mu(\xi)$ vom ersten Grade ist, unmittelbar erhellt, in dem andern Falle aber daraus folgt, daß $f_\mu(\xi)$ nicht ein Product zweier linearen Functionen von ξ mit reellen Coefficienten ist.

Hiernach wird das Product zweier demselben Theilgebiete angehörenden Größen nur in dem Falle gleich Null, wo einer seiner Factoren verschwindet.

Nun seien $g', g'', \dots g^{(r)}$ die Componenten der Größe g_0, so folgt, wenn a_μ irgend eine dem Gebiet $\mathfrak{G}_\mu$ angehörige Größe ist, aus den Gleichungen

$$(18.)\qquad g_0 = g'+g''+\cdots+g^{(r)},\quad g_0 a_\mu = g^{(\mu)}a_\mu,\quad g_0 a_\mu - a_\mu = 0,$$

daß

$$(19.)\qquad g^{(\mu)}a_\mu = a_\mu$$

ist.

Wenn nun $f_\mu(\xi)$ vom ersten Grade ist, so kann jede dem Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ angehörige Größe in der Form $\alpha g^{(\mu)}$ dargestellt werden, und es ist

$$(20.)\qquad (\alpha g^{(\mu)})(\beta g^{(\mu)}) = (\alpha\beta)g^{(\mu)}.$$

Wenn dagegen $f_\mu(\xi)$ vom zweiten Grade ist, so sei $h^{(\mu)}$ irgend eine nicht aus $g^{(\mu)}$ ableitbare Größe des Gebietes $\mathfrak{G}_\mu$, so kann jede andere Größe des Gebietes aus $g^{(\mu)}$ und $h^{(\mu)}$ abgeleitet werden; es ist also auch

$$h^{(\mu)}h^{(\mu)} = \gamma h^{(\mu)}+\gamma' g^{(\mu)},$$

oder

$$(21.)\qquad (h^{(\mu)}-\tfrac{1}{2}\gamma g^{(\mu)})^2-(\gamma'+\tfrac{1}{4}\gamma^2)g^{(\mu)}g^{(\mu)} = 0.$$

Die Größe $\gamma'+\frac{1}{4}\gamma^2$ ist nothwendig negativ. Denn wäre sie positiv oder gleich Null, so würde das Product der beiden dem Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ angehörigen Größen

$$h^{(\mu)}-(\tfrac{1}{2}\gamma+\sqrt{\gamma'+\tfrac{1}{4}\gamma^2})g^{(\mu)},\qquad h^{(\mu)}-(\tfrac{1}{2}\gamma-\sqrt{\gamma'+\tfrac{1}{4}\gamma^2})g^{(\mu)}$$

gleich Null, ohne daß einer seiner Factoren verschwände.

Setzt man also

$$(22.)\qquad k^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{-(\gamma'+\frac{1}{4}\gamma^2)}}h^{(\mu)}-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{-(\gamma'+\frac{1}{4}\gamma^2)}}g^{(\mu)},$$

so ist $k^{(\mu)}$ eine Größe des Gebietes $\mathfrak{G}_\mu$, für welche die Gleichung

$$(23.)\qquad k^{(\mu)}k^{(\mu)} = -g^{(\mu)}$$

besteht. Man kann dann jede Größe des Gebietes in der Form

$$\alpha g^{(\mu)} + \alpha' k^{(\mu)}$$

darstellen, und es ist

$$(24.)\qquad (\alpha g^{(\mu)} + \alpha' k^{(\mu)})(\beta g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)}) = (\alpha\beta - \alpha'\beta')g^{(\mu)} + (\alpha'\beta + \alpha\beta')k^{(\mu)}.$$

Es lassen sich also statt der ursprünglichen Haupteinheiten $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ n andere, aus denen alle Größen des betrachteten Gebietes ebenfalls abgeleitet werden können, dergestalt einführen, daß erstens in jedem der Theilgebiete $\mathfrak{G}_\mu$ alle Größen, jenachdem der Grad der zugehörigen Function $f_\mu(\xi)$ 1 oder 2 ist, aus einer dieser neuen Einheiten oder aus zweien sich ableiten lassen, und daß zweitens die Multiplication zweier diesem Theilgebiete angehörigen Größen im ersten Fall so wie bei den aus 1 abgeleiteten (sogenannten reellen) Größen (Gl. 20.), im andern Falle aber nach der für die Multiplication der gewöhnlichen complexen, aus zwei Haupteinheiten (1 und $i = \sqrt{-1}$) abgeleiteten Größen geltenden Regel (Gl. 24.) ausgeführt werden kann.[1])

Sind dann a, b zwei beliebige Größen des Gebietes, und $a_1, a_2, \ldots a_r$ die Componenten von a, $b_1, b_2, \ldots b_r$ die Componenten von b, so ist

$$(25.)\qquad ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r;$$

d. h. man findet für jedes der Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ die ihm angehörige Componente des Products ab, wenn man die entsprechenden Componenten der Factoren mit einander multiplicirt, was nach einer der Formeln (20., 24.) auszuführen ist.

Soll das Product ab gleich Null sein, so müssen die sämmtlichen Producte $a_\mu b_\mu$ es sein, also in jedem derselben einer der Factoren verschwinden. Ist also keine der Componenten von b gleich Null, so kann ab nur verschwinden, wenn a gleich Null ist. Sind dagegen einige Componenten von b gleich Null, so ist, damit ab verschwinde, nothwendig und hinreichend, daß die den übrigen Componenten von b entsprechenden Componenten von a sämmtlich gleich Null sind. Theiler der Null sind also sämmtliche Größen b, deren Componenten nicht sämmtlich von Null verschiedene Werthe haben.

Ist b nicht ein Theiler der Null, so ergiebt sich aus (25.)

$$(26.)\qquad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_r}{b_r};$$

1) Zu demselben Resultate ist, wie Ihnen bekannt, auf einem anderen Wege auch Herr Hazzidakis gekommen.



und aus (20., 24.)

$$(27.)\qquad \frac{\alpha g^{(\mu)}}{\beta g^{(\mu)}} = \frac{\alpha}{\beta} g^{(\mu)},$$

wenn $\mathfrak{G}_\mu$ eine einfache Mannigfaltigkeit,

$$(28.)\qquad \frac{\alpha g^{(\mu)} + \alpha' k^{(\mu)}}{\beta g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)}} = \frac{\alpha\beta + \alpha'\beta'}{\beta\beta + \beta'\beta'} g^{(\mu)} + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta\beta + \beta'\beta'} k^{(\mu)},$$

wenn $\mathfrak{G}_\mu$ eine Mannigfaltigkeit von 2 Dimensionen ist.

Nimmt man zu den vorstehenden Formeln für die Multiplication und Division noch folgende hinzu

$$(29.)\qquad \begin{cases} a+b = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_r+b_r), \\ a-b = (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_r-b_r), \end{cases}$$

so erkennt man die Richtigkeit des nachstehenden Satzes:

Sind beliebig viele Größen a, b, c, d, ... des betrachteten Gebietes gegeben und es soll aus denselben durch eine bestimmte Rechnung, bei der nur die elementaren Rechnungsoperationen (Addition, Subtraction, Multiplication und Division) in Anwendung kommen, eine andere Größe abgeleitet werden; so erhält man die Componente der letzteren für jedes Theilgebiet $\mathfrak{G}_\mu$, wenn man die vorgeschriebene Rechnung mit den diesem Gebiete angehörenden Componenten der Größen a, b, c, d, ... ausführt.

Angenommen nun, es seien a, b, ... l gegebene Größen, und es sei eine unbekannte Größe x so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$a + bx + \cdots + lx^\lambda = 0.$$

bestehe.

Die Coefficienten einer solchen Gleichung können auch (a ausgenommen) unbenannte, aus einer Haupteinheit gebildete Größen sein. Dann kann man aber, wenn z. B. in der Gleichung das Glied αx^m vorkommt, dafür $(\alpha g_0)x^m$ setzen; man braucht also nur den Fall zu betrachten, wo alle Coefficienten complexe Größen des betrachteten Gebietes sind.

Es seien x_μ, a_μ, b_μ, ... l_μ die dem Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ angehörigen Componenten von x, a, b, ... l, so hat der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung nach dem Vorstehenden im Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ die Componente

$$a_\mu + b_\mu x_\mu + \cdots + l_\mu x_\mu^\lambda;$$

es zerfällt also die vorgelegte Gleichung in die folgenden r Gleichungen

$$a_\mu + b_\mu x_\mu + \cdots + l_\mu x_\mu^\lambda = 0 \qquad (\mu = 1, 2, .. r).$$

Eine Gleichung von dieser Form, in der die Coefficienten und ebenso die zu bestimmende Größe Größen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten sind, kann aber — wenn für sie die Definition der Multiplication wie im Vorhergehenden (Gl. 20., 24.) gegeben wird — nur dann unendlich viele Wurzeln haben, wenn alle ihre Coefficienten gleich Null sind.

Die vorgelegte Gleichung kann also nur in dem Falle durch unendlich viele Werthe von x befriedigt werden, wenn wenigstens für einen Werth von μ

$$a_\mu, \; b_\mu, \; \ldots \; l_\mu$$

sämmtlich gleich Null sind.

Nehmen wir an, es finde dies statt für $(n-\varrho)$ Werthe von μ und diese seien $\varrho+1, \ldots n$, so daß man

$$a = \sum_\mu a_\mu, \quad b = \sum_\mu b_\mu, \quad \ldots \quad l = \sum_\mu l_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, .. \varrho)$$

hat. Nimmt man dann eine Größe

$$k = \sum_\mu k_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, .. \varrho)$$

wo k_μ eine von Null verschiedene Größe des Gebietes $\mathfrak{G}_\mu$ bedeutet, willkürlich an, so kann man die Größen $a', b', \ldots l'$ so bestimmen, daß

$$a = ka', \quad b = kb', \quad \ldots \quad l = kl'$$

wird. Denn es sei a'_μ die Componente von a' in $\mathfrak{G}_\mu$, so ist

$$ka' = \sum_\mu k_\mu a'_\mu,$$

es muß also $a'_\mu = \frac{a_\mu}{k_\mu}$ sein für $\mu = 1, 2, .. \varrho$, während a'_μ für $\mu = \varrho+1, \ldots n$ willkürlich angenommen werden kann. Ebenso werden $b', \ldots l'$ bestimmt. (Nimmt man für sämmtliche a'_μ, $b'_\mu, \ldots l'_\mu$, wenn $\mu > \varrho$ ist, von Null verschiedene Größen an, so sind die Größen $a', b', \ldots l'$ nicht mehr so beschaffen, wie die $a, b, \ldots l$, nämlich es findet nicht mehr statt, daß für einen bestimmten Werth von μ die Componenten $a'_\mu, b'_\mu, \ldots l'_\mu$ sämmtlich verschwinden.)

Hiermit ist nun bewiesen:

Wenn die arithmetischen Grundoperationen so definirt werden, wie im Vorhergehenden geschehen, so findet in der That statt, was oben als Forderung hingestellt worden ist: eine algebraische Gleichung

$$a+bx+\cdots+lx^{\lambda}=0$$

kann nur in dem Falle durch unendlich viele Werthe von x befriedigt werden, wenn alle ihre Coefficienten aus einem und demselben Theiler der Null durch Multiplication mit anderen Größen hervorgehen.

Sie sehen, lieber College, aus der vorstehenden Darlegung, daß bei meiner Untersuchung über die Möglichkeit einer Arithmetik der complexen Größen mit beliebig vielen Haupteinheiten zwei Gesichtspunkte als maßgebend im Auge gehalten worden sind: es sollen nicht nur für das Addiren, Multipliciren u. s. w. complexer Größen die in den obigen Gleichungen (1., 2.) ausgesprochenen formalen Gesetze gelten, sondern es sollen zugleich zwischen der Arithmetik der allgemeinen complexen Größen und der Arithmetik der aus einer Haupteinheit gebildeten Größen nur solche Unterschiede bestehen, die in der Natur der Sache begründet sind, d. h. welche sich herausstellen, wie man auch unter Aufrechthaltung der ersten Forderung die arithmetischen Operationen definiren möge. In der gewöhnlichen Arithmetik gilt nun, daß eine Größe, welche algebraisch von andern gegebenen abhängt, im Allgemeinen, d. h. wenn specielle, bestimmt charakterisirbare Werthsysteme der gegebenen Größen ausgeschlossen werden, stets nur eine endliche Anzahl von Werthen haben kann. Dies ist von solch wesentlicher Bedeutung, daß eine Arithmetik complexer Größen, für die nicht dasselbe gälte, eine von der gewöhnlichen ganz verschiedene sein und nicht als eine naturgemäße Verallgemeinerung der letzteren betrachtet werden könnte.

Wie man nun aber auch die Multiplication — auf die es allein ankommt — der ersten Forderung entsprechend definiren mag, es zeigt sich, daß es stets algebraische Gleichungen giebt, welche unendlich viele Wurzeln haben. Als Gleichungen dieser Art geben sich zunächst diejenigen zu erkennen, deren Coefficienten aus einem und demselben Theiler der Null durch Multiplication desselben mit anderen Größen hervorgehen. Da es immer Theiler der Null giebt (wenn man nämlich in dem Falle, wo $n=1$ oder 2 ist, die Null selbst als solchen auffaßt), so ist die Existenz solcher Gleichungen in der Natur der Sache begründet. Zugleich hat sich aber gezeigt, daß es andere Gleichungen mit unendlich vielen Wurzeln nur giebt, wenn unter den das Multiplicationsverfahren bestimmenden Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ gewisse, nicht durch die Multiplicationsgesetze bedingte Relationen stattfinden. Solche Werthsysteme der Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ mußten also ausgeschlossen werden, wenn die Arithmetik der allgemeinen complexen Größen soweit, als überhaupt möglich, mit der gewöhnlichen in Uebereinstimmung gebracht werden sollte. Daß aber dies auch genüge,

um den gestellten Forderungen gerecht zu werden, ist im Vorhergehenden streng bewiesen.

Aus dem Obigen geht noch hervor, daß die Gleichung

$$a+bx+\cdots+lx^{\lambda} = 0$$

durch keinen Werth von x befriedigt werden kann, wenn für irgend einen Werth von μ die Größen $b_{\mu}, \ldots l_{\mu}$ sämmtlich verschwinden, a_{μ} aber nicht. Will man nun die weitere Forderung stellen, daß in jedem andern Falle die Gleichung wirklich Wurzeln haben solle, die dem betrachteten Größengebiete angehören, — mit anderen Worten, will man die Vorstellung imaginärer Wurzeln beseitigen — so ist dazu nothwendig und hinreichend, daß jedes der Theilgebiete $\mathfrak{G}_{\mu}$ eine zweifache Mannigfaltigkeit sei — d. h. man hat bei der Festsetzung des Multiplications-Verfahrens die Größen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ so anzunehmen, daß die Gleichung

$$\xi^{n}+\varepsilon_{1}\xi^{n-1}+\cdots+\varepsilon_{n} = 0$$

keine reelle Wurzel hat, so daß also n gerade sein muß. Dann hat die Gleichung

$$a+bx+\cdots+lx^{\lambda} = 0$$

$\lambda^{\frac{1}{2}n}$ Wurzeln, wofern l nicht ein Theiler der Null ist — die Modificationen, die eintreten, wenn l ein solcher Theiler ist, sind leicht festzustellen — ein Satz, der dem für $n=2$ geltenden nicht widerspricht, sondern als eine Verallgemeinerung desselben zu betrachten ist.

Wenn ich nun mit dem Ergebniß der vorstehenden Untersuchung die im Anfang angeführte Gaußische Bemerkung, daß complexe Größen mit mehr als zwei Haupteinheiten in der allgemeinen Arithmetik unzulässig seien, zusammenhalte, so scheint es mir, daß Gauß diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, daß das Product zweier Größen, sobald $n>2$, verschwinden kann, ohne daß einer seiner Factoren den Werth Null hat. Denn hätte er diesen Umstand nicht als ein unübersteigliches Hinderniß für die Einführung der allgemeinen complexen Größen in die Arithmetik betrachtet, so würde es ihm schwerlich entgangen sein, daß sich eine Arithmetik dieser Größen begründen läßt, in welcher alle Sätze entweder mit denen der Arithmetik der gewöhnlichen complexen Größen identisch sind oder doch in der letzteren ihr Analogon finden. Er würde dann auch ohne Zweifel seinen Ausspruch dahin modificirt haben, daß die Einführung der allgemeinen complexen Größen in die Arithmetik zwar nicht unstatthaft, wohl aber überflüssig sei. In der That geht aus dem oben (Seite 407) ausgesprochenen Satze hervor, daß

die Arithmetik der allgemeinen complexen Größen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Größen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre.

Gestatten Sie mir nunmehr auf die in Ihrem Briefe enthaltenen, auf den besprochenen Gegenstand sich beziehenden Bemerkungen einzugehen.

Wenn in dem betrachteten Gebiete nach Fixirung der Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ eine Reihe von Größen g_0, g_1, g_2 u. s. w. existiren soll, für welche die obigen Formeln (14., 15.) gelten, und durch die sich jede andere Größe des Gebietes in der Form

$$\alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_{n-1} g_{n-1}$$

ausdrücken läßt, so darf (außer ε) die im Vorstehenden mit X_0 bezeichnete Function der unbestimmten Größen $\xi_1, \ldots \xi_n$ nicht identisch verschwinden. Daß dies an sich nicht unmöglich sei, geht aus dem mir von Ihnen mitgetheilten Beispiele des Herrn Kyparissos Stephanos evident hervor — mir war es aber durch Erwägungen bekannt, die geeignet sind, auf die Frage betreffend die Einführung allgemeiner complexer Größen und die möglichen Verallgemeinerungen der gebräuchlichen arithmetischen Algorithmen noch von einer anderen Seite her Licht zu werfen und über die ich noch einiges sagen möchte. Vorher will ich nur noch erwähnen, daß ich mich in früheren Vorträgen auf die Möglichkeit des identischen Verschwindens der Function X_0 gar nicht eingelassen, sondern nur bewiesen habe, daß dieselbe im Allgemeinen nicht identisch gleich Null sei. Wahrscheinlicherweise habe ich mich dabei nicht deutlich genug ausgedrückt. Im vergangenen Semester[1]), wo ich über den Gegenstand abermals im Seminar vorgetragen, habe ich aber ausdrücklich gesagt, ich werde mich zunächst auf den Fall beschränken, in welchem die Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ solche Werthe haben, daß weder ε, noch X_0, noch die Discriminante der Gleichung

$$X_0 \xi^n + X_1 \xi^{n-1} + \cdots + X_n = 0$$

identisch verschwinde. Unter dieser Annahme wurde der soeben angeführte Satz (Seite 407) bewiesen, was mir diesmal die Hauptsache war. Am Schlusse sollten dann die Erörterungen folgen, die mir jene in Betreff der Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ gemachte Annahme als nothwendig erscheinen lassen. Leider reichte zu dem Letzteren die Zeit nicht aus, ich werde in diesem Semester darauf zurückkommen.

---

1) Winter-Semester 1882—83.

Für Größen, die aus einer Haupteinheit gebildet sind, lassen sich die Multiplicationsgesetze auch aus den folgenden Grundgleichungen ableiten:

$$\text{(A.)}\qquad \begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac, \\ (a+b)c &= ac+bc, \\ a(bc) &= (ab)c. \end{aligned}$$

Die beiden ersten begründen das sogenannte distributive, die dritte das associative Gesetz. Das commutative Gesetz $ab = ba$ ist dann eine Folge der genannten. Bei complexen Größen gilt dies nicht mehr allgemein; man kommt vielmehr bei Zugrundelegung der Gleichungen (A.) zu Algorithmen, bei denen ab nicht gleich ba ist. Unter diesen Algorithmen ist z. B. Hamilton's Quaternionencalcul enthalten, in welchem das commutative Gesetz nicht gilt.

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich ebenso wie oben:

$$\text{(B.)}\qquad (\textstyle\sum_{\mathfrak{a}} \alpha_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}})(\sum_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\, \alpha_{\mathfrak{b}}\, \beta_{\mathfrak{c}}\, e_{\mathfrak{a}}, \qquad \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots n)$$

wenn

$$\text{(C.)}\qquad e_{\mathfrak{b}}\, e_{\mathfrak{c}} = \textstyle\sum_{\mathfrak{a}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\, e_{\mathfrak{a}}$$

gesetzt wird. Unter den Größen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ müssen dann die aus den Gleichungen

$$\text{(D.)}\qquad e_{\mathfrak{b}}(e_{\mathfrak{c}} e_{\mathfrak{b}}) = (e_{\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{c}}) e_{\mathfrak{b}}$$

sich ergebenden Relationen stattfinden, während man aber $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ und $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$ nicht als gleich annehmen darf.

Nimmt man an, was nothwendig ist, daß, wenn der Werth eines Products und einer seiner Factoren gegeben ist, dadurch im Allgemeinen auch der andere Factor eindeutig bestimmt sei, so läßt sich mittels der dritten der Gleichungen (A.) die Existenz einer Größe g_0 beweisen, für welche

$$g_0 b = b g_0 = b$$

ist, bei beliebiger Annahme der Größe b. Ferner folgt aus derselben Gleichung, daß

$$a^m a^n = a^{m+n} = a^n a^m$$

ist. Setzt man nun wie oben

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n, \\ x^\nu &= \xi_1^{(\nu)} e_1 + \xi_2^{(\nu)} e_2 + \cdots + \xi_n^{(\nu)} e_n, \end{aligned}$$

so ergiebt sich wieder eine Gleichung

$$X_0 x^{n+1} + X_1 x^n + \cdots + X_n x = 0,$$



in der die Coefficienten X_0, X_1, . . . X_n homogene ganze Functionen der Größen ξ sind. Ist nun X_0 nicht identisch gleich Null, so kann man ganz dieselben Schlüsse machen wie oben; es muß sich eine Reihe von Größen g_0, g_1, g_2 u. s. w. so bestimmen lassen, daß man

$$\text{(E.)} \qquad g_m g_n = g_{m+n}$$

hat, und daß sich jede Größe a des Gebietes in der Form

$$a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_{n-1} g_{n-1}$$

darstellen lasse. Dann hat man

$$(\Sigma_{\mathfrak{a}} \alpha_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}})(\Sigma_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}}) = \Sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} (\alpha_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{b}}) g_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}, \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 0, 1, \ldots n-1).$$

Hiernach gilt für das Product zweier beliebigen Größen a, b das Gesetz

$$ab = ba,$$

sobald die Function X_0 nicht identisch verschwindet.

Da nun z. B. für die Quaternionen dieses Gesetz nicht gilt, so muß man schließen, daß die Function X_0 auch identisch verschwinden kann. Man ist also auch nicht berechtigt, in dem Falle, wo man von den Gleichungen (2.) ausgeht, von der Function X_0, auf die man alsdann kommt, anzunehmen, daß sie nicht identisch verschwinden könne, was ja, wie das Beispiel des Herrn Stephanos lehrt, in der That der Fall sein kann.

Das von Herrn Stephanos gefundene Multiplicationsverfahren ist enthalten in der Formel

$$(\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1})(\beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_{n-1} e_{n-1})$$
$$= \alpha_0 \beta_0 e_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) e_1 + \cdots + (\alpha_0 \beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_0) e_{n-1}.$$

Für eine beliebige Größe

$$x = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$$

gilt dann die Gleichung

$$x^2 - 2\alpha_0 x + \alpha_0^2 e_0 = 0,$$

die bei gegebenem Werthe von α_0 also durch unendlich viele Werthe von x befriedigt wird. Nach den im Vorstehenden entwickelten Grundsätzen würde also ein solches Multiplicationsverfahren zu den unzulässigen gehören.

Ich bemerke noch, daß bei Adoptirung desselben auch für ein gerades n die Lösung der Gleichung

$$x^2 = a = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$$

nicht immer möglich sein würde, nämlich dann nicht, wenn α_0 negativ ist.

Indem ich diesen langen Brief überlese, finde ich, daß sich an ihm sehr bemerkbar macht, daß er in Folge mancherlei Störungen mit vielen Unterbrechungen geschrieben worden ist. Wollen Sie es also mit Nachsicht aufnehmen, wenn Sie darin manche Wiederholungen, manche zu umständliche Darstellung finden. Es lag mir daran, Ihnen einmal eine authentische Darstellung meiner Theorie der complexen Größen zu geben; die Aufzeichnungen auch der besten Zuhörer enthalten doch manches unrichtig Aufgefaßte — mit oder ohne Schuld des Docenten — namentlich, wo es sich nicht bloß um Wiedergabe von Rechnungen handelt.

Wollen Sie von dem Mitgetheilten für Ihre Vorträge Gebrauch machen, so habe ich selbstverständlich nichts dagegen. Auch wenn Sie Einwendungen zu machen haben, so enthalten Sie mir dieselben nicht vor.

. . . .

(Geschlossen den 27. Juni 1883.)

Anmerkungen.

Die im Vorstehenden zum Abdruck gebrachte Mittheilung ist eine in allem Wesentlichen getreue Wiedergabe eines Theiles des Inhaltes eines von Herrn Weierstrass im Juni 1883 an den Unterzeichneten gerichteten Briefes. Bei der Veröffentlichung dieser Mittheilung erschien es wünschenswerth, daß zu einigen im Texte ohne eingehenden Beweis ausgesprochenen Behauptungen eine Angabe darüber hinzugefügt werde, wie dieselben bewiesen werden können.

Die nachfolgenden Anmerkungen sind nach Erläuterungen, welche Herr Weierstrass mündlich mir zu geben die Güte gehabt hat, verfaßt.

Göttingen im October 1884. H. A. Schwarz.

Zu Seite 399. »Daraus ergiebt sich die Existenz einer Größe e_0 von der Eigenschaft, daß $e_0 a = a e_0 = a$ ist für jeden Werth von a.«

Ist nämlich a eine Größe, für welche ε nicht gleich Null ist, so ist $\frac{a}{a}$ eine Größe, mit der multiplicirt jede andere Größe unverändert bleibt. Diese Größe $\frac{a}{a} = e_0$ hat aber für jeden Werth von a ein-

unddenselben Werth; es ist nämlich, wenn a' eine andere Größe bezeichnet, für welche ε ebenfalls nicht verschwindet,

$$\frac{a}{a} = \frac{a'}{a'},$$

indem diese beiden Größen mit a multiplicirt einander gleich werden.

Zu Seite 400. »Dann existiren, wenn man von particulären Werthsystemen der Größen ξ'_ν absieht, unendlich viele Werthsysteme $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, für welche die Gleichungen

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{X'_1}{X'_0}, \quad \ldots \quad \frac{X_m}{X_0} = \frac{X'_m}{X'_0}$$

bestehen.«

Die Richtigkeit dieser Behauptung kann folgendermaßen dargethan werden.

Die rationalen Functionen $\frac{X_\mu}{X_0}$ der n von einander unabhängigen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ mögen mit

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \qquad (\mu=1,2,\ldots m)$$

bezeichnet werden. Die Coefficienten dieser rationalen Functionen haben ausschließlich reelle Werthe und die Anzahl n der unabhängigen Variabeln, von welchen dieselben abhängen, ist größer als die Anzahl m der betrachteten Functionen.

Nun besteht ganz allgemein der Satz:

Wenn m rationale Functionen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_m$ mit ausschließlich reellen Coefficienten von mehr als m veränderlichen Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ gegeben sind, so kann man den letzteren stets unendlich viele Systeme solcher reeller Werthe beilegen, daß für alle diese Werthsysteme jede der gegebenen Functionen denselben Werth erhält.

Um diesen Satz zu beweisen denke man sich für die Umgebung einer nicht singulären Stelle $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n)$ im Gebiete der reellen Werthe der unabhängigen Variablen die Differenzen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) - \mathfrak{f}_\mu(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n) \qquad (\mu=1,2,\ldots m)$$

in Reihen entwickelt, welche nach Potenzen der Größen $\xi_\nu - \xi'_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots n)$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten.

Es ergeben sich also m Gleichungen von der Form

$$(1.) \qquad \mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) - \mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{P}_\mu(\xi_1 - \xi'_1, \xi_2 - \xi'_2, \ldots \xi_n - \xi'_n),$$

in welchen $\mathfrak{g}_\mu$ den Werth $\mathfrak{f}_\mu(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n)$ bezeichnet.

Die Größen $\mathfrak{g}_\mu$ und die Coefficienten der einzelnen Glieder der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\mu$ haben reelle Werthe.

Wenn nun die Potenzreihen $\mathfrak{P}_\mu$ auf die in denselben enthaltenen linearen Glieder reducirt werden, so hat

entweder von den Determinanten m^{ter} Ordnung, welche aus den Systemen der $m \cdot n$ Coefficienten dieser linearen Glieder gebildet werden können, für ein nicht singuläres System von Argumentwerthen $(\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n')$ mindestens eine einen von Null verschiedenen Werth,

oder es hat für jedes System der Argumentwerthe jede dieser Determinanten m^{ter} Ordnung den Werth Null.

Tritt der erste von diesen beiden Fällen ein, so möge angenommen werden, — da es auf die Reihenfolge, in welcher die n Argumente mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bezeichnet werden, nicht ankommt, — daß die Determinante

$$\left| \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \xi_\nu} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots m) \tag{2.}$$

für das betrachtete System von Argumentwerthen $(\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n')$ einen von Null verschiedenen Werth habe.

Unter dieser Voraussetzung können bekanntlich die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_\mu(\xi_1 - \xi_1', \xi_2 - \xi_2', \ldots \xi_n - \xi_n') = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m) \tag{3.}$$

in Bezug auf die Größen $\xi_1 - \xi_1', \xi_2 - \xi_2', \ldots \xi_m - \xi_m'$ als Unbekannte durch Reihenentwickelungen aufgelöst werden, welche nach Potenzen der Größen $\xi_{m+1} - \xi_{m+1}', \ldots \xi_n - \xi_n'$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten und für alle der Stelle $(\xi_{m+1}', \ldots \xi_n')$ hinreichend nahe liegende Werthsysteme $(\xi_{m+1}, \ldots \xi_n)$ convergiren. Diese Potenzreihen haben reelle Coefficienten und das constante Glied derselben hat den Werth Null.

Hieraus ergiebt sich aber, da das System der Werthe $(\xi_{m+1}, \ldots \xi_n)$ in der Umgebung der Stelle $(\xi_{m+1}', \ldots \xi_n')$ willkürlich gewählt werden kann, die Richtigkeit des angeführten Lehrsatzes für den ersten der beiden angegebenen Fälle.

Tritt aber von diesen beiden Fällen der zweite ein, mit anderen Worten, hat für das System der Functionen $f_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ jede Functionaldeterminante m^{ter} Ordnung den Werth Null, so sind die Werthe der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\mu$ nicht mehr, wie in dem ersten Falle, von einander unabhängig, sondern die Werthe einiger derselben sind durch die Werthe der übrigen bereits bestimmt.

In diesem Falle kann man annehmen, daß, während alle Functionalsubdeterminanten des Systemes der Functionen $f_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, deren Ordnungszahl gleich r oder größer als r ist, den Werth Null haben, mindestens eine der Functionalsubdeterminanten $(r-1)^{\text{ter}}$



Ordnung für das Werthsystem $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n)$ der unabhängigen Variabeln einen von Null verschiedenen Werth habe.

Da es bei dieser Annahme weder auf die Reihenfolge, in der die Functionen f_μ mit $f_1, f_2, \ldots f_m$, noch auf die Reihenfolge, in der die Argumente ξ_ν mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bezeichnet werden, ankommt, so kann man von der Voraussetzung ausgehen, es habe die Determinante

$$(4.)\qquad \left| \frac{\partial f_\mu}{\partial \xi_\nu} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots r-1)$$

für das betrachtete nicht singuläre Werthsystem $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n)$ der Argumente einen von Null verschiedenen Werth.

Zu dem Systeme der Functionen f_μ $(\mu = 1, 2, \ldots r-1)$ füge man eine von diesen Functionen unabhängige rationale Function f_0 derselben Argumente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ hinzu und wähle zugleich aus der Gesammtheit der übrigen Functionen f_μ, für welche also $\mu > r-1$ ist, eine beliebige aus, etwa f_r.

Die Function f_0 möge der Bedingung gemäß gewählt werden, daß die Functionaldeterminante

$$(5.)\qquad \left| \frac{\partial f_\mu}{\partial \xi_\nu} \right| \qquad (\mu = 0, 1, \ldots r-1;\ \nu = 1, 2, \ldots r)$$

für das betrachtete Werthsystem $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n)$ einen von Null verschiedenen Werth hat, was auf unendlich viele Arten geschehen kann.

Es ergiebt sich dann, wenn zur Abkürzung

$$f_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = f_\mu, \qquad f_\mu(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n) = g_\mu$$

gesetzt wird, ein System von r Gleichungen

$$(6.)\qquad f_\mu - g_\mu = \mathfrak{P}_\mu(\xi_1 - \xi'_1, \xi_2 - \xi'_2, \ldots \xi_n - \xi'_n), \qquad (\mu = 0, 1, \ldots r-1)$$

welches bei Beschränkung der Veränderlichkeit der Größen

$$f_0, f_1, \ldots f_{r-1}; \qquad \xi_{r+1}, \ldots \xi_n$$

auf eine gewisse Umgebung der Stelle

$$(g_0, g_1, \ldots g_{r-1}; \qquad \xi'_{r+1}, \ldots \xi'_n)$$

in Bezug auf die Größen $\xi_1 - \xi'_1, \xi_2 - \xi'_2, \ldots \xi_r - \xi'_r$ als Unbekannte durch convergente Potenzreihen

$$(7.)\qquad \xi_\nu - \xi'_\nu = \overline{\mathfrak{P}}_\nu(f_0 - g_0, f_1 - g_1, \ldots f_{r-1} - g_{r-1}; \ \xi_{r+1} - \xi'_{r+1}, \ldots \xi_n - \xi'_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots r)$$

aufgelöst werden kann.

Es giebt also unendlich viele der Umgebung der nicht singulären Stelle $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n)$ angehörende Systeme von reellen Werthen $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, welche die Gleichungen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \mathfrak{g}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots r-1)$$

befriedigen.

Für die Differenz

$$\mathfrak{f}_r(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) - \mathfrak{g}_r = \mathfrak{P}_r(\xi_1 - \xi_1', \xi_2 - \xi_2', \ldots \xi_n - \xi_n')$$

ergiebt sich nun ebenfalls in Folge der Gleichungen (7.) eine convergente Potenzreihe

$$(8.) \quad \mathfrak{f}_r(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) - \mathfrak{g}_r = \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r(\mathfrak{f}_0 - \mathfrak{g}_0, \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{g}_1, \ldots \mathfrak{f}_{r-1} - \mathfrak{g}_{r-1};\ \xi_{r+1} - \xi_{r+1}', \ldots \xi_n - \xi_n').$$

Aus dem Umstande aber, daß für das System der von den n Argumenten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ abhängenden Functionen $\mathfrak{f}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots r)$ der Voraussetzung zufolge alle Functionaldeterminanten r^{ter} Ordnung den Werth Null haben, wird gefolgert, daß die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r}{\partial \mathfrak{f}_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r}{\partial \xi_\nu} \qquad (\nu = r+1, r+2, \ldots n)$$

identisch gleich Null sind; es kommen also in der Potenzreihe $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r$ Glieder, welche von den Größen $\mathfrak{f}_0, \xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots \xi_n$ unmittelbar abhängen, nicht vor.

Ein ganz analoger Schluß gilt für jede der Differenzen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) - \mathfrak{g}_\mu \qquad (\mu = r+1, r+2, \ldots m).$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen besteht also, wenn dem Index μ irgend einer der Werthe r, $r+1, \ldots m$ beigelegt wird, jedesmal eine Gleichung von der Form

$$(9.) \quad \mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) - \mathfrak{g}_\mu = \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_\mu(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{g}_1, \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{f}_{r-1} - \mathfrak{g}_{r-1}), \quad (\mu = r, r+1, \ldots m).$$

Werden daher den Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ solche, einer gewissen Umgebung der Stelle $(\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n')$ angehörende Werthe beigelegt, für welche die Gleichungen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \mathfrak{g}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots r-1)$$

erfüllt sind, so befriedigen diese Werthe auch die Gleichungen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \mathfrak{g}_\mu, \qquad (\mu = r, r+1, \ldots m),$$

da in allen hier mit $\mathfrak{P}$, $\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ bezeichneten Potenzreihen das constante Glied den Werth Null hat.

Hiermit ist die allgemeine Richtigkeit des angeführten Lehrsatzes und damit zugleich die allgemeine Richtigkeit der zu Anfang dieser Anmerkung wiederholten Behauptung dargethan.

Zu Seite 400. »Die Determinante $| \xi_\mu^{(\nu)} |$ ist .... im Allgemeinen nicht identisch gleich Null, wie man leicht nachweisen kann«.

Dieser Nachweis kann dadurch geführt werden, daß man ein specielles Multiplicationsverfahren aufstellt, bei dessen Zugrundelegung die Gleichungen (7.) auf Seite 397 erfüllt sind und für welches die in Rede stehende Determinante sich als im Allgemeinen von Null verschieden erweist.

Ein solches Multiplicationsverfahren ist durch die Gleichungen

$$e_a e_a = e_a, \qquad e_a e_b = 0 \text{ wenn } b \gtrless a, \qquad (a,b = 1,2,..n)$$

bestimmt.

Bei Zugrundelegung dieses Multiplicationsverfahrens geht die Determinante $| \xi_\mu^{(\nu)} |$ in die Determinante $| \xi_\mu^\nu |$ $(\mu,\nu = 1,2,..n)$ über; die letztere Determinante aber hat, wenn je zwei der Größen ξ_μ von einander verschieden sind und keine dieser Größen gleich Null ist, einen von Null verschiedenen Werth.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September 1884.

Nature No. 770. 771. 772. 773. 774.
Atti della r. accademia dei Lincei. Transunti. Vol. VIII. fasc. 13. 14. 15.
Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique de l'université d'Upsal. Vol. XV.
Proceedings of the manchester literary and philosoph. society. Vol. XX—XXII.
Memoirs of the manchester literary and philosophical society. Vol. VII. IX.
Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. XXXVIII. Hft. 2. 3.
Leopoldina. Bd. XX. No. 13. 14.
Bulletin de l'academie roy. des sciences etc. de Belgique. 3e Sér. T. VII. No. 5.
Katalog der Bibliothek der wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde in Hanau. Hanau 1883.
Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. August.
Australian Museum, report of the trustees for 1883.
Monthly notices of the roy. astronomical society. Vol. XLIV. No. 8.
Dr. Berlanga, decretum Pauli Aemilii Pactum fiduciae lex metalli vipascensis. Pars II.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. XXXIV. Heft 3.
Meddelanden af Societas pro Flora et Fauna fennica. Heft 9. 10.
Mémoires de l'académie des sciences de St. Petersbourg. T. XXXI. No. 15. 16. T. XXXII. No. 1—3.
Proceedings of the london mathematical society. No. 222—224.
Proceedings of the royal society. No. 227—231.
Philosophical Transactions of the roy. society of London. Vol. CLXXIV. P. II. III.
The royal. society. 30th November 1883 (Mitgliederverzeichniß).

Memoirs of the museum of comparative zoology at Harvard College. Vol. VIII. No. 3. XII. XIII.
Jahresbericht des historischen Vereins für Unterfranken. Aschaffenburg 1882. 1883.
Archiv des historischen Vereins für Unterfranken. Aschaffenburg. Bd. XXVII.
L. Fries, die Geschichte des Bauernkriegs in Ostfranken. Bd. II. Lief. 3 (Schluß). Würzburg 1883.
Memoirs of the royal astronomical society. Vol. XLVIII. P. 1.
Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgg. im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen u. Thüringen. Bd. LVII. Heft. 3.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes, herausgg. v. d. deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. VIII. No. 4.
Sitzungsberichte der k. preuß. Academie der Wissenschaften zu Berlin. 1884. No. 18—39.
Transactions of the linnean Society of London. 2d ser. Botany. Vol. VI. P. 6. 7. 2d ser. Zool. Vol. II. P. 9. 10. Vol. III. P. 1.
Journal of the linnean Society. Botany. No. 130—133. Zoology. No. 101—102.
Proceedings of the linnean Society of London. Oct. 1883.
List of the linnean Society of London 1883. Oct.
Sitzungsberichte der kaiserl. Academie der Wissenschaften in Wien. Philosophisch-historische Classe. Bd. CIV. Hft. 1. 2. Bd. CV. Hft. 1—3. Bd. CVI. Hft. 1. 2. Mathematisch-naturwissenschaftl. Cl. 1. Abthlg. 1883. No. 6—10. 1884. No. 1—5. 2. Abthlg. 1883. No. 6—10. 1884. No. 1—3. 3. Abthlg. 1883. No. 4—10. 1884. No. 1. 2.
Denkschriften der kaiserl. Academie der Wissenschaften. Philosoph.-histor. Cl. Bd. XXXIV. Mathematisch. naturwissensch. Cl. Bd. XLVII.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. LXV. 1. u. 2. Hälfte.
Fontes rerum austriacarum. 2. Abthlg. Bd. XLIII.
Almanach der kaiserl. Academie der Wissenschaften 1884.
Bulletin de l'academie des sciences etc. de Belgique. 3e Sér. T. VII. No. 6.
Jahresbericht des physicalischen Vereins zu Frankfurt a. M. für 1882/83.
Wolf, astronomische Mittheilungen LXII.
Journal of the roy. microscop. Soc. Vol. IV. P. 4.
Travaux et mémoires du bureau international des poids et medures. T. III.
Mittag-Leffler, Acta mathematica. 4. 2.
Memorie della accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. IV. T. IV.
Records of the geological survey of India. Vol. XVII. P. 3.
Bulletin of the museum of comparative zoology at Harvards College. Vol. XI. No. 10.
Boncompagni, bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matemat. e fisiche. T. XVI. Novbr. Decbr. (Für die Gauß-Bibliothek.)
Jahrbuch des k. sächs. meteorolog. Instituts. 1883. Lief. 2. Abthlg. 1. 2. 3.
Decadenberichte des kön. sächsischen meteorolog. Instituts im J. 1883.
Atti della societa toscana di scienze naturali. Proc. verbali Vol. IV.
Bulletin de la société mathématique de France. T. XII. No. 2. 3.
vom Rath, Geologisches aus Utah. S.-A. aus dem neuen Jahrb. für Mineralogie. Bd. 1.
Ders., geologische Briefe aus Amerika. S.-A. aus den Sitzungsberichten d. niederrh. Gesellschaft.
Proceedings of the roy. Society of Queensland. Vol. I. P. 1.
Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Septbr.
Leopoldina. Heft XX. 15. 16.
Rhenus. 2. Jahrg. No. 8.
Flora batava. Afl. 265. 266.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVII. Entr. 6. T. XVIII. Entr. 1. 2.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten
von der
Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften
und der
Georg-Augusts-Universität
zu Göttingen.

26. November. № 11. 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Optische Studien am Leucit.

Von
C. Klein.

Mit einer Tafel.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. August 1884.)

Nachdem es sich erwiesen hatte, daß der Leucit in höheren Temperaturen optisch isotrop wird[1]), war mein Bestreben darauf gerichtet, nicht nur andere Vorkommen, als die damals geprüften, zu untersuchen, sondern auch einen Einblick in die optische Structur des Zustandes zu gewinnen, in dem dieses Mineral uns jetzt entgegentritt und womöglich diesen Zustand selbst zu ergründen.

Hierzu war es aber vor allen Dingen nöthig eingehend das zu studiren, was andere Forscher vorher erkannt hatten, und ich lege deßhalb zunächst eine kritische Uebersicht des am Leucit in geometrischer und optischer Hinsicht Erforschten vor. Darauf mögen meine vorzugsweise optischen Untersuchungen folgen, denen selbst wieder ein Capitel über Beobachtungsinstrument und Beobachtungsmaterial voransteht. Den Schluß bilden eine Zusammenstellung der Resultate, Schlüsse und Vergleiche.

---

1) C. Klein. Ueber das Krystallsystem des Leucit und den Einfluß der Wärme auf seine optischen Eigenschaften. Diese Nachrichten 1884. Nr. 6 Sitzung v. 3. Mai.

I. Kritische Uebersicht der über das Krystallsystem des Leucits handelnden Untersuchungen.

Der Leucit galt seit den Tagen Haüy's[1]), der ihn als regulär und einfach lichtbrechend befand, bis in die siebenziger Jahre als typisches Beispiel des regulären Systems, denn die feinen, ihrer Zeit voraneilenden Beobachtungen eines Brewster[2]), die wohl etwas knapp gehalten, aber doch deutlich die zweiaxige Doppelbrechung für das Mineral in Anspruch nahmen, waren, wie es schien, nicht zur Kenntniß eines größeren Publikums gekommen.

Die für ihre Zeit epochemachende Arbeit von Biot[3]) über die Lamellarpolarisation erkennt die Wirkung der Leucitsubstanz auf das polarisirte Licht und hebt die Lamellenbildung und ihre wenig regelmäßige Erscheinungsweise in den Krystallen von Frascati hervor. Von letzteren sagt der berühmte Forscher mit Recht: »leurs moindres parcelles développent immédiatement, dans la lumière polarisée, des couleurs très vives, distribués capricieusement par points et par bandes en divers parties de leur épaisseur«. — Biot hofft die Structur von größeren Krystallen noch ergründen zu können; die vorhandenen erkannten Erscheinungen genügen ihm aber, um auf Grund derselben die hier vorkommende Doppelbrechung als eine nicht ursprüngliche anzusehen, da sie sonst nicht mit der symmetrischen Constitution dieses Minerals vereinbar sein könnte. Verstehen wir hierunter den regulären Formentypus der Krystalle, so kann der scharfsinnigen Auffassung Biot's nur zugestimmt werden.

Im Jahre 1862 betrachtet Des-Cloizeaux den Leucit noch als regulär[4]) und spricht in Folge dessen nicht von optischen Besonderheiten. In den Untersuchungen des genannten Forschers vom Jahre 1868[5]) treten dagegen eine Reihe von Beobachtungen, an orientirten Schliffen angestellt, zu Tage; so wurden, aus Krystallen von Frascati geschnitten, ein Würfel und Platten nach dem Oktaëder und Dodekaëder geprüft.

Obwohl also nach dem Würfel keine Schliffe vorhanden waren und als Instrument das ältere sogenannte Polarisationsmikroskop zur Verwendung kam, demnach, wie es zu damaliger Zeit Sitte war, operirt wurde, erkennt man, trotz der Ungunst der Verhältnisse doch in der Schilderung des Baues der Würfelflächen, daß Lamellen

1) Haüy. Traité de Minéralogie. 1801 II. p. 403, 409.
2) Brewster. Edinburgh Philos. Journ. Vol. V April-October 1821. p. 218.
3) Biot. Mémoire sur la polarisation lamellaire 1841. p. 669—670.
4) Des-Cloizeaux. Manuel de Minéralogie. 1862. I. p. 290.
5) Des-Cloizeaux. Nouvelles recherches etc. 1868 p. 513—515.



nach den Seiten des Würfelquadrats und solche nach dessen Diagonalen wahrgenommen wurden.

Die Lamellen werden Absonderungen nach dem Dodekaëder zugeschrieben und daraus die versteckte Spaltbarkeit, die der Leucit zeigen soll, zu erklären versucht.

Auch das Studium von Oktaëder- und Dodekaëderschliffen förderte die Kenntniß von Erscheinungen, wie die unter 60° und 120° zu einander geneigten Lamellenbildungen in Schliffen nach dem Oktaëder, zu Tage, die heute noch Geltung haben.

Von den Beobachtungen im convergenten Licht sei hervorgehoben, daß sich eine Würfelfläche durch verschwommene Kreuzerscheinung auszeichnet und danach etwa wie die Basis eines einaxigen Krystalls oder Fläche senkrecht zur I. Mittellinie eines zweiaxigen Körpers von kleinem Axenwinkel verhält, während die beiden andern Würfelflächen, nach den Erscheinungen, die sie unter jenen Umständen darbieten, etwa Flächen parallel der Axe oder Pinakoiden bei rhombischer Auffassung entsprechen könnten.

Der Würfelschliff, welcher die Rolle der Basis spielt, zeigt auch in seinem Lamellenaufbau (zahlreiche rechtwinkelig gekreuzte Lamellen parallel den Diagonalen des Würfelquadrats) Verhältnisse, die mit den neueren Beobachtungen sehr gut stimmen. — Die anderen Würfelflächen bieten im parallelen Lichte Erscheinungen dar, die ebenfalls als richtig erkannte gelten können; daneben sind nur andere, die erst bei wahren Dünnschliffen und feinerer mikroskopischer Betrachtung hervortreten, nicht erwähnt.

Auch der Schilderung der Erscheinungen, die sich im convergenten Lichte in Oktaëderschliffen zeigen und auf das Auftreten einer kreisähnlichen Curve, durchsetzt von einer schwarzen Barre hinaus kommen, kann man beipflichten. In der Hauptsache läßt die heutige Untersuchung, angestellt an wesentlich aus einem Grundkrystalle bestehenden Leuciten von Frascati alles von Des-Cloizeaux Beobachtete als correct erscheinen. Nur kann man dem Schluß jenes Forschers, der damals die Polarisationserscheinungen durch die Wirkung fein gestreifter Lamellen und feiner Spalte erklären wollte, nicht mehr beipflichten.

Während somit schon etwas von der Lehre Biot's abgewichen war, wurde von Zirkel[1]) nach einem eingehenden Studium der Lamellenbildung und der Mikrostructurverhältnisse unseres Minerals, jener Standpunkt ganz verlassen und der Versuch gemacht, die Erscheinungen durch Annahme eines doppelbrechenden Natronleucits,

1) Zirkel. Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellsch. B. XX 1868.

dem regulären Kalileucit in Form von Lamellen eingeschaltet, zu erklären.

Da zeigte G. vom Rath[1]) 1872, daß die geometrischen Eigenschaften der Leucite (besonders der aufgewachsenen vom Vesuv) nicht nach Winkelverhältnissen und Zwillingsbildungen mit den Anforderungen des vollflächig gebildeten regulären Systems vereinbar seien. Er verwies danach den Leucit in das quadratische System.

Von geometrischer Seite wurde das Axenverhältniß

$$a : c = 1 : 0{,}52637$$

gegeben und die regulären Formen

$$2\,O\,2(211) \text{ und } \infty O(110)$$

in $P(111),\ 4P2(421);\quad 2P\infty(201),\ \infty P(110)$

zerfällt.

Die gemessenen Winkel stimmten z. Th. sehr befriedigend mit den gerechneten überein, manch' Mal kamen aber auch größere Abweichungen vor, einzelne Krystalle waren sogar überhaupt nicht nach den Kanten von P(111) und 4P2(421) zu unterscheiden (P. Ann. p. 208). Auffallend blieb immer, bei aller Möglichkeit die besseren Winkel für das quadratische System in Anspruch zu nehmen, der constant reguläre Formentypus der Krystalle, ja die bisweilen auch in den Winkeln ausgedrückte vollkommen isometrische Gestaltung derselben[2]).

Die Streifung auf den Flächen leitete auf eine Zwillingsbildung nach $2P\infty$ (201) hin. Eine derartige Bildung konnte im regulären Systeme bei Vollflächigkeit desselben nicht vorkommen, sie hätte nach einer Symmetrieebene und zwar nach $\infty O(110)$ verlaufen müssen. Also war hiermit das reguläre System ausgeschlossen. Nach den Untersuchungen G. vom Rath's sollte aber die Zwillingsbildung nicht eine vollkommen dodekaëdrische sein, sondern nur nach $2P\infty(201)$ und nicht nach $\infty P(110)$ gehen.

Er studirt unter dieser Annahme den feineren Zwillingsbau der Krystalle durch die sich darbietende Streifung auf den natürlichen Flächen und kommt bezüglich der nicht zu seinen Annahmen passenden Erscheinungen, wie Streifungen auf P(111), parallel der

---

1) G. vom Rath. Ueber das Krystallsystem des Leucits. Monatsber. der Berliner Academie. Sitzung v. 1. Aug. 1872 u. Pogg. Annalen Ergänz.-B. VI.

2) Verfasser ist auf Grund goniometrischer Untersuchungen geneigt diese Ausbildung dadurch zu erklären, daß er annimmt der Leucit wende in Folge seiner Zwillingsbildung nur lauter spitze Randecken von 4P2 (421) nach der Peripherie hin. (Vergl. P. Annal. p. 214 u. 226).

symmetrischen Diagonale, Zwillingskanten auf 4P2(421), parallel einer secundären Endkante, zu dem Schluß, hier liege keine Abweichung von der Regel, sondern eine durch Zwillingsbildung höherer Ordnung veranlaßte Erscheinung, die sich seiner Anschauung nur scheinbar widersetze, vor.

Soweit es überhaupt einem Forscher möglich war, hatte G. vom Rath aus der Oberflächenstreifung die Structur erkannt. Ich will auch durchaus nicht behaupten, daß er mit seiner Deutung der besonderen, nicht seiner Theorie sich anpassenden Fälle Unrecht gehabt habe. — Ich kann aber andererseits durch genaue optische Untersuchung nur bestätigen, was sein Gegner Hirschwald ihm einwandte: der Leucit besitze dodekaëdrische Zwillingsbildung. Dieß bestätigt, wie gesagt, die optische Untersuchung und stellt grade die Lamellenbildung nach ∞P(110) als eine der durchgreifendsten im Systeme hin. — Schon die oben als Basis gedeutete Würfelfläche Des-Cloizeaux's zeigt jene Bildung dominirend. Sofern der Leucit nun noch quadratisch bleiben soll, muß man annehmen, er sei nicht vollflächig und ∞P(110) keine Symmetrieebene. Aber diese Annahme entfällt, die Prüfung der scheinbar quadratischen Basis ergibt, daß sich in ihrer Ebene Elasticitätsunterschiede zeigen, die die Zwillingslamellen nach ∞P(110) bestens zum Ausdruck bringen: der Leucit geht danach in das rhombische System über mit Geltendmachung einer großen Annäherung seiner Ausbildung an die des quadratischen und regulären.

Gegen die vom Rath'sche Ansicht sprach sich, wie erwähnt, Hirschwald 1875 aus[1]). Er untersuchte eine Anzahl von Krystallen, zumal eingewachsene der Vesuvlaven, und fand zum Theil eine durchaus präcise reguläre Entwickelung derselben, wie dieß Hessenberg gleichfalls schon bemerkt hatte (vergl. vom Rath l. c. pag. 224). Dann constatirte er Uebergangsglieder, bis schließlich die präcise gebildeten Leucite von quadratischem Typus erreicht werden. So stellte sich in den verschiedenen Vorkommnissen eine Reihe dar, die H. zu der Ansicht führte, es habe die Abkühlung der Krystalle von ihrer Entstehungstemperatur an bis zu der Temperatur, bei welcher wir sie beobachten, eine Winkeländerung zur Folge gehabt.

Bezüglich der optischen Untersuchung erkannte H. an einem eingewachsenen Vesuvkrystall die vollkommen dodekaëdrische Zwillingsbildung und zwar an Würfel-, Oktaëder- und Dodekaëderschliffen,

1) Zur Kritik des Leucitsystems. Tschern. Min. und petr. Mitth. 1875 p. 227 u. f.

ausgedrückt durch die Anzahl der nach allen Flächen des Dodekaëders zu erwartenden Lamellen. — Diese Beobachtung wird durch die erneute Untersuchung völlig bestätigt, dagegen ist zu bemerken, daß auf Grund der drei einem Krystalle entnommenen, verschiedenen Ecken entstammenden und völlig gleich sich verhaltenden Würfelschliffe kein Schluß auf den regulären Charakter des Leucits gezogen werde darf. Sind diese Schliffe völlig gleich, so ist, soweit man dieß beurtheilen kann, ohne die Präparate gesehen zu haben, sehr wahrscheinlich der Krystall aus drei Grundkrystallen, die mit ihren Verticalaxen im Sinne der a Axen des regulären Systems gelagert sind, aufgebaut gewesen.

Hirschwald stellt zum Schlusse seine Ansichten in mehreren Sätzen zusammen. Man wird heute den meisten Aussprüchen ganz zustimmen können, namentlich dem über die dodekaëdrische Zwillingsbildung, die schwankenden Winkelverhältnisse der Krystalle, die theils regulär erscheinen, theils quadratisch sich ansehen und verbindende Mittelglieder zwischen sich aufweisen. Alles das wird durch ein genaues Studium des optischen Gefüges bestätigt und erklärt. Mit Recht betont H. auch den regulären Formentypus der Krystalle, so daß in der Hauptsache das gegeben erscheint, was auch die neueren Untersuchungen nachweisen.

Nur in einem Hauptpunkte vermag man H. nicht beizupflichten. Es ist darin, daß H. den Leucit, so wie er erscheint, für regulär hält. — Der Leucit war regulär, ist aber jetzt weder regulär nach Winkelverhältnissen, noch nach optischen Eigenschaften, nur der reguläre Formentypus ist von früher her geblieben.

Das »Sonst und Jetzt« beim Leucit beruht offenbar auf zwei verschiedenen Molekularanordnungen; es fragt sich, ob man das im gebräuchlichen Wortsinne als »Dimorph« bezeichnen, oder nach Scacchi »polysymmetrisch« nennen will, oder nach Lehmann zu sprechen geneigt ist von einer physikalischen Polymerie und der Umwandlung einer festen Modification in eine feste.

Die oben erwähnte Kritik Hirschwald's rief alsbald eine Entgegnung von G. vom Rath hervor[1]). Da in derselben jedoch die wichtigsten thatsächlichen Resultate H.'s, wie das der dodekaëdrischen Zwillingsbildung, des Vorkommens regulär gebildeter neben quadratisch erscheinenden Leuciten an denselben Fundorten u. s. f. keine Widerlegung finden, so ist es von unserem Standpunkt nicht nöthig weiter darauf einzugehen.

Aus denselben Gründen können wir kurz über G. vom Rath's

---

1) Neues Jahrb. für Mineralogie u. s. w. 1876 p. 281.

Nachschrift weggehen [1]), denn die darin angezogenen Untersuchungen Tschermak's sollen besonders gewürdigt werden und die gegen Hirschwald angeführten Untersuchungen Des-Cloizeaux's, an einem Leucitwürfel vorgenommen, können bei aller Hochachtung für den verehrten Forscher nur mit Reserve zur Systembestimmung verwerthet werden, da man der Feinheit des Bau's wegen sich nur ein Urtheil an orientirten Dünnschliffen zu bilden vermag. Schließlich fehlen auch durchaus nicht alle Analogien zwischen Leucit und Analcim, was einer demnächstigen Arbeit vorbehalten sein mag, zu zeigen.

Auf beide Mittheilungen G. vom Rath's replicirt Hirschwald [2]). Abgesehen von manchen Angaben und Klarstellungen, die das Thatsächliche nicht vermehren, sei hier nur eines Einwands gegen G. vom Rath gedacht, der behauptet hatte, es sei ein Irrthum anzunehmen, die Hohlräume um die Leucite rühren von Contractionen derselben her, welche nach verschiedenen Zonen verschieden gewesen wären.

Hirschwald ist der Ansicht, daß eine Contraction nicht zu leugnen sei, da die Leucite immer noch eine sehr hohe Temperatur in der flüssigen Lava gehabt hätten (ca. 1000° C.). — Ich möchte mich an dieser Discussion nicht betheiligen und nicht entscheiden, ob H. Recht oder Unrecht bezüglich der Entstehung jener Hohlräume um die Krystalle habe; was ich hervorheben will ist das, daß der Leucit, der in der Lava schwimmt, mit Sicherheit wohl als regulär angesehen werden darf und erst später durch Contraction den Zustand angenommen hat, in dem wir ihn heute antreffen.

Von optischer Seite her bestimmte Des-Cloizeaux 1874 [3]) an Parallelepipeden von Leucit (Frascati), welche, wie in seiner Arbeit vom Jahre 1868 mitgetheilt ist, orientirt waren, die Erscheinungen im convergenten Licht und zwar mit demselben Erfolge wie früher, ermittelte den Charakter der Doppelbrechung als positiv und die Brechungsexponenten:

$$o = 1{,}508$$
$$e = 1{,}509.$$

Tschermak [4]) untersuchte den Leucit aus dem Leucitit von

1) N. Jahrb. f. Min. u. s. w. 1876. p. 403.

2) N. Jahrb. f. Min. u. s. w. 1876 p. 519. u. 733.

3) Manuel de Minéralogie II. 1874 p. XXXII. Vergl. auch Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. 1873 B. XX p. 566.

4) Mineral. und petrog. Mittheilungen 1876 p. 66.

Acqua acetosa. Es wurde aus einem Krystall von daher, der ein nicht so feines Zwillingsgewebe darbot, wie die Krystalle anderer Fundorte, unter Berücksichtigung der Zwillingslamellen ein Schnitt senkrecht zur Hauptaxe geführt und das Präparat im Polarisationsinstrument geprüft, nachdem es sich im parallelen polarisirten Licht zwischen gekreuzten Nicols als fast ganz dunkel erwiesen hatte. — Man sah im Polarisationsinstrument ein Kreuz und erkannte mit dem Glimmerblättchen negativen Charakter der Doppelbrechung.

Es würde daraus folgen, daß auch der Charakter der Doppelbrechung schwankend ist. Dieß wäre um so auffallender, als alle von mir mit Sicherheit geprüften Leucitvorkommen (lose Krystalle und Leucite in Gesteinen) positiv sind. — Ich habe daher von Acqua acetosa ebenfalls Stücke untersucht und an denselben, wie an den anderen Leuciten, einen positiven Charakter der Doppelbrechung gefunden (Bezüglich der von mir befolgten Methode folgt das Nähere im speciellen Theile). Somit gibt es jedenfalls dortselbst auch Krystalle, die wie die aller anderen Fundorte sich verhalten.

Die Frage nach dem Krystallsystem des Leucits war nach G. vom Rath's Veröffentlichung auch von anderer Seite in Angriff genommen worden. Baumhauer wandte auf das Mineral die Methode der Aetzung an und kam zu dem Resultate, daß:

1. Die tetragonalen Pyramidenflächen sich von den ditetragonalen durch geringere Löslichkeit in Aetzmitteln unterscheiden.
2. Die Zwillingsbildung auf das vom Rath'sche Gesetz zurück geführt werden kann.
3. Die schwankenden Winkelwerthe der Gestalten in vielfacher Verzwillingung derselben ihre Erklärung finden.
4. Alle Leucite, auch die regulär erscheinenden, dem quadratischen Systeme zuzuzählen sind; regulärer, sowie quadratischer Habitus durch die jeweils verschiedene Art, wie die Zwillingslamellen sich zu einander stellen, gitterartige Durchdringung u. s. w. zum Ausdruck kommen.

Zu diesen Aussprüchen ist zu bemerken, daß der erste sehr wohl richtig sein kann, der zweite aber entschieden nicht genügt, da schon die Betrachtung des Basisschliffs eines Leucits zeigt, daß derselben völlig erfüllt von Zwillingslamellen nach $\infty P(110)$ ist.

Bezüglich des dritten und vierten Ausspruchs erlaube ich mir zu bemerken, daß die Zwillingsbildung ihren Einfluß auf die Winkel wohl äußern wird, daneben aber sicher der Einfluß herläuft, den die Contraction auf die Krystalle ausübt, wenn diese sich abkühlen und

1) Zeitschrift für Krystallographie u. s. w. I. 1877 p. 257.

vom regulären in den Zustand übergehen, in dem sie sich jetzt befinden. Was den regulären Formentypus anlangt, so führe ich denselben noch auf andere Ursachen zurück als Herr Baumhauer und werde darüber später reden.

In einem ferneren Aufsatze: »Ueber unsere derzeitige Kenntniß des Leucitsystems« tritt Hirschwald[1]) nicht nur den Aussprüchen Baumhauer's, sondern auch solchen G. vom Rath's entgegen.

Er betont darin den regulären Formentypus der Krystalle, beleuchtet die Unzulänglichkeit der vom Rath'schen Erklärung des Auftretens scheinbar regulärer Krystalle (vergl. pag. 424 Fußnote) und wendet gegen Baumhauer ein, daß man eine gitterartige Durchkreuzung der Leucitlamellen seltener, häufiger ein Absetzen derselben und Grenzen der Lamellenzüge beobachte.

Hierzu möge die Bemerkung gestattet sein, daß, wie ich mich an zahlreichen Schliffen überzeugte, Beides vorkommt und zwar in Schliffen gleicher Orientirung, besonders gern in Würfelschliffen[2]). Ein Urtheil abzugeben, was mehr vorkommt, möchte schwer sein.

Mit Rücksicht auf die von ihm hervorgehobene dodekaëdrische Zwillingsbildung sucht Hirschwald letztere zu stützen und führt als Beweise die äußere Flächenstreifung namentlich der eingewachsenen Leucite und Schliffe parallel dem Oktaëder an, bei denen die Zwillingslamellen in eine gleichmäßig gefärbte Grundmasse, das Stamm-Individuum, eingelagert sind. Es wird die unter je 60° zu einander geneigte Stellung jener Lamellen beschrieben und zu den Begrenzungselementen des Stammindividuums erörtert, ferner auf einen Unterschied eingewachsener Krystalle gegenüber aufgewachsenen hingewiesen. Bei ersteren setzen die Lamellen an den durch die kürzeren Kanten des Ikositetraëders gebildeten Demarkationslinien ab, bei letzteren sind solche nicht vorhanden und die Lamellen ziehen gleichmäßiger, sich dabei durchkreuzend, durch den Schliff hindurch.

Einen zweiten Complex von ebenfalls drei unter je 60° zu einander geneigten Lamellen, die bei der Untersuchung mit dem Gypsblättchen wie verschwommen aussehen und nicht lebhaft polarisiren, hat H. nicht beobachtet. Erst durch diesen Complex, dessen Arme die Winkel der Arme des ersteren Systems halbiren, wird die dodekaëdrische Zwillingsbildung, die sich auch nach meinen Untersuchungen bestätigt, völlig erfüllt.

---

1) Mineral. und petrog. Mitth. von Tschermak 1878. N. Folge B. I. p. 85.

2) Cohen. Mikrophotographien 1881. Tafel XXXII Fig. 3 u. 4, bildet den Fall der Durchkreuzung ab.

Was H.'s Aussprüche über das optische Verhalten des Leucits anlangt so kann ich ihm nicht ohne Weiteres zustimmen, namentlich nicht darin , daß die optischen Eigenschaften jenes Minerals nicht geeignet seien, einen Anhalt zur Entscheidung der Systemfrage zu geben. — Auch halte ich dafür, daß Hirschwald Mallard's Ansicht über die optischen Anomalien nicht dessen Auffassung entsprechend wiedergegeben hat.

In einem letzten Capitel seiner Arbeit bespricht H. das Verhalten des Leucits gegen Aetzmittel und kommt zu dem Schluß, daß solche wohl den polysynthetischen Aufbau dieser Krystallspecies, aber nicht die Bedeutung der Flächen mit genügender Deutlichkeit aufzudecken vermögen.

Zum Schluß bezeichnet Hirschwald die Punkte, rücksichtlich welcher zwischen ihm und seinen beiden Gegnern eine Meinungsverschiedenheit besteht. Es sind dieß:

1. Die Ansicht über die Zwillingsverwachsung, ob dodekaëdrisch, oder nach den Flächen der vom Rath'schen Deuteropyramide.

2. Die Ansicht über die Gestalten mit regulärer Winkelentwickelung. Sind diese Winkel rund um den Krystall die von 2 O2 (211) oder die der spitzeren Randecken von 4 P2 (421)?

Den Hirschwald'schen Einwänden gegenüber hält Baumhauer die Resultate seiner Untersuchungen aufrecht[1]), namentlich Alles, was an aufgewachsenen Leuciten von ihm beobachtet worden ist. Bezüglich der eingewachsenen Krystalle wird eingeräumt, daß das Material hier zu Beobachtungen viel ungünstiger sei und man sich daher mehr an die aufgewachsenen Leucite zu halten habe. — Mit Rücksicht auf die von Baumhauer zur Erklärung der Winkelwerthe der eingewachsenen Leucite angenommenen Durchkreuzung von Lamellen wird darauf hingewiesen, daß solche in den H.'schen Figuren selbst zu finden seien, obschon ihr Autor sich im Texte gegen das Vorkommen derselben erkläre und schließlich einer eingehenden Untersuchung das letzte Wort überlassen.

Aehnliche Einwürfe und Bemerkungen zu Hirschwalds Arbeiten bringt ein mehrere Jahre darauf erschienenes Referat von Groth[2]). In demselben wird sodann die Angabe H.'s, die Winkel der eingewachsenen Leucite seien genau regulär, als eine gewagte bezeichnet und gegen die dodekaëdrische Zwillingsbildung die secundäre Verwachsung der nach dem vom Rath'schen Gesetze vorhandenen Zwillingslamellen angeführt. Weiterhin wird ausgesagt, der

1) Min. u. petrogr. Mitth. v. Tschermak N. F. 1878. I p. 287.
2) Zeitschr. f. Kryst. u. s. w. B. V 1881 p. 264.

von H. aufgeführte Unterschied im Verhalten der Zwillingslamellen oktaëdrischer Schliffe ein- oder aufgewachsener Leucite beweise weiter nichts, »als daß die Wachsthumsverhältnisse beider Arten von Krystallen verschieden waren, eine bei der Differenz ihrer Bildung weder neue, noch auffallende Thatsache«.

H. hatte ferner auf seine Beobachtung, daß eine gleichmäßig gefärbte Grundmasse mit Zwillingslamellen in oktaëdrischen Schliffen hervortrete, Werth gelegt und aus der Zahl und der Richtung dieser Lamellen auf dodekaëdrische Zwillingsbildung geschlossen.

Groth führt dazu an: »die gleichmäßige Färbung der Grundmasse läßt sich recht gut mit der Erklärung G. vom Rath's vereinbaren, denn wenn der scheinbare Stammkrystall aus drei in den genannten Demarkationslinien« — Projectionen der kürzeren Kanten des Ikositetraëders auf die Oktaëderfläche — »an einander grenzenden Stücken in Zwillingsstellung besteht, so sind diese sämmtlich vom Schliffe in gleicher Neigung gegen die optische Axe getroffen, müssen also im polarisirten Lichte auch gleiche Farbe zeigen«.

Endlich tritt Groth für Baumhauer's Angabe des verschiedenen Verhaltens der P(111) und 4P2(421) Flächen gegen Aetzmittel ein, nicht ohne zum Schluß auf den complicirten Bau der eingewachsenen Leucite, der noch nicht genügend erkannt sei und bei dem wahrscheinlich Verzwillingungen des Stammkrystalls selbst vorkämen, aufmerksam zu machen. Auf letztere lasse geradezu die Beobachtung H.'s, an oktaëdrischen Platten angestellt (vergl. pag. 429.), schließen. Das quadratische System des Leucits gilt Groth für völlig erwiesen. —

Ich erlaube mir zu diesen Bemerkungen Groth's das Folgende anzufügen:

1. Oktaëderschliffe, wie sie Hirschwald in Fig 3 und 4 (Tsch. Mitth. 1878 B. I Tafel II) von ein- und aufgewachsenen Krystallen zeichnet, offenbaren nicht allein verschiedene Wachsthumsverhältnisse, sondern einen ganz verschiedenen Aufbau der Krystalle.

Ich habe zwar die H.'schen Original-Schliffe nicht geprüft, besitze aber aus eingewachsenen Leuciten und von Krystallen der Leucitregen Schliffe, entsprechend der Fig. 3, die einen Aufbau besagter Leucite aus drei Grundkrystallen beweisen, von denen ein jeder Zwillingslamellen eingeschaltet enthält. Aus aufgewachsenen Vesuvleuciten und Krystallen von Frascati kann man Platten herstellen, entsprechend der Fig. 4. Diese Platten beweisen, daß der untersuchte Leucit an der betreffenden Stelle ein Grundkrystall mit Zwillingslamellen ist. — Das Nähere hierüber wolle man im speciellen Theile nachsehen.

2. Die von mir wiedergegebene Ansicht Groth's (erste An-

merkung auf p. 265 seines Referats; vergl. oben) ist in der vorliegenden Fassung nicht zutreffend. — Richtig ist daran, die vermuthete Zusammensetzung des Stammkrystalls aus drei Individuen, das bestätigen meine Beobachtungen vollkommen, richtig ist auch, daß dessen Theile alle gleiche Lage gegen die optische Axe haben und in Folge dessen, einzeln betrachtet, oder etwa in paralleler Stellung, gleiche Farben im polarisirten Lichte zeigen werden, — unmöglich ist aber, daß sie in der Stellung, in welcher sie sich zwillingsmäßig befinden, alle gleiche Färbung auf ein Mal zeigen können, da sie in jener ganz verschiedene Lagen zu den gekreuzten Nicols besitzen. Beim Drehen des Präparats wird demnach ein Feld auslöschen, während die anderen hell bleiben, daher treten schon hier, noch mehr bei der Untersuchung mit einem Gypsblättchen, deutliche Unterschiede der einzelnen Felder hervor.

Die Beobachtung bestätigt dieses Verhalten vollkommen: Schliffe nach dem Oktaëder aus einem dreifach zusammengesetzten Krystall zeigen bei regelmäßigem Bau Dreitheilung, Schliffe derselben Lage aus einem Gebilde, das in der Hauptsache ein Grundkrystall ist, erweisen dessen Masse als von einheitlichem Ansehen.

Wie die Beobachtung lehrt kommt Beides vor: Das, was Hirschwald als allgemein erscheinend annahm und das, was Groth ahnte, was sich aber anders verhält, als er in seinem Referate zur Darstellung brachte.

Nachdem Des-Cloizeaux sich den vom Rath'schen Entdeckungen gegenüber zustimmend verhalten hatte, fanden dieselben von Seiten der Forscher allgemeine Annahme, so von Rosenbusch, Mikrosk. Phys. d. petrogr. wicht. Mineralien 1873 p. 190—196, Zirkel, Die mikrosk. Beschaffenheit der Mineral. und Gesteine 1873 p. 147—155, welche beiden Autoren in ihren genannten Schriften dann namentlich Rücksicht auf die mikroskopische Structur des Leucits nahmen und zu diesem Zwecke der Arbeiten von Kreutz[1]), von Inostranzeff[2]), von Lasaulx[3]) und Fuchs[4]) neben eigenen zum Theil früher angestellten[5]) Untersuchungen, gedachten.

Von besonderem Interesse ist die Schilderung des regelmäßigen Verlaufs der Einschlüsse[6]), wohl auch die der Gruppirung mehrerer

1) Sitzungsber. Wien. Academie LIX 1869. 2. Abth.

2) Mineral. Mitth. von Tscherm. 1872 II 105.

3) N. Jahrb. f. Mineral. 1872 p. 409.

4) N. Jahrb. f. Mineral. 1869 Taf. II fig. 6.

5) Zirkel. Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesell. 1868; N. Jahrb. f. Min. 1870 p. 810.

6) Ueber solche handelt auch beim Abschnitt über Leucit die Arbeit Boricky's Petrog. Studien an Basaltgesteinen Böhmens 1874. Vergl. auch V. Hansel, Mikroskopische Untersuchung der Vesuvlava vom Jahre 1878. Tscherm. Min. Mitth. 1880 II p. 419.

Krystalle zu einem Ganzen, wie solches namentlich von Kreutz und Zirkel abgebildet wird, und es wäre im Hinblick auf die neueren optischen Untersuchungen eine eingehende Prüfung jener Gebilde mit dem Gypsblättchen erwünscht, um zu sehen, ob in besagten Leuciten Feldertheilung vorhanden ist und wie sich die Einschlüsse rücksichtlich derselben verhalten. Daß die feineren Zwillingslamellen durch die Interpositionen nicht gestört werden führt schon Zirkel (l. c. p. 153) nach seiner Untersuchung aus der Zeitschrift der deutschen geol. Gesellschaft 1868 p. 148 an.

Von ferneren Schriften seien dann noch erwähnt das Lehrbuch der Mineralogie von Naumann 1874 p. 389 und die physik. Krystallographie von Groth 1876 p. 323, in denen der Leucit ebenfalls als quadratisch erscheint, endlich die Mineralogie von Quenstedt 3te Aufl. 1877 p. 429—432, die sich den neueren Ansichten gegenüber mit einer gewissen Reserve verhält, da jene noch nicht Alles klar zu stellen vermocht hatten.

Eine abweichende Ansicht über das Krystallsystem des Leucits sprach 1876 Mallard[1]) aus. Auf Grund von Winkelmessungen an Frascati-Krystallen erkannte dieser Forscher eine rhombische Symmetrie der Flächenanlage, während die optische Untersuchung von Würfelschliffen, nach seiner Ansicht, die Symmetrie des monoklinen Systems als für den Leucit geltend zum Ausdruck brachte.

Dagegen erheben Fouqué und Lévy Einsprache[2]) und sind der Ansicht, daß, wollte man beim Leucit nach den häufig vorkommenden Abweichungen der Auslöschungen vom Erforderniß das System bestimmen, das trikline allein übrig bleibe, da mit dem Wesen des monoklinen Systems die von Mallard beobachteten Abweichungen der Auslöschungen in Würfel(Basis)schliffen auch nicht vereinbar seien, wenn man gleichzeitig das Verhalten von Platten parallel der Vertical-Axe in Betracht ziehe.

Einstweilen halten die genannten Forscher noch am quadratischen Systeme fest und schildern (l. c. p. 285) demgemäß das Verhalten von Platten senkrecht zur Axe und das von anderen Schliffen. Dazu möge die Bemerkung gestattet sein, daß Stellen, die sich in Strenge, wie die Basis eines einaxigen Krystalls verhalten, abgesehen von solchen mit Compensationserscheinungen, nicht vorkommen, sondern alle scheinbar senkrecht zur Axe getroffenen Partien, bei starker Vergrößerung und unter Anwendung des Gypsblättchens sich in La-

1) Explication des phénomènes optiques anomaux etc. Paris, Dunod. 1877. Aus Annales des Mines X. 1876.

2) Minéralogie Micrographique 1879 p. 284.

mellensysteme auflösen, die in der Plattenebene keine Gleichheit der Elasticitäten zeigen. — Bei der Angabe der Lage der Zwillingslamellen werden die vom Rath'schen Daten zu Grunde gelegt. Dieß kann nur als eine Annäherung angesehen werden, da nach vom Rath's eigenen, alsbald mitzutheilenden Beobachtungen die Dimensionen der Leucite schwanken und noch nicht festgestellt ist, wie sehr sie sich an den Krystallen der zahlreichen Fundorte, die noch nicht untersucht sind, dem regulären Erforderniß nähern oder davon entfernen.

Vom Standpunkt der geometrischen Eigenschaften discutirt Weisbach 1880[1]) auf Grund von Messungen, die Treptow an einem Leucit vom Albaner Gebirge vorgenommen hatte, die Frage nach dem System und entscheidet sich für das rhombische, wenngleich eine gewisse Tendenz zu monokliner Bildungsweise nicht unerwähnt bleibt.

Das Axenverhältniß wird zu:

$$a : b : c = 0{,}96497 : 1 : 0{,}49365$$

und die Zerfällung der Gestalten geschieht wie folgt

$$2O2(211) = P(111),\ 4\breve{P}2(241),\ 4\bar{P}2(421).$$
$$\infty O(110) = 2\breve{P}\breve{\infty}(021),\ 2\bar{P}\bar{\infty}(201),\ \infty P(110).$$

Ferner würde

$$\infty O\infty(100) = 0P(001),\ \infty\breve{P}\breve{\infty}(010),\ \infty\bar{P}\bar{\infty}(100) \text{ werden.}$$

G. vom Rath[2]) beobachtete endlich an Krystallen der (quadratisch angesehenen) Combination:

$$P(111),\ 2P\infty(201),\ 4P2(421),\ \infty P(110),\ \infty P\infty(100),\ 0P(001),$$

die wie die reguläre Bildung

$$\infty O(110),\ 2O2(211),\ \infty O\infty(100)$$

erscheint, Winkelverhältnisse, welche nicht mit dem früheren Axenverhältniß

$$a : c = 1 : 0{,}52637$$

vereinbar sind, sondern

$$a : c = 1 : 0{,}5137$$

erfordern.

---

1) A. Weisbach. Zur Kenntniß des Leucits. N. Jahrb. f. Mineral. 1880 I. p. 143—150.

2) G. von Rath. Sitzungsberichte der niederrh. Gesellschaft f. Natur- u. Heilkunde vom 4. Juni 1883.



Hiermit tritt bei constantem regulärem Formentypus ein Schwanken der Winkelwerthe und der Symmetrie der Flächenanlage zu Tage, das nicht den Gedanken aufkommen läßt, es sei das System des Leucits entgültig bestimmt. —

Tschermak führt 1884 den Leucit als unter die mimetischen Krystalle gehörig auf[1]). Die scheinbar reguläre Form kommt danach zu Stande, daß Theile niederer Symmetrie zu Zwillingscomplexen höherer Art zusammentreten, die dann in ihren Winkeln der betreffenden regulären Form fast genau entsprechen. — Es wird für die Individuen des Leucits das quadratische System nebst Zwillingsbildung nach $2P\infty$ (201) angenommen und der Ansichten von Weisbach und Mallard daneben gedacht. — Unter den Figuren tritt namentlich ein recht deutlicher Würfelschliff hervor.

In diesen Nachrichten vom 3. Mai 1884 zeigte ich, daß durch Erwärmen der Leucit isotrop wird und nach dem Erkalten sein Zwillingsgefüge z. Th. alterirt erscheint. Danach war anzunehmen, das betreffende Mineral habe sich bei der hohen Temperatur seiner Consolidirung als regulärer Körper gebildet und sein jetziger Zustand sei eine Folge geänderter Molekularanordnung, die beim Sinken der Temperatur Platz gegriffen hätte.

Diese Annahme würde allen Erscheinungen, die das Mineral darbietet: dem regulären Formentypus, den schwankenden Winkelverhältnissen und dem optischen Befund gerecht werden und nur nicht mit der Anschauung stimmen, die Bildung sei aufzufassen als eine aus Theilen niederer Symmetrie ursprünglich erfolgte.

Standen noch im Widerspruch zu meinen Angaben frühere Versuche des Herrn Merian[2]), so haben neuere durch Herrn Penfield[3]) ausgeführte meine Angaben bestätigt, sofern nur genügend dünne Platten genommen wurden. Bei dickeren Platten (1 Mm und darüber) waren die Erscheinungen nicht deutlich zu sehen und liegt dieß, nach meiner Ansicht, offenbar z. Th. daran, daß die angewandte Flamme, trotz ihrer hohen Temperatur, zu schmal war, um den Krystall in seiner Umgebung gegen Wärmeverlust zu schützen. Ich habe wenigstens mit meinem Apparat auch Schliffe von 1 Mm Dicke vollkommen isotrop gemacht. —

Nicht unerwähnt bleibe schließlich die wichtige Arbeit von Kreutz[4]),

1) Tschermak. Lehrbuch der Mineralogie 1884 p. 91 u. 92, p. 195 und p. 448—449.

2) Merian. N. Jahrb. für Mineralogie I. 1884 p. 193—195.

3) Penfield. N. Jahrb. f. Min. II. 1884 pag. 224.

4) Ueber Vesuvlaven von 1881 u. 1883. Mineral. und petrop. Mitth. v. Tschermak N. F. 1884 B. VI. p. 133 u. f.

die mir während des Drucks zukam. In derselben wird namentlich der Zwillingsbau des Leucits aus mehreren polysynthetischen Individuen, von dem ich auch in den folgenden Zeilen zu reden beabsichtige, erkannt. Ferner interessirt, neben vielen anderen Detailbemerkungen besonders die, daß die Einschlüsse im Leucit über die Zwillingsgrenzen weglaufen (vergl. pag. 433). Hieraus ist die secundäre Entstehung der optischen Erscheinungen zu erschließen (vergl. Rosenbusch, Massige Gesteine 1877 p. 142, wegen der Deutung in einem ähnlichen Falle). Hätte der Verfasser auch orientirte Schliffe studirt, so würde er sicher den jetzigen Zustand der Leucite, von dem die folgenden Blätter Kunde geben, erkannt haben.

Wie man sich überzeugen wird, lag zu dieser Erkenntniß sehr Vieles bereits in den Mittheilungen früherer Forscher vor, entbehrte aber des Zusammenfassens unter einen Gesichtspunkt.

II. Optische Untersuchungen.

A. Beobachtungsinstrument und Beobachtungsmaterial.

Zu den optischen Untersuchungen wandte ich ein Instrument an, welches unter Benutzung des Bertrand'schen Princips nach meinen Angaben von Voigt und Hochgesang dahier gebaut worden ist und sich seiner Einrichtung nach für feinere mineralogisch-petrographische Untersuchungen empfiehlt. Ich gebe im Nachfolgenden eine kurze Beschreibung dieses Instrumentes.

Auf einem schweren Hufeisenfuß erhebt sich das Instrument, dessen Beleuchtungsspiegel, drehbarer Tisch und Mikroskopröhre, an einem verticalen Ständer befestigt und mit demselben zum Umlegen eingerichtet sind. Das Mikroskop, welches nach dem Princip gebaut ist, daß auf einem wohl centrirten drehbaren Tisch ein Object durch Schlitten in den Mittelpunct der Drehung gebracht und durch ein Mikroskop, das mit seinem Objectiv ebenfalls feinstens centrirt werden kann, besehen wird, weicht in seiner Construction von den neueren Instrumenten ab, wie sie Nachet in Paris unter Benutzung der Bertrand'schen Angaben construirt und wie sie z. B. in Fouqué et Lévy, Minéralogie micrographique 1879 p. 27, L. Bourgeois, Réproduction artificielle des minéraux 1884 Tafel III abgebildet sind.

Diese Instrumente haben den Vortheil, daß, da Objectiv und Tisch sich zusammen bewegen, kein Centriren des ersteren nöthig wird. Bei dem neuen Instrumente ist dieß allerdings erforderlich, wird aber durch zwei am Ende des Tubus angebrachte, sehr solid gearbeitete Schraubenbewegungen in vollkommener, sicherer und rascher

Weise bewerkstelligt, so daß der durch diese Mühe aufkommende Nachtheil gegen die sehr erheblichen Vortheile nicht in Betracht kommt.

Diese letzteren bestehen darin, daß man den Tubus geschlossen gebrauchen kann und seine inneren Theile nicht, wie bei der Nachet'schen Construction, verstauben, ferner, daß man ein in den Tubus einzuschiebendes (oder auch, da es bei Nachet (cf. Bourgeois l. c.) mit einem Arm und Gelenk am Tubus befestigt ist, einzuschlagendes) Nicol immer wieder leicht entfernen kann, was bei der Nachet'schen Vorrichtung nicht geht, sobald als der Ständer, der das Objectiv trägt, durch Tischdrehung zu dem Ständer, der das Ocular hält, in Opposition steht. Man kann diesem Mangel zwar dadurch vorbeugen, daß man das Nicol, wie bei Fouqué und Lévy gezeichnet, auf das Ocular aufsetzt, verzichtet aber damit auf die Vortheile, die ein einzuschiebendes Nicol gewährt.

Fernerhin erlaubt die Nachet'sche Einrichtung nicht, ohne das Instrument übermäßig zu vergrößern, den Tubus, an dem das Objectiv befestigt wird, stark zu heben und so die Anwendung sehr schwacher Objective zu gestatten, die die Uebersicht complicirt gebauter, größerer Präparate ermöglichen. Weiter läßt sich nicht ohne Mühe bei der Nachet'schen Disposition eine beträchtliche orientirte Verschiebung des Oculars allein gegen das Objectiv vornehmen, die zur Auswerthung der Leistungsfähigkeit der Systeme von Vortheil, zur Herstellung eines scharfen Interferenzbildes bei der Benutzung des Instrumentes zur Darstellung des Axenaustritts aber unbedingt nothwendig ist.

Endlich bietet bei Untersuchungen letztgenannter Art die Möglichkeit das Objectiv zu centriren noch den sehr erheblichen Vortheil, daß man, nachdem die Bertrand'sche Linse eingeschoben ist, etwaige Fehler, die dadurch zu Stande kommen, daß die optischen Axen von Objectiv, Bertrand'scher Linse und Ocular nicht streng zusammenfallen, verbessern kann.

Aus allen diesen Gründen habe ich nicht die Nachet'sche, sondern die vorher kurz geschilderte Disposition der Theile an dem neuen Mikroskop gewählt.

Ueber die einzelnen Theile des Mikroskops ist das Folgende zu bemerken.

Der drehbare Tisch ist mit Theilung versehen, die vermöge eines Nonius Minuten ablesen läßt. Der Tisch kann in seiner Bewegung arretirt und durch ein Mikrometerwerk bewegt werden. Auf dem Tisch befindet sich eine Schlittenbewegung, welche die verschiedenen Theile eines Objects in den Mittelpunkt der Drehung zu bringen

gestattet. Die Schlittenbewegungen lassen sich an mit Trommeln versehenen Köpfen der Schrauben messen; man kann direct $^1/_{100}$ Mm. ablesen[1]) und kleinere Werthe schätzen. Unabhängig von der Bewegung des Tisches ist in letzterem ein Nicol eingefügt, das durch Trieb orientirt auf- und ab gestellt werden kann. Auf demselben befindet sich eine Linse von passender Brennweite fest angebracht, und es können andere Linsensysteme zur Erzeugung stärker convergirenden Lichts aufgesetzt werden.

Der Mikroskoptubus kann völlig geschlossen, durch Trieb auf- und abgestellt und mit einer Mikrometerschraube, die ihrerseits mit Theilung versehen ist, fein eingestellt werden (Steigung der Mikrometerschraube = $^1/_2$ Mm., Eintheilung des Schraubenkopfes in 250 Theile: Werth eines Theilstrichs = $^1/_{500}$ Mm.).

Unten am Tubus werden die Objective angeschraubt oder ein Revolver angebracht, an den die Objective kommen. Die Objective können vermittelst einer am Ende des Tubus angebrachten Vorrichtung durch zwei senkrecht zu einander wirkende Schrauben leicht und sicher centrirt werden. — Ueber das jeweils angeschraubte Objectiv können Quarzplatte, Viertelundulationsglimmerplatte, Gypsblättchen vom Roth I. Ordnung in passenden Fassungen (Schlitten, auf denen die Orientirung, wenn nöthig, angegeben ist) eingeschoben werden.

In der Mitte des Tubus ist eine Triebvorrichtung angebracht, die nach außen in einen Knopf mündet. Vermittelst desselben kann man im Innern des Tubus eine Vorrichtung orientirt heben oder senken und in dieselbe sowohl ein Nicol mit geraden Endflächen, als auch dieselbe Vorrichtung mit Bertrand'scher Linse oder eine Bertrand'sche Linse[2]) allein einschieben. Die Bertrand'schen Linsen, von denen mehrere mit verschiedenen Brennweiten vorhanden sind, ebenso das Nicol mit geraden Endflächen befinden sich an den Enden von rechtwinkelig zu

1) Steighöhe der Schraube = $^1/_2$ Mm, Theilung der Trommel in 50 Theile.

2) An den gewöhnlichen Mikroskopen gleitet der Tubus in einer am Stativ befestigten Röhre und ist nicht, wie hier, vorn ganz frei. Um auch an solchen Instrumenten die Bertrand'sche Linse einschieben und rasch wieder wegnehmen zu können, lasse ich das am Tubusende befindliche Ansatzstück, an welches das Objectiv kommt, etwas größer als gewöhnlich anfertigen. In den Schlitz desselben wird dann die Bertrand'sche Linse auf einem Schlitten befindlich eingeschoben, und die Höhe des Ansatzstückes läßt es zu, daß die betreffende Linse vertical noch etwas auf- und abbewegt werden kann, um die Feineinstellung zu bewirken. Das Instrument ist dann um auf Axenaustritt prüfen zu können mit oberem Nicol, Objectiv 9 und Ocular 2 versehen, auf dem unteren Nicol befinden sich die Condensorlinsen und die ganze Vorrichtung wirkt so vollkommen, daß man in den Dünnschliffpräparaten die Axenbilder sehr schön und groß sehen kann.

Planschlitten stehenden Tuben angebracht. Nach Einschaltung des Nicols oder der Bertrand'schen Linse kann eine am Tubus deßhalb angebrachte seitliche Oeffnung durch ein Fenster dicht verschlossen werden. In der oberen Partie der Hauptröhre gleitet, orientirt verstellbar, die Röhre, die das Ocular trägt. Will man nicht mit eingeschobenem Nicol arbeiten, so wird auf das Ocular ein Nicol aufgesetzt. Diese Methode empfiehlt sich bei Untersuchungen mit dem Gypsblättchen besonders deßhalb, weil ein über dem Objectiv eingeschaltetes Blättchen keine so gute Wirkung hat, als wenn es zwischen Nicol und Ocular auf letzteres gelegt wird.

1. Benutzung des Instrumentes als Mikroskop mit Polarisationsvorrichtung. Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung. Untersuchungen bei Anwendung empfindlicher Farbentöne.

Als Polarisationsvorrichtungen dienen der verstellbare untere Nicol und ein in den Tubus einzuschiebendes Prisma mit geraden Endflächen, was vortrefflich gearbeitet und justirt ist, so daß ein sehr großes, reines und bei gekreuzten Nicols sehr dunkles Gesichtsfeld entsteht, oder ein auf das Ocular aufzusetzendes Prisma, welches dann beweglich ist, aber kein so großes Gesichtsfeld gewährt.

An Linsen sind vorhanden: ein sehr schwaches System No. 0 von Winkel[1]), die Systeme 1, 2, 4, 5, 7, 9 von Hartnack, das Trockensystem 10 von Winkel.

Von Ocularen sind No. 1 und 4 mit Mikrometer, 2 und 3 mit Fadenkreuz dem Instrumente beigegeben.

Zur völligen Auswerthung der Leistungen der Objective kommt das orientirt auf- und abstellbare Ocular in Betracht.

Die Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung geschieht in den Fällen, in welchen in der Plattenebene die Elasticitätsrichtungen ungleich sind, durch Steigen und Fallen der Farbe eines Gypsblättchens vom Roth I. Ordnung. — Die Untersuchung im empfindlichen Farbenton eines solchen wird in bekannter Weise bewirkt und in allen Fällen das Gypsblättchen am besten auf das Ocular, direct unter den Analysator, gelegt. — Die senkrecht zur optischen Axe geschnittene 3,75 Mm. dicke Quarzplatte wird zur Erzeugung ihrer Töne über dem Objectiv eingeschoben.

2. Benutzung des Instrumentes als Apparat zur Darstellung des Axenaustritts in Dünnschliffen.

---

1) Da der Tubus so hoch gehoben werden kann, daß der Abstand von seinem unteren Ende bis zum Tisch 90 Mm. beträgt, so läßt sich ein sehr schwaches System mit großer Brennweite anschrauben.

Das untere Nicol wird mit den nöthigen Condensorlinsen versehen. An den Tubus wird entweder System 9 Hartnack oder System 10 Winkel angeschraubt. Als Ocular dient No. 1 mit Mikrometer. Von dên Bertrand'schen Linsen sind achromatische Exemplare von 20, 25, 28, 32 Mm. Focus vorhanden.

Nach Einschaltung einer solchen kann der Tubus mit Objectiv, Bertrand'scher Linse, Ocular und Nicol gegen das Präparat bewegt werden, ferner kann eine Bewegung der Bertrand'schen Linse gegen das Objectiv allein und mit Ocular und Nicol stattfinden; letztere sind aber auch gegen Bertrand'sche Linse und Objectiv beweglich. Dieses ist centrirbar.

Durch alle diese Bewegungen kann die Erzeugung und Feineinstellung eines Axenbildes in einer Weise erreicht werden, wie sie kein anderes Instrument zur Zeit gestattet.

Zur Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung in Platten senkrecht zur optischen Axe oder zur I. Mittellinie bei kleinem Axenwinkel wird über dem Objectiv eine Viertelundulationsglimmerplatte eingeschoben.

Zum Messen der Axenwinkel dient ein Oelgefäß, was auf den Tisch des Mikroskops geschraubt werden kann und im Wesentlichen die Einrichtung hat, die ihm Des-Cloizeaux bei seinem Polarisationsmikroskop gab.

3. Benutzung des Instrumentes als Stauroskop. (Mikrostauroskop.)

Das wie unter No. 1 gezeigt hergerichtete Instrument kann bereits in bekannter Weise obigem Zwecke dienen, da namentlich bei eingeschobenem Nicol eine sehr vollkommene Verdunkelung des Gesichtsfeldes statt hat.

Ist das Instrument mit Quarzplatte oder Gypsblättchen versehen, so ist es ebenfalls, wie bekannt, zu genanntem Zwecke verwendbar.

In diesen und den folgenden Fällen unterstützt der fein eingetheilte Tisch die Schärfe der Beobachtung. Wird das Präparat auf dem Tische geklemmt und derselbe, nachdem er eine gewünschte Stellung eingenommen (etwa die Auslöschungslage einer Krystallpartie erreicht) hat, seinerseits arretirt, so kann man durch Bewegung der Schlitten diese Partie in verschiedenen Theilen untersuchen und sehen, ob die optischen Eigenschaften dieselben bleiben.

Erst hierdurch erhält man wichtige Aufschlüsse über das Schwanken jener Eigenschaften, zumal bei den optisch anomalen Krystallen.

Zu feineren Untersuchungen ist dann noch bei Anwendung eines gewöhnlichen Polarisators ein Calderon'sches Stauroskopocular vorhanden und ein Bertrand'sches mit der Doppelquarzplatte. — Letz-



teres giebt nach meinen Erfahrungen die besten Resultate und ist sehr empfindlich [1]).

Zum Justiren des Instruments verfährt man wie folgt:

Man arretire den Kreis so, daß 0° desselben auf 0° des Nonius kommt, spanne von 0° auf 180° zwei feine, einander parallele Fäden und prüfe die Oculare, ob die Fadenkreuze mit ihrem einen Faden zwischen erstere fallen. Ist dies nicht der Fall, so sind die Fadenkreuze darauf hin zu corrigiren. Hiernach verfährt man in gleicher Weise mit der Trennungsfuge der Calderon'schen Platte im Ocular und mit dem durch die 4 Quarzplatten gebildeten Fadenkreuz im Bertrand'schen Ocular.

Nunmehr setze man entweder das Calderon'sche Ocular und ein gewöhnliches Objectiv ein und stelle oberes und unteres Nicol so, daß die Calderon'sche Vorrichtung auf beiden Hälften gleich beschattet ist, dann werden die Polarisationsebenen der Nicols dem Fadenkreuz entsprechen (vergl. Liebisch im Bericht der Berl. Gewerbeausstellung von 1879. Berlin 1880 p. 347); oder, man schiebe das Zwillingsnicol an der Stelle des Polarisators ein und stelle dessen Fuge dem einen Faden des Fadenkreuzes parallel. Alsdann setze man den Analysator auf und stelle auf gleiche Beschattung beider Hälften des Zwillingsnicols ein. Wird nun die Stellung des Analysators bemerkt, derselbe abgehoben, das Bertrand'sche Ocular eingeschaltet und der Analysator wieder in die eben erhaltene Stellung gebracht, so steht der Polarisator zum Analysator dann gekreuzt, wenn die 4 Platten des Bertrand'schen Oculars gleiche Töne zeigen, und die Polarisationsebenen beider Nicols coincidiren alsdann auch mit dem Fadenkreuz. —

Daß Letzteres in Strenge nicht zu einer genauen Messung erforder-

---

1) Nach dem Vorgang von Laspeyres beim gewöhnlichen Stauroskop habe ich auch beim Mikroskop den Schmidt und Haensch'schen Zwillingsnicol als Analysator benutzt. Genannte Herren verwenden, wie bekannt, hierzu ein Nicol mit schiefer Endfläche. Man erreicht größere Vortheile, wenn man sich eines Nicols mit geraden Endflächen bedient und hieraus ein Zwillingsnicol bildet.

Dasselbe trägt auf seiner Oberseite ein sehr dünnes Deckglas und wird mit demselben dem Präparat möglichst genähert. Letzteres muß auf einem möglichst dünnen Objectträger liegen, auf daß Präparat und Zwillingsgrenze im Analysator zusammen gesehen werden.

In Folge dieses Umstandes gelingen hier die stauroskopischen Beobachtungen nur bei mäßiger Vergrößerung, geben aber dann recht gute Resultate und es bleibt ferneren Untersuchungen vorbehalten zu entscheiden, in welcher Weise die betreffende Vorrichtung am zweckmäßigsten auch bei stärkerer Vergrößerung verwendbar zu machen sein wird.

lich ist, ist bekannt und auch, wie man den entstehenden Fehler durch Umlegen der Platte eliminirt.

Ob aber jene Stellung, wie zu wünschen, sehr annähernd erreicht ist, erfährt man eben durch Ausführung letztgenannter Operation vermittelst einer geeigneten Platte.

Was das Beobachtungsmaterial anlangt, so lagen vor:

1. Krystalle aus dem Albanergebirge und solche ebendaher mit der speciellen Fundortsangabe Frascati. Dieselben sind in den besten Exemplaren licht weingelb von Farbe und stellen scheinbar 2O2 (211) dar. Die Oberfläche ist mit einem zarten Matt bedeckt. — Zwillingslamellen treten nicht zu häufig in deutlichem Verlaufe an der Oberfläche auf. Sie zeigen sich daselbst erst mehr, wenn die Krystalle etwas zersetzt sind. Ein Mal konnte ich aber sehr deutlich eine vollkommen dodekaëdrische Zwillingsstreifung auch oberflächlich beobachten. — Die Krystalle machen durchaus den Eindruck von Gebilden im Ganzen einheitlicher Art, in die Zwillingslamellen eingeschaltet sind, selten scheinen Sprünge anzudeuten, es bestünde das Gebilde aus mehreren Individuen.

2. Krystalle vom Vesuv. Leucitregen von 1855.

Die Krystalle sind von derselben Form wie die vorigen, aber im Ansehen heller und glasartiger. Sehen sie trübe aus, so kommt dieß von Sprüngen her, die gern parallel den Ebenen des scheinbaren Würfels und des Oktaëders gehen. Zersetzung tritt nach diesen Sprüngen ein, und die Krystalle erscheinen in der Richtung der Sprünge weißlich. An den Krystallen haften Lavatheile an. — Sie sehen zum Theil scheinbar einheitlich, zum Theil als aus mehreren Individuen zusammengesetzt aus.

An dieses Vorkommen möchte ich Krystalle anschließen, die mit der Bezeichnung »Vesuv«, aber ohne Angabe des Jahres aus der G. Leonhard'schen Sammlung stammen. Sie zeigen äußerlich etwa dieselben Merkmale wie die Leucite von 1855.

3. Krystalle vom Vesuv. Eruption vom 22. Juni 1847.

Die Krystalle sehen wie die von 1855 aus, wenn man sich dieselben zerborstener und an Ecken und Kanten zugerundet denkt.

4. Krystalle von Bosco Reale und von Mauro am Vesuv.

Die bekannten grauen, matten, sehr regelmäßigen Gebilde, in alter Lava eingewachsen, liegen vor.

5. Aufgewachsene Krystalle vom Vesuv.

Vorkommen auf Kalkstein und mit Feldspath zusammen. Mehr nach der Erscheinungsweise des quadratischen Systems gebildet. —

Die äußere Zwillingsstreifung hat G. vom Rath so eingehend studirt, daß auf Grund des mir vorliegenden Materials nichts hinzuzufügen ist, als daß an einem kleinen Krystall der scheinbaren Combination 2O2 (211), ∞O (110) auf mehreren Flächen letzterer Gestalt ein zarter Knick parallel der kurzen Diagonale wahrgenommen wurde.

6. Krystalle aus Leucittephrit von der Rocca Monfina bei Neapel.

Große, matte, äußerlich zersetzte und zersprungene, scheinbare 2O2 (211).

7. Krystalle aus dem Leucitophyr von Rieden, Laacher See. Kleine, sehr regelmäßige Krystalle der scheinbaren Form 2O2 (211).

Diese Vorkommen standen mir in solcher Menge zu Gebote, daß daraus jeweils die nöthige Anzahl Dünnschliffe[1]) gefertigt werden konnte. Im Ganzen kamen deren 350 zur Untersuchung. Abgesehen davon wurde noch eine Anzahl von Gesteinen geprüft, in denen der Leucit eine Rolle spielt und zum Theil in größeren Krystallen vorkommt. Hierüber wird am Schlusse der Untersuchung der orientirten Dünnschliffe berichtet werden. Von den Leuciten von 1872 stand mir leider nichts zur Verfügung.

B. Untersuchung der einzelnen Vorkommen.

Bei der optischen Prüfung der Leucite tritt eine Schwierigkeit zu Tage, die sich wohl bei keinem anderen Mineral in ähnlicher Weise bis jetzt gezeigt hat.

Man hat nämlich fast gar keinen Anhalt an der Form, um von derselben geleitet zu der Kenntniß der optischen Eigenschaften voran zu schreiten. Wären alle Krystalle, die zur Untersuchung kommen, geometrisch wohl gebildet und meßbar, so hätte die Orientirung keine Schwierigkeiten; in dem Zustande, in welchem sich die meisten Leucitkrystalle befinden, muß man völlig darauf verzichten jene benutzen zu können. Eine fernere Schwierigkeit bietet sich dadurch dar, daß man gar vielen Krystallen äußerlich nicht ansehen kann, ob sie in der Hauptsache aus einem Individuum mit eingeschalteten Zwillingslamellen bestehen oder selbst aus verschiedenen Theilen zusammengesetzt sich darstellen.

Da beide Arten der Bildung vorkommen und von ihnen, als den

---

1) Dieselben fertigte zum größten Theil in bekannter Meisterschaft Herr G. Voigt dahier. Ich sage ihm hierfür besten Dank und zolle seinem Talent, aus einem so zersprungenen Material so wohl erhaltene und dünne Schliffe herzustellen, alle Anerkennung.

Extremen, verbindende Uebergänge zu einander statt finden, so ist das Studium deßhalb schon nicht leicht und wird noch erschwert durch den Umstand, daß diese verbindenden Uebergänge meist einen sehr verwickelten Aufbau zeigen.

Ich sehe in diesen Verhältnissen den Grund, warum bis jetzt, trotz so zahlreicher Bemühungen, die Structur der Leucitkrystalle nicht aufgeklärt worden ist und werde, in dem Bestreben einen Beitrag zu der Kenntniß dieses ausgezeichneten Minerals zu liefern, meine Darstellung so einrichten, daß ich zuerst kurz das Resultat meiner Untersuchungen angeben und danach durch die Schilderung der Präparate den Beweis für die Richtigkeit meiner Anschauung zu führen versuchen werde.

Ich betrachte den Leucit in dem Zustande, in dem er sich jetzt darbietet, als rhombisch, aber mit großer Annäherung an das quadratische und reguläre System. Jenem Systeme werden viele Messungen besserer Krystalle, die vom Rath, Hirschwald, Mallard und Weisbach vorgenommen haben, gerecht. Es gelingt aber nicht von der geometrischen Seite allein das System entgültig festzustellen.

Die Gründe, welche mich bewegen den Leucit als nicht quadratisch anzusehen, sind:

1. Die Zwillingsbildung verläuft entschieden nach allen Flächen des scheinbaren $\infty O (110)$ und zwar mit besonderer Häufigkeit nach den Flächen jener Gestalt, welche, quadratisch betrachtet, zu ∞P (110) wird.

2. Optisch läßt sich in den sämmtlichen von mir untersuchten Präparaten keine Fläche nachweisen, die die Rólle einer Basis im quadratischen Systeme übernehmen könnte: es bleibt keine Fläche dunkel zwischen gekreuzten Nicols, bei einer vollen Horizontaldrehung des Präparats [1]).

Die Krystalle bestehen nun entweder jeweils aus einem Grundkrystalle mit eingeschalteten Zwillingslamellen, dann ist die eine Würfelfläche Basis, die anderen vorderes und seitliches Pinakoid, oder die Krystalle zeigen auf jeder angeschliffenen Würfelfläche solche Eigenschaften, daß man alle als Basisflächen ansehen muß. Dann bestehen die Krystalle aus drei sich durchkreuzenden Individuen, bei denen jeweils die I. Mittellinie des sehr kleinen Axenwinkels mit einer der früheren a-Axen des regulären Systems zusammen fällt.

---

1) Stellen in Würfelplatten, die dieß scheinbar doch zeigen, bieten dieses Verhalten entweder durch Compensation (rechtwinkelige Kreuzung zweiaxiger Lamellen) dar oder täuschen durch feinste Zwillingsbildung, in welchem Falle man bei stärker Vergrößerung das Richtige erkennt.

Für die erstere Ausbildungsweise, die schön zu Frascati, Vesuv (aufgewachsene Krystalle), selten auch zu Bosco Reale und Rieden vorkommt, ist mehr der vom regulären Typus abweichende zu erwarten: in der That ist das auch der Fall, wie die Messungen G. vom Rath's, Mallard's und Weisbach's beweisen.

Für die letztere Ausbildungsweise, die schön an den Vesuvleuciten von 1855 und 1847, an denen von Bosco Reale und der Rocca monfina bei Neapel zu beobachten ist und die auch zu Rieden vorkommt, muß mehr ein Gebilde erwartet werden, welches dem regulären Typus nahe steht. Dieses weisen denn auch die Untersuchungen Hessenberg's, Hirschwald's und z. Th. auch G. vom Rath's nach.

Zwischen beiden Ausbildungsweisen giebt es nun, wie schon erwähnt, verbindende Mittelglieder: ein Hauptkrystall herrscht nicht allein, wie im ersten Typus, es machen sich daneben, mehr oder weniger untergeordnet, auch noch die beiden anderen geltend. Die Structur wird dann meist scheinbar sehr regellos. Hierfür liefern alle Leucitvorkommen Beispiele. Am schönsten ist mir dieser Fall in den Leuciten von Frascati vorgekommen.

Stellen wir den allgemeinen Fall in den Vordergrund, so besteht das scheinbare Ikositetraëder aus drei sich durchkreuzenden Grundkrystallen rhombischer Art mit Zwillingslamellen nach sämmtlichen Flächen des jeweils zugehörigen scheinbaren Dodekaëders. Indem ein oder zwei Grundkrystalle zurücktreten und schließlich ganz verschwinden, entstehen Uebergänge, die zuletzt in den Fall verlaufen, in welchem nur ein Grundkrystall allein vorkommt. Welche von diesen Bildungen im speciellen Falle vorliegt, läßt sich, wie erwähnt, äußerlich nicht erkennen, und auch die Formenausbildung, die bisweilen eine Tendenz zu quadratischem Habitus zeigt, ist durchaus trügerisch und zur sicheren Erkennung nicht zu verwerthen.

Mit Rücksicht auf die optischen Verhältnisse finde dann noch die allgemeine Bemerkung hier Platz, daß an den besten Präparaten zu erkennen ist, daß die Auslöschungsrichtungen, bezogen auf die krystallographischen Elemente, den Anforderungen des rhombischen Systems entsprechen. Zahlreiche Abweichungen kommen indessen auch vor. Ich fasse sie im Hinblick auf die Art der Entstehung der Leucite als Anomalien auf und werde, um dieß darzuthun, zeigen, daß z. B. in ein und derselben Zwillingslamelle, woselbst die Auslöschungsrichtungen constant bleiben sollten, dieselben nach dem Ort erheblich schwanken. Wäre man genöthigt alle Differenzen, die z. B. schon Mallard zum Theil beobachtete, als wesentlich anzusehen, so müßte man, wie schon erwähnt und wie Fouqué und Lévy mit Recht her-

vorheben, unser Mineral nicht dem monoklinen, sondern dem triklinen System zuweisen.

a. Untersuchung solcher Gebilde, die aus einem Grundkrystalle bestehen, in den Zwillingslamellen eingelagert sind.

1. Allgemeine Bestimmung und Orientirung.

Die Erkenntniß, daß ein Krystall zu dieser Gruppe gehört, ist oftmals ohne Schliff nur schwer zu erlangen, und manch' Mal kann man erst durch mehrere Schliffe erfahren, ob man das Gewünschte in Händen habe.

Die Methode der Aetzfiguren könnte da vielleicht mit Vortheil herangezogen werden, indessen lehren die Baumhauer'schen Versuche, daß wegen der oftmals sehr ausgeprägten Zwillingsbildung die Deutung des Befundes gar nicht einfach ist und man auch nach dem Anätzen noch im Zweifel bleiben kann. Ich habe daher diese Methode hier nicht angewandt.

Sicherer ist die optische Prüfung, und zu dem Ende schneide ich an einem scheinbaren Ikositetraëder drei Platten ab, die drei einander nicht parallel gerichteten, oktaëdrischen Ecken entnommen sind und an diesen Ecken durch die in denselben zusammenstoßenden vier Flächen gehen. Lehrt die optische Untersuchung, daß diese 3 Platten sich genau gleich verhalten, so gehört der Krystall der in Rede stehenden Abtheilung nicht an. Verhalten sich zwei mit energischerer Doppelbrechung verschieden von einer dritten, sehr verzwillingten, schwächer doppelbrechenden, so ist der Krystall in die zu betrachtende Abtheilung zu rechnen. Wenn aber zwei sehr verzwillingte, schwächer doppelbrechende Platten vorhanden sind und dazu eine dritte, verzwillingte, stärker doppelbrechende kommt, so bildet der Krystall ein Mittelglied zwischen der Abtheilung, bestehend aus einem Grundkrystall und der, in welcher drei Grundkrystalle den Aufbau bewirken; es sind dann von den drei Individuen, zumal an der untersuchten Seite des Krystalls, zwei vorherrschend entwickelt und vom dritten vielleicht nur Spuren vorhanden.

Ist danach ein Krystall gefunden, dessen eine scheinbare Würfelfläche mit starker Lamellenbildung (nach den Seiten des Quadrats) und schwächerer Doppelbrechung sich von den zwei anderen, die intensiver auf das Licht wirken und zum Theil weniger Lamellen aufweisen, unterscheidet, so liegt der gewünschte Krystall in richtiger Stellung vor. Diese Stellung kann man entweder controliren, oder auch selbständig feststellen durch Herstellung von drei Dodekaëderschliffen und zwar Flächen, die einer Zone entstammen, entnommen.

Da wir ja den Leucit zwar als rhombisch, aber doch, wie des

Näheren erwiesen werden soll, mit großer Annäherung an das quadratische System anzusehen haben und ihn für diese Demonstration gradezu noch als quadratisch betrachten können, so ist klar, daß drei Flächen des scheinbaren ∞O (110), die in einer Zone liegen, niemals der Pyramide 2 P∞(201) zusammen angehören können, sondern eine immer dem Prisma ∞P(110) angehören muß. In Folge dieses Umstandes wird auch eine nach letzterer Fläche geschnittene Platte, die im Aussehen wie ein Rhombus gestaltet ist, immer anders auf den Ton des in üblicher Weise eingeschalteten Gypsblättchens (vergl. Fig. 1; Axe der kleineren Elasticität *MM'* von unten links nach oben rechts gehend) wirken, wie Platten von gleichem Ansehen, parallel 2 P∞(201). Erstere wird, wenn ihre lange Diagonale mit *MM'* coincidirt, gelb werden, letztere zeigen bei gleicher Stellung eine blaue Farbe, alles selbstverständlich nur für die Masse des Grundkrystalls geltend.

Daß dieß bei der Platte parallel ∞P(110) so sein muß leuchtet ein, da die kurze Diagonale hier parallel der Axe *c* geht und diese kleinste Elasticitätsaxe ist, die längere Diagonale der Schliffläche muß also jedenfalls größere Elasticitätsaxe werden.

Für die beiden anderen Platten ist es, sowie es sich zeigt, ebenfalls klar, da bei streng quadratischer Auffassung eine Platte aus optisch positivem Leucit parallel 2 P∞(201), in ihrer kürzeren Diagonale deßhalb der größeren Elasticitätsaxenrichtung entspricht, weil dieselbe senkrecht zur optischen Axe ist.

Im Falle aber, der nun vorliegt, nämlich eines zweiaxigen, dem einaxigen genäherten Systems, genügt auch die Platte, deren kurze Diagonale parallel der Axe der größten Elasticität geht und deren lange einer Richtung entspricht, die zwischen mittlerer und kleinster Elasticität liegt (vergl. Fig. 2), diesem Erforderniß; denn letztere Diagonale entspricht jedenfalls einer Axe kleinerer Elasticität als die kurze Diagonale.

Nur der Fall der Fläche, die mit der kurzen Diagonale parallel der Axe mittlerer Elasticität läuft und deren lange Diagonale die Axen größter und kleinster Elasticität verbindet, könnte zweifelhaft bleiben und es sich fragen, ob auch hier wirklich kurze Diagonale größere, lange dagegen kleinere Elasticitätsaxe wäre. Nun wird aber ein zweiaxiges System, das positive Doppelbrechung um die erste Mittellinie zeigt und auf der Grenze zum einaxigen steht, dadurch ausgezeichnet sein müssen, daß die Axen mittlerer und größter Elasticität sich einander sehr nähern. Daher werden die relativen Elasticitätsverhältnisse in der betreffenden Platte, unter Berücksichtigung ihrer Neigung zur Axe, wie in dem Falle sein, in welchem kurze

Diagonale größere, lange Diagonale kleinere Elasticitätsaxe ist. Dieß bestätigt auch der mehrfach wiederholte Versuch vollkommen.

Man kann also auf optischem Wege sich von der Art des Krystalls, ob aus einem oder mehreren Grundkrystallen bestehend, überzeugen und den Krystall orientiren [1]).

2. Untersuchung der orientirten Schliffe aus den scheinbaren Gestalten 2O2 (211) der diversen Vorkommen.

α. Schliffe parallel dem Würfel früherer Auffassung.

Besteht das zu untersuchende Gebilde aus einem Grundkrystalle, so liefern drei Schliffe nach den Flächen genannter Gestalt Präparate, von denen zwei sich anders verhalten als das dritte.

Letzterer Schliff, den wir als der Basis entsprechend anzusehen haben, stellt ein Quadrat dar [2]), dessen Diagonalen den horizontalen Axen der Gestalt entsprechen und das in Bezug auf das Quadrat, aus einem Würfel, parallel dessen Flächen genommen, über Eck steht. Sämmtliche Theile des Schliffs erreichen das Maximum der Dunkelheit [3]), wenn die Diagonalen der Schliffﬁgur in die gekreuzten Nicols kommen, das Maximum der Helligkeit, wenn die Umgrenzungselemente des Schliffes jene Lage erlangen.

Ist die Dunkellage für die ganze Schliffpartie erreicht, so macht man die Bemerkung, daß einzelne Theile derselben noch nicht völlig auslöschen, sondern die Dunkelstellung erst bei einer Drehung um

1) Letzteres kann, wie hier gezeigt, auf zwei verschiedenen Wegen geschehen, ersteres bequem nur auf dem ersten hier angegebenen oder vermittelst eines Oktaëderschliffs, noch besser, da der Krystall nicht überall gleich beschaffen zu sein braucht, vermittelst einiger einander nicht paralleler Oktaëderschliffe. Aus Dodekaëderschliffen die Structur ersehen zu wollen ist schwieriger und erfordert die Kenntniß des Details; darüber kann also erst später gesprochen werden.

2) In Strenge müßte man sagen »einen quadratähnlichen Rhombus«, und dürfte obenstehenden und ähnliche Ausdrücke, die auf regulärer Bildung fußen, nicht gebrauchen. Ich werde mich aber in der Folge dieser einfacheren Ausdrücke dennoch bedienen, zumal die Unterschiede bei den in Rede stehenden Figuren von denen im regulären Systeme öfters so gering sind, daß man im Schliff dieselben nicht zur Bestimmung heranziehen kann.

3) Untersucht man in dieser Stellung mit dem Gypsblättchen, so tritt nicht das erwartete Roth ein, sondern die einen Lamellenzüge und Flecken werden zart bläulich, die anderen dazu normalen gelblich. Es ist diese Erscheinung, die dem Schliff ein eigenthümlich geflecktes Ansehen gibt, nicht mit der Färbung zu verwechseln, die der Schliff in Diagonalstellung einnimmt. Ich glaube die Gründe für diese Erscheinung in secundären Spannungen der Masse, hervorgerufen durch die Zwillingsbildung sehen zu sollen und werde darüber später an geeigneter Stelle berichten.

einen in den verschiedenen Fällen verschieden großen Winkel erreichen. Diese Erscheinung ist schon von Mallard u. A. beobachtet worden (cf. Phén. opt. anomaux etc. 1877. p. 57—59 u. Fig. 4 u. 5). Wäre man genöthigt sie als normale anzusehen, so müßte wohl das System des Leucits das trikline sein, wie Fouqué et Lévy Mineral. micrographique 1879 p. 284 richtig bemerken.

Ich habe, um mir in dieser Frage ein Urtheil zu bilden, sehr dünne Präparate besagter Art studirt, und zwar so, daß ich in ihnen Lamellen auf Dunkelheit nach dem einen Faden des Fadenkreuzes einstellte, das Präparat auf dem Tisch klemmte, denselben arretirte und nun mit der Mikrometerschraube in der Richtung des Fadens verschob. Ich fand, daß die Auslöschung in ein und derselben Lamelle nach der Stelle, die zur Untersuchung kam, sehr erheblich schwankte und halte mich danach für berechtigt, die oben erwähnten Abweichungen als Anomalien anzusehen. Wodurch dieselben erfolgen wird bei der Betrachtung der Einschlüsse gesagt werden.

Betrachtet man nun den Schliff rücksichtlich der Lamellen, die er zeigt, so bemerkt man, daß nach den Kanten des Quadrats gelagert, die ganze Fläche von Lamellen erfüllt ist, die sich theils kreuzen (Fig. 3), theils scharf an einander absetzende Partien von unregelmäßiger Umgrenzung erfüllen (Fig. 4) [1]).

Die Lamellenbildung ist oft so fein, daß es starker Vergrößerung bedarf, um sie in ihren einzelnen Theilen zu erkennen [2]). Wendet man das Gypsblättchen an, so sieht man, vorausgesetzt, daß die Umgrenzungselemente des Schliffs in die gekreuzten Nicols fallen, vergl. Fig. 3 [3]), daß die einen Lamellen blau, die anderen (damit abwechselnden) gelb werden. Bemerkenswerth ist das scharfe Einsetzen dieser Lamellen; es weist dieß darauf hin, daß ihre Zwillingsflächen, hier die seitlichen Rhombendodekaëderflächen (in quadratischer und rhombischer Auffassung ∞ P (110)), senkrecht zur oberen Endfläche stehen.

Hiermit ist schon der Beweis geführt, daß nach denjenigen

1) Dieser Schliff entspricht dem von Des-Cloizeaux, vergl. p. 423 beobachteten und hier als Basisschliff gedeuteten. Bei letzterem sind die Umgrenzungen parallel den Kanten des Würfels, die Lamellen liegen also parallel dessen Flächendiagonalen.

2) In solchen Fällen glaubt man bei schwacher Vergrößerung isotrope Stellen vor sich zu haben. Diese Partien und solche, bei denen durch Kreuzung von Lamellenzügen Compensation der Doppelbrechung eintritt, machen den Eindruck von Stellen, senkrecht zur optischen Axe eines einaxigen Körpers.

3) Auf der beigegebenen Tafel sind Fig. 3 und die meisten anderen als mit dem Gypsblättchen vom Roth I. Ordnung in Diagonalstellung untersucht, gezeichnet. — Bei dieser Art der Betrachtung treten Felder und Lamellen nach ihrer verschiedenen Bedeutung besser hervor als zwischen gekreuzten Nicols allein.

Flächen des Dodekaëders, die G. vom Rath von der Zwillingsbildung ausschloß, in der That solche stattfindet.

Da nun der ganze Schliff in Lamellen sich rechtwinkelig kreuzender oder rechtwinkelig zu einander gestellter und an einander absetzender Art zerfällt, die sämmtlich auf das Gypsblättchen wirken [1]), so ist damit bewiesen, daß die obere Endfläche nicht die eines quadratischen Minerals sein kann.

Das System wird vielmehr unter Berücksichtigung des ferneren Umstandes, daß die Lamellen auch im convergenten Lichte eine schwache Zweiaxigkeit verrathen [2]) und die Auslöschungen wie die Diagonalen der Schliffe, also parallel den Kanten des scheinbaren Würfels verlaufen, rhombisch, wenn auch nach optischen Eigenschaften dem quadratischen sehr genähert [3]).

Was die vorstehenden Zeilen aussagen, beweisen nun alle weiteren Erscheinungen. Außer den genannten, scharf einsetzenden Lamellen finden sich in den Schliffen parallel der oberen Endfläche auch noch solche, die parallel den Diagonalen der Schliffe gelagert sind. Sie werden zwar im Allgemeinen mit den übrigen Lamellen auch dunkel, zeichnen sich aber von ihnen dadurch aus, daß sie öfters nicht so distinct wie jene auslöschen, manch' Mal sogar ihren ursprünglichen Ton beim Drehen des Tisches beibehalten. Im Uebrigen schneiden sie nicht scharf ein [4]), sondern erscheinen, mit dem Gypsblättchen untersucht, mit wenig lebhaften Farben und sehen wie verschwommen aus. Eine nähere Ueberlegung zeigt, daß dieß so sein muß, denn es tritt hier Ueberlagerung ein, da die Lamellen durch Zwillingsbildungen nach den vier oberen Dodekaëderflächen, die zur Würfelfläche geneigt sind, erzeugt werden, Flächen, welche

1) Aus der Art dieser Wirkung, in Folge deren die einen Lamellen in Diagonalstellung blau, die anderen gelb werden, schließt man, daß die Lage der Elasticitätsaxen in den einen grade entgegengesetzt der in den anderen ist. Ueber die nähere Darstellung dieser Verhältnisse wird alsbald berichtet werden.

2) An Stellen, die breite Lamellen darboten, konnte ich bei Leuciten von Frascati, nachdem die Ebene der Axen erkannt war, mit dem Gypsblättchen den Charakter der Doppelbrechung als positiv bestimmen.

3) Leider ist es mir nicht gelungen die Lage der Axenebene in Bezug auf den spitzen oder stumpfen Winkel des quadratähnlichen Rhombus (von 92° 2$^1/_2$' nach den Messungen Weisbach's berechnet) zu fixiren. In den Schliffen lassen sich nicht mit Sicherheit spitze und stumpfe Winkel unterscheiden.

4) Die Darstellung der Abbildungen erfolgt in der Diagonalstellung der Präparate bei Anwendung des Gypsblättchens. — Die scharf einsetzenden Lamellen sind dann deutlich blau oder gelb gefärbt, dieß geben in den Zeichnungen distincte Umrisse zu erkennen; die schräg einschneidenden erscheinen annähernd roth, dieß ist durch verschwommene Schattirung dargestellt.



nach G. vom Rath allein befähigt sein sollten, als Zwillingsflächen zu fungiren. —

Wir haben also die vollkommen dodekaëdrische Zwillingsbildung und zwar sogar die nach den Prismenflächen durchgreifender, als die nach denen von $2 P \breve{\infty}$ (021) und $2 P \bar{\infty}$ (201).

Besteht nun das Krystallgebilde wirklich nur aus einem Grundkrystall mit Lamellen, so ist eben kein fernerer Grundkrystall da, von dem aus die so überaus zahlreichen Lamellen nach ∞P (110) in den Schliff gekommen sein könnten, und man kann daher nicht annehmen, sie seien etwa von den Pyramiden- (resp. Domen-) Flächen eines bereits zum Grundkrystall in Zwillingsstellung stehenden hergekommen.

Da aber ferner die Lamellen nach ∞P (110) überaus zahlreich, die anderen meist in viel geringerer Zahl vorhanden sind, so entfällt auch die Annahme diese hätten zur Entstehung jener Veranlassung gegeben, zumal auch die Lamellen nach dem Prisma mit der Masse des Grundkrystalls, wie es dieses Zwillingsgesetz fordert, regelrecht in Zwillingsstellung stehen.

Wie oben beschrieben und in Fig. 3 und 4 dargestellt verhält sich der Schnitt nach 0 P (001) durch die vier oberen Flächen des scheinbaren Ikositetraëders. Er ändert sich in seinem Gefüge nicht, wenn er nach dem Mittelpunkt zu rückt und läßt alsdann nur andere Umgrenzungselemente wahrnehmen.

Bestimmungen des Charakters der Doppelbrechung sind, wie vorher mitgetheilt, an Platten, die in genannter Art geschnitten sind, möglich, haben aber ihre Schwierigkeiten. — Viel leichter geht dieß an Platten aus mehrfach zusammengesetzten Krystallen, abgesehen von den schon früher angeführten Fällen einfacher Krystalle, woselbst namentlich die Schliffe nach drei in einer Zone gelegenen Flächen des scheinbaren Dodekaëders heranzuziehen sind.

Betrachtet man die beiden anderen Schliffe nach dem Würfel früherer Auffassung (nach unserer Ansicht die, welche dem vorderen und seitlichen Pinakoid entsprechen), so zeigen beide energischere Doppelbrechung wie der Basisschliff und Auslöschung nach den Diagonalen der Schlifffläche.

Wird ein Gypsblättchen eingeschaltet und kommt die Richtung der Verticalaxe in die Lage von MM′ in demselben, so färbt sich der Schliff blau. Da also hier die Farbe steigt, so ist die Verticalaxe von demselben Zeichen wie MM′ im Gyps, also die Axe der kleineren Elasticität, folglich der Krystall (ein Exemplar von Frascati) positiv doppelbrechend. So einfach diese Methode zu sein scheint, so schwierig ist sie in der Praxis anzuwenden, da man erst

die Richtung der Verticalaxe im Krystall feststellen muß und dieß aus den Umgrenzungselementen des Schliffs meistens nicht unzweideutig zu ersehen vermag.

Im convergenten Licht zeigen die Schliffe ein Verhalten, wie man es in Platten parallel der optischen Axe eines einaxigen oder der ersten Mittellinie eines zweiaxigen Körpers von sehr kleinem Axenwinkel beobachtet.

Betrachtet man nun die die Schliffe durchsetzenden Lamellen, so ergeben sich solche, die nach den Diagonalen des Schliffs eingeschaltet sind, dabei wie verschwommen erscheinen und solche, die parallel zu den Seiten des Schliffs laufen (derselbe sei von außen her dem Krystall entnommen und habe die Gestalt eines quadratähnlichen Rhombus) und scharf einschneiden, Fig. 5. Die sämmtlichen Lamellen löschen aus, wenn dieß die Hauptmasse des Schliffs thut. Mit dem Gypsblättchen untersucht zeigen sich die undeutlich begrenzten Lamellen wenig in der Farbe geändert, die scharf einschneidenden intensiv gefärbt und zwar abweichend vom Ton des Grundkrystalls.

Im Allgemeinen ist die Lamellenbildung in diesen Schliffen nicht so durchgreifend, wie im Basisschliff; es gibt hier bisweilen sogar verhältnißmäßig sehr einheitliche Schliffe; dann kommen aber auch solche mit reicher Lamellenbildung vor. In einzelnen Fällen sind die Lamellen nach den Diagonalen breit gebildet und überlagern sich in ausgezeichneter Weise. Es entsteht dann im polarisirten Licht eine schöne Parquettirung der Schliffe, und es kommt an Stellen der Ueberlagerung zu deutlicher Compensation der Doppelbrechung, so daß man mit blauen und gelben Quadraten auch rothe abwechseln sieht, wenn vermöge des Gypsblättchens der Schliff in Diagonalstellung untersucht wird.

Eine Betrachtung der auftretenden Lamellenzüge lehrt, daß auch hier die Bildung der Zwillingslamellen nach allen Flächen des ehemaligen Dodekaëders erfolgt. Vier seiner Flächen (das Prisma und ein Doma) entsenden die in den Diagonalen der Schliffe auftretenden Lamellen, die verschwommen anzusehen sind, da die Partien sich überlagern. Zwei andere Flächen (das andere Doma, mit seinen zwei Richtungen senkrecht zu der betreffenden Schliffläche stehend), schicken die scharf einschneidenden Lamellen in den Schliff herein, woselbst sie parallel dessen Seiten gelagert sind. Schliffe nach dem Innern zu zeigen nichts wesentlich Anderes.

Sehr auffallend ist in diesen Schliffen nach den verticalen Endflächen und in den Basispräparaten der Einfluß der Zwillingslamellen, besonders der scharf einsetzenden, auf ihre Umgebung. Dieselbe zeigt sich um die Lamellen herum in dem Grade ihrer Doppelbrechung

und der Richtung ihrer Auslöschung alterirt; die Wirkung ist ähnlich, wie sie Einschlüsse, z. B. von Augitkryställchen oder Glaspartien, im Gefolge haben. Letztere geben in der benachbarten Leucitsubstanz zur Entstehung von Kreuzen Veranlassung, wie ich sie seiner Zeit vom Pyrop her beschrieb[1]).

Das Verhalten derselben gegen den empfindlichen Ton des Gypsblättchens ist dasselbe wie dort: der mit MM' coincidirende Arm wird gelb, der dazu normale blau; dieß findet aber hier statt, wenn die Hauptmasse des Präparats in Normalstellung ist, d. h. den rothen Ton des Gesichtsfeldes besitzt. Diese offenbar secundäre Erscheinung ist sehr merkwürdig, weil sie auf eine Verschiedenheit der Elasticitäten in der Plattenebene hinweist, die nicht in der Art und im Sinne verläuft, wie es die Beschaffenheit der Hauptmasse fordert. Noch merkwürdiger werden die Einschlüsse durch die Beobachtung, daß sie nicht an die optischen Felder gebunden sind, sondern darüber hinweg ziehen. Das weist auf secundäre Entstehung letzterer hin!

Schwankungen in den normalen Auslöschungen werden gleichfalls durch die Einschlüsse, resp. die Spannungen, welche sie im Gefolge haben, herbeigeführt. Diese sind von solcher Art, daß sie der eigenthümlichen Wirkung der Lamellenzüge vergleichbar sind, die diese zeigen, wenn sie in Normalstellung mit dem Gypsblättchen geprüft werden, vergl. pag. 448; Fußnote 3. Besagte Wirkungen rühren daher von Deformationen her, die im Grundkrystall bei der Bildung der Zwillingslamellen hervorgerufen werden.

Auch ein Absetzen der Zwillingslamellen bei den Schliff durchsetzenden Rissen kommt vor, ganz mit den Erscheinungen des gegeneinander Verworfenseins der Theile, wie dieß Dr. Ben Saude zuerst am Perowskit (Göttingen 1882 p. 15) fand, übereinstimmend.

Oben geschilderte Structur ist an den Leucit-Krystallen vom Albanergebirge, speciell an denen von Frascati beobachtet. Außerdem tritt sie namentlich bei den aufgewachsenen Krystallen vom Vesuv auf. Im Normalfalle der Erscheinung des Krystalls als ein Grundindividuum mit Zwillingslamellen sehen die Schliffe wie erwähnt aus. Recht oft zeigt sich nun bei den betreffenden Krystallen die später zu beschreibende dreifache Bildung und dazu noch gern eine unregelmäßige Ausbildung der Grundindividuen; — dann können Bildungen entstehen, die sehr complicirt sind und deren Verständniß man erst erlangt, wenn man die dreifache Bildung im regelmäßigsten Falle studirt hat.

1) C. Klein. Optische Studien am Granat. Nachrichten u. s. w. 1882. p. 547.

Gewisse Krystalle von Bosco Reale sind ähnlich den soeben beschriebenen gebildet. Wenn das Vorkommen von Rieden in diese Abtheilung gehörende Krystalle liefert, so zeigen sie im Wesentlichen dieselben Charaktere, aber die Bildung ist mehr breit-lamellenförmig, lappenartig, und es treten nicht Serien langer schmaler Lamellen wie in den vorher erwähnten Fällen auf.

β. Schliffe nach dem Oktaëder früherer Auffassung.

Es wird immer wieder vorausgesetzt, es liege ein aus einem Grundindividuum bestehender Krystall vor. Dann ist der Oktaëderschliff ohne Feldertheilung, aber mit doppelter Zwillingslamellirung.

Sei der Schliff nahezu von außen her aus dem Krystall genommen und gebildet und gestellt wie Fig. 6, so tritt im polarisirten Lichte, mit Zuhülfenahme des Gypsblättchens besehen, ein dreifaches System von Lamellen auf, dessen einzelne Theile etwa 60° zu einander neigen, und das parallel den Seiten der Figur geht. Diese Lamellen pflegen meist breiter als die anderen, sofort zu schildernden, zu sein, sehen wie verschwommen aus und sind öfters gegen einander verworfen. (Fig. 6 an der linken Seite.) Sie rühren von Zwillingsbildungen nach denjenigen Flächen des Dodekaëders früherer Bedeutung her, die dem Oktaëder anliegen. Da die von ihnen in den Schliff gesandten Zwillingstheile schief in ihm einschneiden, so gibt es Ueberlagerung der Theile und daher im polarisirten Lichte bei Anwendung des Gypsblättchens verschwommenes Ansehen.

Scharf davon verschieden erkennt man ein anderes dreizähliges System von Lamellen, die alle im Schliff mit scharfen Grenzen sich darstellen, wenn man sie im polarisirten Lichte betrachtet. In seiner Stellung ist dieses dreizählige System von Lamellen, dessen einzelne Theile zu einander ebenfalls unter 60° neigen, so zum ersten gerichtet, daß seine einzelnen Züge auf denen des ersten Systems senkrecht stehen. Diese Lamellen, welche bei der Untersuchung mit dem Gypsblättchen meist besser hervortreten[1]) als die ersteren, rühren von den drei (mit den parallelen sechs) Flächen des Dodekaëders her, die auf der Fläche des Schliffs (Oktaëderfläche) senkrecht stehen. — Die vollkommen dodekaëdrische Zwillingsbildung ist also auch hierdurch erwiesen.

Geht der Schliff mehr nach dem Innern zu, so verändern sich seine Umgrenzungselemente, die Lamellen bleiben aber bestehen, wie-

1) Im gewöhnlichen polarisirten Lichte heben sich öfters die hier als scharf einschneidend und besser hervortretend bezeichneten Lamellen, welche zwischen hell und dunkel je nach der Schlifflage wechseln, nicht so gut ab, als die hier als verschwommen beschriebenen, die schon annähernd dunkel in allen Lagen sind.

ı. Die Untersuchung

sche Zwillingsbildung
überall Alles gleich-
raucht.

de Lamellen nach der
Dodekaëderfläche her,
normal steht, dann
rfen Grenzen erschei-
rühren von den zwei
en von 2O2(211) an-
chwommen begrenzte,
von der Dodekaëder-
einem und demselben
verlaufen senkrecht

Richtungen, die etwa
n [1]), gleichfalls nicht
sind. Sie entstehen
eibenden Dodekaëder-

en Sprüngen kommen

ist hinwiederum die
ie vorstehend geschil-
ınigfaltigkeit am Vor-
ımen der aufgewach-
von Bosco Reale und
doch kann man der
ei den aufgewachsenen
len nicht jedes Detail
mir Gebilde, die nur
ıt häufig vorgekommen.
ei denen im Falle
undkrystalle, mit
der scheinbaren
h kreuzen.

Auffassung.
die drei Würfelschliffe,
chnet, ergibt sich diese

Nach dem Innern des Krystalls zu erfahren diese Bildungen keine Aenderung.

Was den Schliff nach ∞P(110) anlangt, Fig. 8, so zeigt er sich von den vorigen abweichend gebaut. Er löscht zwar auch senkrecht und parallel zu seinen Diagonalen aus, wird aber gelb, wenn seine lange Diagonale mit MM' im Gypsblättchen coincidirt. Da diese Diagonale normal zur Verticalaxe ist, so folgt daraus auch der positive Charakter der Doppelbrechung.

Von Lamellen zeigen sich in diesem Schliffe nicht so zahlreiche, wie in den anderen. Es darf dieß auch nicht sein, da ja im Basisschliff ganz vorwaltend Lamellen nach ∞P(110) angetroffen wurden, also der hier in Rede stehende Schliff, wenn er dünn genug ist, geradezu eine jener Lamellen selbst darstellt.

Nach dem, was in den Basisschliffen gesehen wurde, müßten nur Lamellen nach dem zugehörigen Prisma, also z. B. ∞P links, $1\bar{1}0$ angetroffen werden, wenn der Schliff selbst parallel ∞P rechts, 110 z. B. wäre. Dieser Forderung entsprechen auch die Thatsachen in aller Strenge, und es sind von den vorkommenden Lamellen nur solche, die nach der kurzen Diagonale einsetzen und scharf abgegrenzt sind, zu sehen und keine nach der langen Diagonale. Dagegen fehlen aber Lamellen nicht, die nach den Seiten des Rhombus wie in den vorigen Schliffen gehen, zum Zeichen, daß auch hier eine vollkommen dodekaëdrische Zwillingsbildung statt hat. Nach dem Inneren zu bemerkt man dieselben Verhältnisse.

Im convergenten Licht zeigen, da das System sich ja dem quadratischen sehr nähert, die beiden ersten Schliffe Verhältnisse, wie sie in Platten, zur optischen Axe geneigt geschliffen, beobachtet werden, und der dritte Schliff bietet die Erscheinungen einer Platte parallel zur Axe dar.

δ. Schnitte nach dem Ikositetraëder früherer Auffassung.

In der Auslöschung des Grundkrystalls muß sich eine Ikositetraëderfläche von den beiden anderen verschieden verhalten. Da die symmetrische Diagonale der ersteren im diagonalen Hauptschnitt quadratischer Auffassung liegt, so wird die Platte hierzu senkrecht und parallel auslöschen, die anderen zwei Flächen von 2O2(211) desselben

---

nur zwei Richtungen, den Seiten des Rhombus entsprechend, zum Ausdruck kommen, so könnte man meinen, es seien überhaupt nur 2 + 1 Richtungen vorhanden. Eine nähere Betrachtung läßt aber auch für diese drei Richtungen erkennen, daß sie von Flächen aus einer Zone herrühren. Drei Flächen von ∞O(110) aus einer Zone treten aber niemals zur Pyramide (Domen im rhombischen Sinne) allein zusammen, eine gehört immer ∞P(110) an.

Oktanten können dieses Verhalten nicht zeigen. Die Untersuchung bestätigt dieses Erforderniß vollkommen.

Alle Flächen werden aber die dodekaëdrische Zwillingsbildung gleichmäßig zeigen können, wenngleich nicht überall Alles gleichmäßig wie in einem Falle entwickelt zu sein braucht.

Was man beobachtet ist das Folgende:

Man sieht, Fig. 9, ein Mal scharf einsetzende Lamellen nach der symmetrischen Diagonale; sie rühren von der Dodekaëderfläche her, die auf der untersuchten Ikositetraëderfläche normal steht, dann bemerkt man verschwommene, mit nicht scharfen Grenzen erscheinende Lamellen nach derselben Diagonale; sie rühren von den zwei Dodekaëderflächen her, die der zu untersuchenden von 2O2(211) anliegen. Weiterhin beobachtet man ebenfalls verschwommen begrenzte, nicht sehr lebhaft polarisirende Lamellen, die von der Dodekaëderfläche kommen, welche mit den beiden letzten einem und demselben Oktanten anliegt. Die Lamellen dieser Fläche verlaufen senkrecht zur symmetrischen Diagonale.

Endlich findet man noch Lamellen in zwei Richtungen, die etwa den Seiten eines Rhombus von 120° entsprechen[1]), gleichfalls nicht stark polarisiren und verschwommen begrenzt sind. Sie entstehen durch Zwillingsbildung nach den zwei übrig bleibenden Dodekaëderflächen.

Verwerfungen der Lamellen bei eintretenden Sprüngen kommen auch hier sehr schön vor.

Die angeführte Lage der Lamellen beweist hinwiederum die vollständige dodekaëdrische Zwillingsbildung. Die vorstehend geschilderten Verhältnisse sind in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit am Vorkommen von Frascati beobachtet. Die Vorkommen der aufgewachsenen Krystalle vom Vesuv, der Krystalle von Bosco Reale und von Rieden zeigen entsprechende Verhältnisse, doch kann man der Seltenheit oder Kleinheit der Krystalle halber bei den aufgewachsenen Krystallen des Vesuv und bei denen von Rieden nicht jedes Detail sofort wieder finden. Von Bosco Reale sind mir Gebilde, die nur einen Grundkrystall mit Lamellen darbieten, nicht häufig vorgekommen.

b. Untersuchung solcher Gebilde, bei denen im Falle regelmäßigster Ausbildung drei Grundkrystalle, mit ihren Verticalaxen nach den a Axen der scheinbaren Gestalt 2O2(211) gelagert, sich kreuzen.

α. Schliffe nach dem Würfel früherer Auffassung.

Im Falle regelmäßigster Ausbildung sind die drei Würfelschliffe,

1) Mit den Winkeln des regulären Systems berechnet, ergibt sich diese Neigung zu 121° 29′.

welche verschiedenen, einander nicht parallelen Ecken entnommen sind, einander völlig gleich. Sie entsprechen in ihrer Structur dann dem Basisschliff, wenn sie jeweils durch die vier Flächen gehen, welche in den oktaëdrischen Ecken von 2O2(211) zusammenstoßen. Liegt der Schnitt tiefer, und geht er durch die darunter befindlichen acht Flächen von 2O2(211) (in quadratischer Auffassung durch die Pyramide 4P2(421), in rhombischer durch $4\breve{P}2$(241) und $4\bar{P}2$(421)), so erscheint er in drei Haupttheile zerlegt, Fig. 10.

Die Mitte nimmt eine Partie von der Beschaffenheit des Basisschliffs ein; dieselbe umgrenzen vier neue Theile, von denen je zwei gegenüberliegende sich gleich verhalten und von einander durch eine mehr oder weniger scharfe Grenze, bisweilen sogar einen Riß, geschieden sind.

Diese Grenze geht im Schliff durch die Hauptschnitte früherer Bedeutung, welche von ∞O(110) im Einschnitte auf ∞O∞(100) ihre Spuren markirten, d. h. die Grenzen verbinden die stumpfen Winkel des Achtecks, wenn der Medianschliff vorliegt.

Gegen das Mittelfeld grenzen diese Theile so ab, daß dessen hauptsächlichste Lamellen (nach ∞P(110)) von der Grenze diagonal geschnitten werden. Die Grenze selbst kann aber auch unregelmäßig verlaufen, oder, wie dieß einzelne seltene Fälle zeigen, sogar von der Form eines zu dem Rande des Schliffs concentrischen Achtecks gebildet sein.

Wird ein Gypsblättchen vom Roth I. Ordnung in üblicher Weise eingeschaltet und das Mittelfeld in Diagonalstellung genommen, so färben sich, Fig. 10, die rechts unten, links oben befindlichen Außenfelder gelb, die links unten, rechts oben befindlichen blau.

Da nun diese Theile, welche meist einheitlicher sind als das Mittelfeld, im convergenten Lichte die Eigenschaft von Platten parallel der optischen Axe eines einaxigen Körpers (oder ersten Mittellinie eines zweiaxigen von sehr kleinem Axenwinkel) zeigen, da sie völlig auslöschen, wenn die Verbindungslinien der spitzen Winkel des Medianschliffs in die gekreuzten Nicols kommen, so kann man mit diesen Platten parallel der Verticalaxe sehr einfach deren optischen Charakter bestimmen. Derselbe ist, wie die vorhin erwähnte Farbenvertheilung lehrte, positiv und zwar für alle Leucitvorkommen, die ich untersuchen konnte.

Zudem gibt gerade der Medianschliff dieser Lage ein bequemes Mittel ab zu entscheiden, ob der Krystall aus einem oder drei Grundindividuen besteht und ob deren Bildung eine regelmäßige ist. E s i s t d i e ß d a h e r d e r w i c h t i g s t e S c h l i f f b e i d e r g a n z e n U n t e r s u c h u n g.



Bezüglich der optischen Structur des Mittelfeldes kann auf das früher Gesagte verwiesen werden. Die Nebentheile zeigen zwei Systeme scharf einschneidender, lebhaft polarisirender Lamellen, unter etwa 45^0 (meist etwas darüber) zur Projection der Verticalaxe geneigt. Diese Lamellen entstammen zwei verschiedenen Dodekaëderflächen. Senkrecht zu der Richtung der Verticalaxe liegen in ihren Grenzen wie verschwommen gebildete Lamellen, wenig energisch polarisirend. Sie kommen ebenfalls von zwei Flächen des Dodekaëders her, bleiben aber in der Spur einander parallel. Die bis jetzt in Frage gekommenen Lamellen könnte man als erzeugt ansehen von vier Dodekaëderflächen, die sich zu $2P\infty(201)$ in quadratischer, $2P\breve{\infty}(021)$, $2P\bar{\infty}(201)$ in rhombischer Auffassung vereinigen. Nun treten aber noch andere Lamellen auf, im Ansehen wie die letzten gebildet, aber parallel der Spur der Verticalaxe. Diese Lamellen, die also der Schliff auch schief trifft, rühren wiederum von 2 Flächen des Dodekaëders her, die nun in Bezug auf den in Rede stehenden Grundkrystall auch dessen dodekaëdrische Zwillingsbildung vollständig erweisen, da sie nach seinem Prisma $\infty P(110)$ laufen.

Bezüglich der Art des Auftretens ist zu bemerken, daß sich die Lamellen kreuzen, an einander absetzen, gegen einander verworfen sind, wie es grade der specielle Fall mit sich bringt. Seltener indessen gehen sie von einem Feld in das andere über, doch kommt dieß auch vor; ich konnte es mehrmals sehr deutlich sehen. Hierbei findet dann manchmal eine Krümmung der Lamellen statt.

Die Größe der einzelnen Felder richtet sich zunächst nach der Lage des Schliffs, dann aber auch nach der Entwickelung der einzelnen Grundkrystalle. Letztere übt ihren Einfluß auch auf die Grenzen der einzelnen Felder aus. Geht der Schliff durch die vier Flächen einer vierkantigen sog. oktaëdrischen Ecke, so herrscht nur die Structur der Basis. Zu deren Feld gesellen sich, sobald der Schliff in die achtseitige Pyramide hereinsinkt, an den Ecken die parallel ihren Verticalaxen getroffenen Theile der zwei anderen Grundkrystalle hinzu. Nähert sich der Schliff der Medianebene Fig. 10, so werden diese Theile größer, das Basisfeld kleiner. Erreicht der Schliff die Medianebene, so pflegt (im Normalfall ist dieß so) das Basisfeld verschwunden zu sein. Auf der anderen Seite der Medianebene beobachtet man den Rücklauf der Erscheinungen.

Sehr bemerkenswerth ist in diesen Schliffen der Vesuvleucite von 1847, 1855 und der Krystalle der älteren Laven von Bosco Reale, Mauro, sowie der Leucite von der Rocca Monfina u. s. w. der Einfluß der Sprünge auf die Doppelbrechung. Schon früher wurde erwähnt, daß die Lamellen öfters wie verworfen erscheinen; hier

tritt aber noch eine andere Erscheinung hinzu. Ich beobachtete dieselbe besonders in Schliffen parallel der Verticalaxe, allwo dann zu beiden Seiten des Sprungs die Doppelbrechung der Lamelle sich stark geändert zeigte, so daß sich Sprung und alterirte Partieen wie das Rinnsal eines Baches auf einer Karte ansahen.

Das läßt im Verein mit den Erscheinungen, die die Einschlüsse hervorrufen, denn doch unzweideutig den wenig gefestigten Charakter dieser Doppelbrechung erkennen.

Vorstehend habe ich Alles für den Normalfall geltend und auf Grund der besten Präparate beschrieben. Es kommen, zieht man alle Präparate in Betracht, vielfach Abweichungen von dem geschilderten Verhalten in sofern vor, als nicht alle gleich seinsollenden Stellen gleich, nicht alle Grenzen so scharf sind, wie geschildert. Die zu beobachtenden Erscheinungen sind vielfach weniger vollkommen, Manches fehlt, was erwartet werden sollte; es kommt aber nichts vor, was gegen die nun schon mehrfach gestützte Ansicht der dodekaëdrischen Zwillingsbildung spricht, namentlich zeigt sich niemals eine Zwillingsbildung noch höherer Ordnung.

β. Schliffe nach dem Oktaëder früherer Auffassung.

Die Theorie der zu untersuchenden Krystalle verlangt, daß das Oktaëder im Normalfall Dreitheilung nach den Ecken des Schliffs (denselben als Dreieck betrachtet) zeige, und die Beobachtung lehrt, daß dem auch so ist. Kommt der Schliff in die Lage der Fig. 11 und wird mit dem Gypsblättchen untersucht, so wird das obere Dreieck roth, das links liegende blau, das rechts liegende gelb. Dieses Verhalten steht mit der positiven Doppelbrechung der drei den Schliff zusammensetzenden Individuen im Einklang. Zwischen gekreuzten Nicols löschen die einheitlichen Partien der Felder aus, wenn die äußeren Begrenzungselemente nach einander den Polarisationsebenen der ersteren parallel gehen.

Auf den Feldern zeigen sich, in den äußeren Schlifflagen vorzugsweise, Lamellen, senkrecht zu den Seiten der Schliffe orientirt. Nach dem Inneren zu treten in den durch die Schlifflage bedingten Feldern die sämmtlichen Lamellenzüge auf, die wir vom Oktaëderschliff des Einzelindividuums kennen lernten.

Einschlüsse, Polarisationsverhalten derselben, Uebersetzen der optischen Felder, Sprünge und dadurch bewirkte Aenderung der optischen Wirkung der Umgebung, gegeneinander verworfene Lamellen u. s. f. kommen, wie früher geschildert, vor.

γ. Schliffe nach dem Rhombendodekaëder früherer Auffassung.

In der Fläche des Rhombendodekaëders stoßen bei den hier zu

betrachtenden Complexen zwei Grundkrystalle zusammen [1]), und es tritt hier der Fall ein, den Groth für das Oktaëder hervorhob: die Individuen sind gleich gegen die optische Axe (erste Mittellinie des kleinen Axenwinkels) getroffen und stehen zudem so, daß die Projectionen ihrer optischen Elasticitätsrichtungen zusammenfallen, resp. einander parallel gehen.

Im polarisirten Licht, ohne oder mit Gypsblättchen, wird sich also zunächst an dem Auslöschen oder der Färbung der Grundkrystalle nichts zeigen, was das Ganze als ein zusammengesetztes Gebilde anzusehen erlaubte, höchstens wäre das Absetzen der Lamellen an der bisweilen schon ohne polarisirtes Licht sichtbaren Grenze parallel der kurzen Rhombendiagonale hier heran zu ziehen, Fig. 12. Letzteres Kennzeichen ist aber oft sehr versteckt und nicht allgemein zur Unterscheidung zu verwerthen.

Die in den beiden Schliffhälften vorkommenden Lamellen sind die des Einzelindividuums; ebenso fehlen die oben erwähnten Einschlüsse, Sprünge u. s. w. und ihre Wirkungen in optischer Hinsicht nicht.

Während aber in Schliffen von außen am Krystalle her, die wie Rhomben erscheinen, zu beobachten ist, daß, wenn mit dem Gypsblättchen geprüft wird und die lange Schliffdiagonale mit MM' coincidirt, das ganze Präparat bezüglich der Grundmasse blau wird, also auch hier positive Doppelbrechung sich bekundet, ist zu bemerken, daß, wenn der Schliff mehr nach dem Inneren zu geht und z. B. die unter den vier oberen Flächen von 2O2(211) liegenden sechs anderen schneidet, sich eine Erscheinung, wie in Fig. 13. dargestellt, zeigt. Dieselbe rührt davon her, daß zu den Feldern, welche den zwei ersten Grundkrystallen entstammen und dort Domen entsprechen, nunmehr solche aus zwei sich gegenüberstehenden Theilen eines anderen Grundindividuums kommen, woselbst sie die Lage von ∞P(110) haben. Zum Ausdruck kommt dieß durch die Gelbfärbung dieser neuen Theile, die in einer Lage erfolgt, bei der die vormals allein vorhandenen Partien blau erscheinen. Es kann also auch an diesem Beispiele nicht nur die dreifache Zusammensetzung der scheinbar einfachen Krystalle erwiesen, als vielmehr auch deren Aufbau nach dem Gesetze der vollkommen dodekaëdrischen Zwillingsbildung wiederum als erhärtet angesehen werden.

δ. Schliffe nach dem Ikositetraëder früherer Auffassung.

Im Normalfall werden die Schliffe solchen Flächen von 2O2(211)

1) Vergl. pag. 443 die entsprechende Beobachtung an einem Vesuvleucit.

angehören, die, rhombisch genommen, zu P(111) werden. Die Auslöschung erfolgt daher in Anbetracht des fast quadratischen Charakters nahezu senkrecht und parallel zur symmetrischen Diagonale auf 2O2(211) und das Verhalten gegenüber dem Gypsblättchen ist wie im Falle des einfachen Krystalls bei derselben Fläche gezeigt worden ist.

Was die Zwillingslamellen anlangt, so stellen sich solche parallel der symmetrischen Diagonale in den bekannten zweifachen Erscheinungsweisen als die häufigsten dar. Es fehlen aber auch nicht die anderen, durch die dodekaëdrische Zwillingsbildung erforderten Lamellen, besonders in Schliffen mehr nach dem Innern des Krystalls zu.

Alle diese Erscheinungen lassen sich besonders schön an den Vesuvleuciten von 1847 und 1855 und denen, die ich ohne Angabe des Jahres erhielt, die aber wahrscheinlich nur besonders ausgesuchte Leucite von 1855 sind, nachweisen. Die Vorkommen von Bosco Reale, Mauro, Rocca Monfina, Rieden zeigen die beschriebenen Erscheinungen auch, doch nicht so vollkommen wie die erstgenannten Leucitvorkommen, bei denen auch am schönsten das bezüglich der Einschlüsse, der Sprünge und des Absetzens der Lamellen Gesagte zu beobachten ist.

c. Untersuchung solcher Gebilde, die zwar aus mehreren Grundkrystallen bestehen, bei denen aber einer gegenüber zweien wechselnde Stufen der Entwickelung zeigt.

Dieser vielleicht häufigste Fall kommt bei allen von mir untersuchten Leucitvorkommen vor. In Folge des Schwankens in der Größe der den Krystall zusammensetzenden Grundindividuen treten die mannigfaltigsten Erscheinungen auf, sehr geeignet am Anfange einer Leucituntersuchung den Beobachter zu verwirren.

Ich hebe nicht alle Möglichkeiten hervor und beschränke mich auf das Wichtigste, was ich beobachtet habe.

Der Würfelschliff beginnt an einer Ecke des Krystalls mit dem Basispräparat und endet mit einem solchen nach einem verticalen Pinakoid an der gegenüberliegenden Ecke, oder mit einem, in dem Basis und verticales Pinakoid liegen.

Der Basisschliff verschwindet mit seinen Merkmalen bald aus einer Serie von Schliffen nach dem Würfel, und zwei Grundindividuen herrschen im größten Theil der Präparate, bis dann an der der Anfangs-Ecke gegenüberliegenden sich wieder die Basis einstellt.

Der Oktaëderschliff ist an einer Ecke einheitlich, an der anderen dreigetheilt u. s. w.

Der Dodekaëderschliff beginnt mit einer Fläche von der Bedeutung eines Doma's und endet mit einer solchen an der gegenüberliegenden Ecke von 2O2(211) von der Bedeutung des Prisma's. Der Dodekaëderschliff beginnt einheitlich und im weiteren Verlaufe treten Erscheinungen ein, die den Krystall als aus mehreren Individuen zusammengesetzt ansehen lassen.

Der Schliff nach 2O2(211) sollte, anderen Schliffen zu Folge, eine Fläche von der Bedeutung P(111) ergeben und erweist ein verzwillingtes Feld u. s. w. — Aus allen diesen Angaben, die auf das häufigst Vorkommende Bedacht nehmen, tritt klar hervor, daß die mehrfache Zusammensetzung der Krystalle das Herrschende ist und daß die besonders behandelten Fälle des einen und der drei Individuen im Gleichgewicht nur als die vorzugsweise ausgezeichneten sich darstellen.

Herrscht ein Individuum allein oder sehr vorwiegend, so wird die geometrische Erscheinungsweise der Krystalle, in sofern sie nicht durch die Zwillingsbildung im Grundindividuum beeinträchtigt wird, die quadratische, resp. rhombische mit großer Annäherung an das quadratische System erscheinende, sein.

Sind drei Individuen in regelmäßiger Durchkreuzung ausgebildet[1]), so kommt ein regulärer Habitus zum Ausdruck (Fig. 14).

Gelangen von den drei (resp. sechs) Individuen nicht alle zur gleichmäßigen Entwickelung, so herrschen in Ausbildung und Winkeln schwankende Verhältnisse.

Für den ersten Fall gibt ein Theil der aufgewachsenen Krystalle Beispiele ab, für den zweiten ein Theil der eingewachsenen, zum dritten tragen alle Vorkommen bei. — Ich sehe hierin z. Theil die Erklärung der schwankenden Winkelverhältnisse des Leucits, zum anderen Theil mögen Zwillingslamellen ihren Antheil daran haben, vornehmlich aber wird die Art des Uebergangs und der Verlauf des-

1) An Stelle dieser Gruppirung könnte man auch eine Zwillingsbildung anzunehmen versucht sein, bei der nach vier Flächen des ehemaligen Dodekaëders zu einem Krystall vier Individuen in Zwillingsstellung stehen und der erste Krystall sich nach unten fortsetzt, so daß im Ganzen doch 6 Theile herauskommen. — Ich glaube nicht, daß dem die Krystalle und die Art ihrer Bildung entsprechen, bei welcher von den 3 + 6 Symmetrieebenen des regulären Systems, 6 zu Verlust gingen und 3 sich differenzirten. — Genaues läßt sich zur Zeit, da Angaben über die Grunddimensionen der meisten eingewachsenen Leucite fehlen, vom geometrischen Standpunkte nicht aussagen, indessen scheint mir die obengemachte Annahme, welche die optische Structur nicht als ursprüngliche ansieht, den Vorzug zu verdienen. Auch die einheitliche Auslöschung und das sonstige Verhalten der Würfelmedianschliffe spricht gegen die andere Ansicht.

angehören, die, rhombisch genommen, zu P(111) werden. Die Auslöschung erfolgt daher in Anbetracht des fast quadratischen Charakters nahezu senkrecht und parallel zur symmetrischen Diagonale auf 2O2(211) und das Verhalten gegenüber dem Gypsblättchen ist wie im Falle des einfachen Krystalls bei derselben Fläche gezeigt worden ist.

Was die Zwillingslamellen anlangt, so stellen sich solche parallel der symmetrischen Diagonale in den bekannten zweifachen Erscheinungsweisen als die häufigsten dar. Es fehlen aber auch nicht die anderen, durch die dodekaëdrische Zwillingsbildung erforderten Lamellen, besonders in Schliffen mehr nach dem Innern des Krystalls zu.

Alle diese Erscheinungen lassen sich besonders schön an den Vesuvleuciten von 1847 und 1855 und denen, die ich ohne Angabe des Jahres erhielt, die aber wahrscheinlich nur besonders ausgesuchte Leucite von 1855 sind, nachweisen. Die Vorkommen von Bosco Reale, Mauro, Rocca Monfina, Rieden zeigen die beschriebenen Erscheinungen auch, doch nicht so vollkommen wie die erstgenannten Leucitvorkommen, bei denen auch am schönsten das bezüglich der Einschlüsse, der Sprünge und des Absetzens der Lamellen Gesagte zu beobachten ist.

c. Untersuchung solcher Gebilde, die zwar aus mehreren Grundkrystallen bestehen, bei denen aber einer gegenüber zweien wechselnde Stufen der Entwickelung zeigt.

Dieser vielleicht häufigste Fall kommt bei allen von mir untersuchten Leucitvorkommen vor. In Folge des Schwankens in der Größe der den Krystall zusammensetzenden Grundindividuen treten die mannigfaltigsten Erscheinungen auf, sehr geeignet am Anfange einer Leucituntersuchung den Beobachter zu verwirren.

Ich hebe nicht alle Möglichkeiten hervor und beschränke mich auf das Wichtigste, was ich beobachtet habe.

Der Würfelschliff beginnt an einer Ecke des Krystalls mit dem Basispräparat und endet mit einem solchen nach einem verticalen Pinakoid an der gegenüberliegenden Ecke, oder mit einem, in dem Basis und verticales Pinakoid liegen.

Der Basisschliff verschwindet mit seinen Merkmalen bald aus einer Serie von Schliffen nach dem Würfel, und zwei Grundindividuen herrschen im größten Theil der Präparate, bis dann an der der Anfangs-Ecke gegenüberliegenden sich wieder die Basis einstellt.

Der Oktaëderschliff ist an einer Ecke einheitlich, an der anderen dreigetheilt u. s. w.

Der Dodekaëderschliff beginnt mit einer Fläche von der Bedeutung eines Doma's und endet mit einer solchen an der gegenüberliegenden Ecke von 2O2(211) von der Bedeutung des Prisma's. Der Dodekaëderschliff beginnt einheitlich und im weiteren Verlaufe treten Erscheinungen ein, die den Krystall als aus mehreren Individuen zusammengesetzt ansehen lassen.

Der Schliff nach 2O2(211) sollte, anderen Schliffen zu Folge, eine Fläche von der Bedeutung P(111) ergeben und erweist ein verzwillingtes Feld u. s. w. — Aus allen diesen Angaben, die auf das häufigst Vorkommende Bedacht nehmen, tritt klar hervor, daß die mehrfache Zusammensetzung der Krystalle das Herrschende ist und daß die besonders behandelten Fälle des einen und der drei Individuen im Gleichgewicht nur als die vorzugsweise ausgezeichneten sich darstellen.

Herrscht ein Individuum allein oder sehr vorwiegend, so wird die geometrische Erscheinungsweise der Krystalle, in sofern sie nicht durch die Zwillingsbildung im Grundindividuum beeinträchtigt wird, die quadratische, resp. rhombische mit großer Annäherung an das quadratische System erscheinende, sein.

Sind drei Individuen in regelmäßiger Durchkreuzung ausgebildet [1]), so kommt ein regulärer Habitus zum Ausdruck (Fig. 14).

Gelangen von den drei (resp. sechs) Individuen nicht alle zur gleichmäßigen Entwickelung, so herrschen in Ausbildung und Winkeln schwankende Verhältnisse.

Für den ersten Fall gibt ein Theil der aufgewachsenen Krystalle Beispiele ab, für den zweiten ein Theil der eingewachsenen, zum dritten tragen alle Vorkommen bei. — Ich sehe hierin z. Theil die Erklärung der schwankenden Winkelverhältnisse des Leucits, zum anderen Theil mögen Zwillingslamellen ihren Antheil daran haben, vornehmlich aber wird die Art des Uebergangs und der Verlauf des-

1) An Stelle dieser Gruppirung könnte man auch eine Zwillingsbildung anzunehmen versucht sein, bei der nach vier Flächen des ehemaligen Dodekaëders zu einem Krystall vier Individuen in Zwillingsstellung stehen und der erste Krystall sich nach unten fortsetzt, so daß im Ganzen doch 6 Theile herauskommen. — Ich glaube nicht, daß dem die Krystalle und die Art ihrer Bildung entsprechen, bei welcher von den 3 + 6 Symmetrieebenen des regulären Systems, 6 zu Verlust gingen und 3 sich differenzirten. — Genaues läßt sich zur Zeit, da Angaben über die Grunddimensionen der meisten eingewachsenen Leucite fehlen, vom geometrischen Standpunkte nicht aussagen, indessen scheint mir die obengemachte Annahme, welche die optische Structur nicht als ursprüngliche ansieht, den Vorzug zu verdienen. Auch die einheitliche Auslöschung und das sonstige Verhalten der Würfelmedianschliffe spricht gegen die andere Ansicht.

angehören, die, rhombisch genommen, zu P(111) werden. Die Auslöschung erfolgt daher in Anbetracht des fast quadratischen Charakters nahezu senkrecht und parallel zur symmetrischen Diagonale auf 2O2(211) und das Verhalten gegenüber dem Gypsblättchen ist wie im Falle des einfachen Krystalls bei derselben Fläche gezeigt worden ist.

Was die Zwillingslamellen anlangt, so stellen sich solche parallel der symmetrischen Diagonale in den bekannten zweifachen Erscheinungsweisen als die häufigsten dar. Es fehlen aber auch nicht die anderen, durch die dodekaëdrische Zwillingsbildung erforderten Lamellen, besonders in Schliffen mehr nach dem Innern des Krystalls zu.

Alle diese Erscheinungen lassen sich besonders schön an den Vesuvleuciten von 1847 und 1855 und denen, die ich ohne Angabe des Jahres erhielt, die aber wahrscheinlich nur besonders ausgesuchte Leucite von 1855 sind, nachweisen. Die Vorkommen von Bosco Reale, Mauro, Rocca Monfina, Rieden zeigen die beschriebenen Erscheinungen auch, doch nicht so vollkommen wie die erstgenannten Leucitvorkommen, bei denen auch am schönsten das bezüglich der Einschlüsse, der Sprünge und des Absetzens der Lamellen Gesagte zu beobachten ist.

c. Untersuchung solcher Gebilde, die zwar aus mehreren Grundkrystallen bestehen, bei denen aber einer gegenüber zweien wechselnde Stufen der Entwickelung zeigt.

Dieser vielleicht häufigste Fall kommt bei allen von mir untersuchten Leucitvorkommen vor. In Folge des Schwankens in der Größe der den Krystall zusammensetzenden Grundindividuen treten die mannigfaltigsten Erscheinungen auf, sehr geeignet am Anfange einer Leucituntersuchung den Beobachter zu verwirren.

Ich hebe nicht alle Möglichkeiten hervor und beschränke mich auf das Wichtigste, was ich beobachtet habe.

Der Würfelschliff beginnt an einer Ecke des Krystalls mit dem Basispräparat und endet mit einem solchen nach einem verticalen Pinakoid an der gegenüberliegenden Ecke, oder mit einem, in dem Basis und verticales Pinakoid liegen.

Der Basisschliff verschwindet mit seinen Merkmalen bald aus einer Serie von Schliffen nach dem Würfel, und zwei Grundindivid[illegible] herrschen im größten Theil der Präparate, bis d[illegible] fangs-Ecke gegenüberliegenden sich wieder die B[illegible]

Der Oktaëderschliff ist an einer Ecke ei[illegible] dreigetheilt u. s. w.

Der Dodekaëderschliff beginnt mit einer Fläche von der Bedeutung eines Doma's und endet mit einer solchen an der gegenüberliegenden Ecke von 202(211) von der Bedeutung des Prisma's. Der Dodekaëderschliff beginnt einheitlich und im weiteren Verlaufe treten Erscheinungen ein, die den Krystall als aus mehreren Individuen zusammengesetzt ansehen lassen.

Der Schliff nach 202(211) sollte, anderen Schliffen zu Folge, eine Fläche von der Bedeutung P(111) ergeben und erweist ein verzwillingtes Feld u. s. w. — Aus allen diesen Angaben, die auf das häufigst Vorkommende Bedacht nehmen, tritt klar hervor, daß die mehrfache Zusammensetzung der Krystalle das Herrschende ist und daß die besonders behandelten Fälle des einen und der drei Individuen im Gleichgewicht nur als die vorzugsweise ausgezeichneten sich darstellen.

Herrscht ein Individuum allein oder sehr vorwiegend, so wird die geometrische Erscheinungsweise der Krystalle, in sofern sie nicht durch die Zwillingsbildung im Grundindividuum beeinträchtigt wird, die quadratische, resp. rhombische mit großer Annäherung an das quadratische System erscheinende, sein.

Sind drei Individuen in regelmäßiger Durchkreuzung ausgebildet[1]), so kommt ein regulärer Habitus zum Ausdruck (Fig. 14).

Gelangen von den drei (resp. sechs) Individuen nicht alle zur gleichmäßigen Entwickelung, so herrschen in Ausbildung und Winkeln schwankende Verhältnisse.

Für den ersten Fall gibt ein Theil der aufgewachsenen Krystalle Beispiele ab, für den zweiten ein Theil der eingewachsenen, zum dritten tragen alle Vorkommen bei. — Ich sehe hierin z. Theil die Erklärung der schwankenden Winkelverhältnisse des Leucits, zum anderen Theil mögen Zwillingslamellen ihren Antheil daran haben, vornehmlich aber wird die Art des Uebergangs und der Verlauf des-

---

1) An Stelle dieser Gruppirung könnte man auch eine Zwillingsbildung anzunehmen [illegible] ht sein, bei der nach vier Flächen des ehemaligen Dodekaëders zu [illegible] tall vier Individuen in Zwillingsstellung stehen und der erste [illegible] ch unten fortsetzt, so daß im Ganzen doch 6 Theile herauskom[illegible] ibe nicht, daß dem die Krystalle und die Art ihrer Bildung [illegible] her von den 3 + 6 Symmetrieebenen des regulären Systems, [illegible] und 3 sich differenzirten. — Genaues läßt sich zur Zeit, [illegible] die Grunddimensionen der meisten eingewachsenen Leucite etri[illegible] te nicht aussagen, indessen scheint mir [illegible] A[illegible] die optische Structur nicht als ursprüng[illegible] V[illegible]. Auch die einheitliche Auslöschung und [illegible] erha[illegible] anschliffe spricht gegen die andere Ansicht.

angehören, die, rhombisch genommen, zu P(111) werden. Die Auslöschung erfolgt daher in Anbetracht des fast quadratischen Charakters nahezu senkrecht und parallel zur symmetrischen Diagonale auf 2O2(211) und das Verhalten gegenüber dem Gypsblättchen ist wie im Falle des einfachen Krystalls bei derselben Fläche gezeigt worden ist.

Was die Zwillingslamellen anlangt, so stellen sich solche parallel der symmetrischen Diagonale in den bekannten zweifachen Erscheinungsweisen als die häufigsten dar. Es fehlen aber auch nicht die anderen, durch die dodekaëdrische Zwillingsbildung erforderten Lamellen, besonders in Schliffen mehr nach dem Innern des Krystalls zu.

Alle diese Erscheinungen lassen sich besonders schön an den Vesuvleuciten von 1847 und 1855 und denen, die ich ohne Angabe des Jahres erhielt, die aber wahrscheinlich nur besonders ausgesuchte Leucite von 1855 sind, nachweisen. Die Vorkommen von Bosco Reale, Mauro, Rocca Monfina, Rieden zeigen die beschriebenen Erscheinungen auch, doch nicht so vollkommen wie die erstgenannten Leucitvorkommen, bei denen auch am schönsten das bezüglich der Einschlüsse, der Sprünge und des Absetzens der Lamellen Gesagte zu beobachten ist.

c. Untersuchung solcher Gebilde, die zwar aus mehreren Grundkrystallen bestehen, bei denen aber einer gegenüber zweien wechselnde Stufen der Entwickelung zeigt.

Dieser vielleicht häufigste Fall kommt bei allen von mir untersuchten Leucitvorkommen vor. In Folge des Schwankens in der Größe der den Krystall zusammensetzenden Grundindividuen treten die mannigfaltigsten Erscheinungen auf, sehr geeignet am Anfange einer Leucituntersuchung den Beobachter zu verwirren.

Ich hebe nicht alle Möglichkeiten hervor und beschränke mich auf das Wichtigste, was ich beobachtet habe.

Der Würfelschliff beginnt an einer Ecke des Krystalls mit dem Basispräparat und endet mit einem solchen nach einem verticalen Pinakoid an der gegenüberliegenden Ecke, oder mit einem, in dem Basis und verticales Pinakoid liegen.

Der Basisschliff verschwindet mit seinen Merkmalen bald aus einer Serie von Schliffen nach dem Würfel, und zwei Grundindividuen herrschen im größten Theil der Präparate, bis dann an der der Anfangs-Ecke gegenüberliegenden sich wieder die Basis einstellt.

Der Oktaëderschliff ist an einer Ecke einheitlich, an der anderen dreigetheilt u. s. w.

Der Dodekaëderschliff beginnt mit einer Fläche von der Bedeutung eines Doma's und endet mit einer solchen an der gegenüberliegenden Ecke von 2O2(211) von der Bedeutung des Prisma's. Der Dodekaëderschliff beginnt einheitlich und im weiteren Verlaufe treten Erscheinungen ein, die den Krystall als aus mehreren Individuen zusammengesetzt ansehen lassen.

Der Schliff nach 2O2(211) sollte, anderen Schliffen zu Folge, eine Fläche von der Bedeutung P(111) ergeben und erweist ein verzwillingtes Feld u. s. w. — Aus allen diesen Angaben, die auf das häufigst Vorkommende Bedacht nehmen, tritt klar hervor, daß die mehrfache Zusammensetzung der Krystalle das Herrschende ist und daß die besonders behandelten Fälle des einen und der drei Individuen im Gleichgewicht nur als die vorzugsweise ausgezeichneten sich darstellen.

Herrscht ein Individuum allein oder sehr vorwiegend, so wird die geometrische Erscheinungsweise der Krystalle, in sofern sie nicht durch die Zwillingsbildung im Grundindividuum beeinträchtigt wird, die quadratische, resp. rhombische mit großer Annäherung an das quadratische System erscheinende, sein.

Sind drei Individuen in regelmäßiger Durchkreuzung ausgebildet [1]), so kommt ein regulärer Habitus zum Ausdruck (Fig. 14).

Gelangen von den drei (resp. sechs) Individuen nicht alle zur gleichmäßigen Entwickelung, so herrschen in Ausbildung und Winkeln schwankende Verhältnisse.

Für den ersten Fall gibt ein Theil der aufgewachsenen Krystalle Beispiele ab, für den zweiten ein Theil der eingewachsenen, zum dritten tragen alle Vorkommen bei. — Ich sehe hierin z. Theil die Erklärung der schwankenden Winkelverhältnisse des Leucits, zum anderen Theil mögen Zwillingslamellen ihren Antheil daran haben, vornehmlich aber wird die Art des Uebergangs und der Verlauf des-

1) An Stelle dieser Gruppirung könnte man auch eine Zwillingsbildung anzunehmen versucht sein, bei der nach vier Flächen des ehemaligen Dodekaëders zu einem Krystall vier Individuen in Zwillingsstellung stehen und der erste Krystall sich nach unten fortsetzt, so daß im Ganzen doch 6 Theile herauskommen. — Ich glaube nicht, daß dem die Krystalle und die Art ihrer Bildung entsprechen, bei welcher von den 3 + 6 Symmetrieebenen des regulären Systems, 6 zu Verlust gingen und 3 sich differenzirten. — Genaues läßt sich zur Zeit, da Angaben über die Grunddimensionen der meisten eingewachsenen Leucite fehlen, vom geometrischen Standpunkte nicht aussagen, indessen scheint mir die obengemachte Annahme, welche die optische Structur nicht als ursprüngliche ansieht, den Vorzug zu verdienen. Auch die einheitliche Auslöschung und das sonstige Verhalten der Würfelmedianschliffe spricht gegen die andere Ansicht.

selben aus dem ursprünglichen (regulären) Zustand in den nunmehrigen (rhombischen) auch das Seinige dazu beigetragen haben.

d. Untersuchung von Leuciten, welche gesteinsbildend auftreten.

Es lag nicht in meiner Absicht hier eine umfassende Darstellung zu geben, sondern ich wollte nur die mir zu Gebote stehenden Vorkommen von Leucitgesteinen darauf prüfen, ob die Structur der in ihnen enthaltenen Krystalle dieselbe sei, wie die der anderen.

Da machte ich denn vor allen Dingen die Bemerkung, daß in den Leuciten der untenstehend genannten Gesteine Zwillingslamellen überall (einigermaßen dicke Schliffe vorausgesetzt) zu sehen waren, und die Zusammensetzung aus mehreren Individuen ebenfalls öfters zu erkennen war. Setzt letztere aber schon voraus, daß Krystalle und keine krystallinischen Partien vorliegen, so fordert eine deutliche Feldertheilung wohlbegrenzte größere Individuen und zeigt sich nicht, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Dieß spricht für den secundären Charakter der hier in Frage kommenden Structur hinwiederum: sie ist abhängig von den Umgrenzungselementen. — Wo ich Einschlüsse in bekannter Weise einzeln und regellos oder zonenartig gruppirt fand, da setzen dieselben über die Grenzen der optischen Felder weg und beweisen auch hier, daß die optische Structur erst zu Stande kam, nachdem das Gebilde entstanden war.

Der Charakter der Doppelbrechung läßt sich an allen Vorkommen, die deutliche Feldertheilung und nicht zu complicirte Schlifflagen zeigen, wie oben geschildert, bestimmen. Er war überall positiv, nirgends negativ [1]).

Wo diese Prüfung geschehen konnte, wo also auch deutliche Feldertheilung nachweisbar war, ist der Fundort des betreffenden Gesteins in der Liste mit einem * bezeichnet. Ich untersuchte:

1. Von Leucitophyren die Vorkommen von:

Burgberg bei Rieden*, Engler Kopf*, Schloß Olbrück*, Perlerkopf und Dachsbusch in der Gegend des Laacher Sees und in der Eifel.

2. Von Leucittephriten:

Tavolato* und Borghetto* bei Rom, Civita Castellana bei Viterbo*, Rocca Monfina* bei Neapel und die diversen in der Rosen-

1) Gar manche Vorkommen, die hier aufgezählt und nicht eingehender erforscht sind, werden in geeigneteren Schliffen, als ich sie besaß, noch den Charakter der Doppelbrechung ihrer Leucite bestimmen lassen.

busch-Fuess'schen Sammlung typischer Gesteine des Kaiserstuhls enthaltenen Leucittephrite.

3. Von Leucitbasaniten:

Verschiedene Laven mit der Bezeichnung Vesuv*; Vorkommen von Mte. Somma, Vesuv*; Torre dell' Annunziata, Vesuv*; Laven von 1631, 1751*, 1767, 1779, 1804, 1813, 1822, 1835, 1868, 1872; Laven von San Sebastiano und Camaldoli, Vesuv.

4. Von Leucititen:

Acqua acetosa*[1]), Albano*, Frascati*, und diverse andere Vorkommen des Albaner Gebirgs.

Was die Untersuchung des optischen Verhaltens der Leucite bei höherer Temperatur anlangt, so kann ich mich hier auf das beschränken, was ich früher bezüglich des Einflusses der Wärme auf die optischen Eigenschaften jenes Minerals mittheilte.

Die sämmtlichen Vorkommen, welche optisch geprüft wurden, unterlagen auch einer Untersuchung in jener Hinsicht und zeigten in Schliffen beliebiger Orientirung das Isotropwerden bei höherer Temperatur, sowie, nach der Erwärmung, in verschiedenen Fällen verschieden stark, Veränderungen im Zwillingsbau.

Recht sehr hätte ich gewünscht, die Temperatur bestimmen zu können, bei der das Isotropwerden eintritt, allein mit den mir zu Gebote stehenden Mitteln war dieß nicht erreichbar. Wenn ich früher aussagen konnte[2]), daß der Leucit später als der Boracit isotrop wird, (265° C. nach Mallard) und die Aenderung der Gleichgewichtslage vielleicht unter der Temperatur des schmelzenden Zinks (433° C.) liegt, so lehren meine neuen Versuche, welche mit einem besonders dazu hergerichteten Heizgefäß vorgenommen wurden, das mit einem Geissler'schen Thermometer (mit Stickstofffüllung über dem Quecksilber) versehen ist, daß auch bei 450° C. jene Aenderung noch nicht eintritt. Die Verdunkelung der Platte ist aber bei dieser Temperatur schon so stark, daß man, nach Analogie des Verlaufs der betreffenden Erscheinung beim Boracit, anzunehmen berechtigt ist, die Umwandlungstemperatur sei nicht sehr weit von jener Beobachtungsgrenze entfernt. —

Von Interesse möchte schließlich noch die Bemerkung sein, daß

---

1) An Krystallen dieses Vorkommens bestimmte ich die Doppelbrechung als positiv dadurch, daß Medianwürfelschliffe, die eine Zusammensetzung aus drei Grundkrystallen zu erkennen gaben, mit dem Gypsblättchen in bekannter Weise untersucht wurden; vergl. pag. 458.

2) Vergl. N. Jahrb. f. Min. 1884. II. p. 50.

man beim Erwärmen einer Leucit-Platte vermittelst eines Bunsen'schen Brenners im Mikroskop schön die Erscheinung des Isotropwerdens derselben sehen kann, wenn sie grade eben den äußeren Flammenmantel berührt. Diese Erscheinung hält dann an, so lange die Platte im äußeren Mantel bleibt und hört auf, sowie sie in den inneren Mantel der Flamme gelangt, wo bekanntlich eine verhältnißmäßig sehr viel niedrigere Temperatur herrscht.

III. Zusammenstellung der Resultate, Schlüsse und Vergleiche.

Im Vorstehenden hoffe ich, im Anschluß an frühere dießbezügliche Ansichten anderer Forscher, erwiesen zu haben, daß der Leucit rhombisch ist, dabei aber im optischen Befund eine große Annäherung an das quadratische System zeigt, wie er im geometrischen Bau, was alle Forscher, die sich damit beschäftigt haben, aussagen, sich regulärer Bildung zuneigt.

Der Aufbau der Krystalle ist im Allgemeinen so, daß drei sich durchkreuzende Grundindividuen vorkommen [1]), die entweder gleichmäßig oder ungleichmäßig entwickelt sein können, von denen aber auch eins zur ausschließlichen Herrschaft gelangt sein kann. Diese Grundindividuen sind verzwillingt nach allen Flächen des Dodekaëders früherer Bedeutung, und es kommen — soweit wenigstens meine Beobachtungen reichen — keine Fälle vor, in denen man mehr als die vollkommen dodekaëdrische Zwillingsbildung in den Grundindividuen zur Erklärung der Erscheinungen annehmen müßte.

Mögen diese Erscheinungen alle mit dem Wesen des rhombischen Systems wohl vereinbar sein, so sind doch der schwankende Befund in den Winkelwerthen der einzelnen Vorkommen, der reguläre Formentypus der Krystalle, das eigenthümliche Verhalten der Einschlüsse, die sich nicht an die optischen Grenzen der Individuen binden, sondern in ihrem Verlauf so ausnehmen, als habe bei ihrer Bildung gar nichts von differentem Felderbau bestanden, weiterhin ihr Einfluß auf die optische Structur und endlich der der Sprünge in den Krystallen auf dieselbe — alles Momente, die berechtigen an der Ursprünglichkeit des Zustandes, wie ihn der Leucit jetzt darbietet, zu zweifeln, und dieses Mineral nicht als eine ursprüngliche Bildung von Theilen niederer Symmetrie zu betrachten.

Die Leucite, wie sie in der Natur vorkommen [2]), haben sich ge-

1) Eine Structur, die genau der von Ben Saude am Analcim und mir an den Ikositetraëdern des Wilui-Granat beobachteten entspricht, habe ich nicht bemerkt.

2) Die niedrigste Bildungstemperatur einer künstlichen Darstellung durch



wiß bei sehr hohen Temperaturen gebildet und waren, wie ihr jetziges Verhalten beim Erwärmen zeigt, dann isotrop.

Ein isotroper Körper mit den Formen des regelmäßigsten Krystallsystems ist aber ein regulärer und somit, glaube ich, besteht nicht der geringste Widerspruch, wenn man unter der Annahme, der Leucit sei bei der Bildung regulär gewesen und habe bei der Abkühlung durch Aenderung seiner Molecularstructur diesen Zustand aufgegeben, die Erscheinungen zu erklären sucht, welche dieses Mineral uns jetzt darbietet.

Die Temperatur, bei der die Systemänderung vor sich ging, war aber immerhin eine hohe, wenngleich eine bedeutend unter der Bildungstemperatur liegende. Bei jener Temperatur befand sich der Leucit in einem solchen Zustand der Beweglichkeit seiner kleinsten Theilchen, daß bei der Aenderung des Moleculargefüges auch die äußere Form nachgab und daher keine merkliche Spannung der neuen Anordnung im Rahmen der Form übrig blieb. Die Folge davon ist die schwache Doppelbrechung der Substanz.

Insofern zeigt der Leucit keine Aehnlichkeit mit einem anderen Körper, der sich offenbar auch regulär gebildet hat, es aber vermochte, als die Umstände, die bei seiner Krystallisation in Action traten, außer Wirkung kamen, seine äußere Form bei eintretender Aenderung des Molekulargefüges zu bewahren — ich meine den Boracit [1]).

Der Leucit ist jetzt rhombisch nach Form und optischen Eigenschaften. Der Boracit hat ebenfalls rhombisches Gefüge, aber seine äußere reguläre Form ist dabei nicht zu Verlust gegangen.

Fragt man nach den Ursachen, so ist beim Leucit die große Differenz zwischen Bildungstemperatur und seiner heutigen genügend zur Erklärung. Beim Boracit war aber offenbar zwischen Bildungstemperatur und der, unter welcher wir ihn heute beobachten, kein so großer Unterschied, als daß es einer dadurch eingeleiteten Contraction möglich gewesen wäre, den Rahmen der Form zu durchbrechen.

Dieser Annahme werden namentlich die Aetzfiguren beider Mineralien gerecht, die beim Leucit dem neu erlangten, beim Boracit dem von früher her in der Formenanlage bewahrten System entsprechen [2]).

Hautefeuille wird zu 800° C. angegeben. Vergl. Fouqué et Lévy Synthèse des minéraux et des roches 1882. p. 152.

1) Die Beziehungen zum Analcim zu erörtern überlasse ich einer demnächst erscheinenden anderen Arbeit.

2) Ich beziehe mich hierbei auf die von mir am Boracit beobachteten Aetzfiguren, von denen ich durch abgebildete Präparate bewiesen habe, daß sich jene Figuren auf den Feldern differenter und gleicher optischer Bedeutung

Bei beiden Mineralien zeigt sich überdieß eine Abhängigkeit der optischen Structur von den Begrenzungselementen, eine wenig gefestigte Gleichgewichtslage der neuen Anordnung im optischen Sinne, die durch das Schwanken der Zwillingstheile, durch den Einfluß der Einschlüsse auf die optische Structur u. s. w. zur Geltung kommt.

Freilich liegen beim Boracit die Verhältnisse nicht so günstig wie beim Leucit für die Annahme eines ursprünglich regulären Systems und in den Augen gar manchen Forschers ist der Boracit ein mimetisch Gebilde, zusammengesetzt durch ursprünglichen Aufbau von Theilen niederer Symmetrie!

Ich glaube, daß diese Ansicht nicht die richtige ist.

Stellen wir den Boracit künstlich dar, so sind seine Krystalle, die sich bei hoher Temperatur bildeten, reguläre, geneigtflächig hemiedrische Gestalten. Dieselben erweisen sich unter gewöhnlichen Verhältnissen als pyroelektrisch [1]) und, nach neueren Untersuchungen [2]), als optisch wirksam, dabei in Theile zerfällt, genau wie die entsprechenden natürlichen Gebilde. Da nun solche künstlich dargestellten Krystalle, wie die natürlichen, beim Erwärmen auch wieder isotrop werden [3]), so ergibt sich aus all' dem die vollständige Gleichheit beider zu erkennen.

---

in soweit gleich verhalten, als sie gleichmäßig in einem Sinne angeordnet sind und über die Grenzen der optischen Felder weg setzen, als wären dieselben nicht vorhanden. Was die vorkommenden Verschiedenheiten in den Figuren anlangt, so stellen sich dergleichen sowohl auf Feldern gleicher, als verschiedener optischer Bedeutung ein und sind nur solche, die sich durch verschiedene Ausbildung einer und derselben Hauptgruppe von Figuren unter Wahrung der allen Gliedern derselben zukommenden gleichen Symmetrie erklären. — Dieser Nachweis wird von denen, die den Boracit als mimetisch ansehen, vollkommen ignorirt, — eine bequeme Art allerdings mit einer unbequemen Thatsache sich abzufinden. — Ich sehe mich daher genöthigt nochmals auf meine dießbezüglichen Veröffentlichungen, namentlich im N. Jahrb. für Mineralogie 1880. II. p. 227—230, p. 240—241.; ibidem 1881. I. p. 245—248 u. 256. zu verweisen.

1) Léon Bourgeois. Reproduction artificielle des minéraux 1884. p. 155.

2) Ibidem pag. 156.

3) Da auf meine an Herrn Collegen Volhard in Halle gerichtete Anfrage derselbe mir gütigst mittheilte, die von Heintz seiner Zeit dargestellten Boracite (Pogg. Ann. 1860. B. CX. p. 615) seien nicht mehr aufzufinden, so ersuchte ich Herrn Dr. Jannasch dahier um eine Reproduction dieses Minerals nach der Heintz'schen Methode.

Es wurde nach derselben ein Gemisch rhombischer Borate und zahlreicher tetraedrisch gebildeter Boracite erhalten.

Letztere wurden isolirt und zeigten, im Diphenylaminbade auf 290° C. erhitzt, keine Spur von Schmelzung. Dieselbe trat erst vor der Gebläselampe ein. Ebenso verhielt sich in letzterer Hinsicht das ursprüngliche Gemisch.

Der künstliche Boracit, welcher sich bei Temperaturen bildete, die über 265° C. lagen und dabei geometrisch als regulärer Körper in Erscheinung trat, hat nunmehr die Eigenschaft der Isotropie verloren.

Ebenso sind die natürlichen Krystalle, mit gleicher Form begabt, zur Zeit nicht isotrop.

Daraus folgt, daß bei der Bildung beider Arten von Krystallen zwar die Umstände solche waren, daß durch sie dieselbe Wirkung erzeugt wurde, daß aber jetzt natürlicher, wie künstlicher Boracit unter anderen Umständen uns entgegen treten.

Welcher Art mögen diese Umstände beim natürlichen Vorkommen gewesen sein? An sehr hohe Temperatur ist sicherlich dabei nicht zu denken, und die Annahme einer solchen allein allerdings aus geologischen Gründen — wenn auch nicht absolut unmöglich — so doch mehr als unwahrscheinlich.

Da ich in meiner letzten Arbeit über den Boracit [1]) die Umstände bei der Bildung zwar ganz allgemein als dem Zustandekommen des regulären Systems günstig hingestellt, nachher aber vielleicht die Temperatur etwas über Gebühr betont habe, so halte ich mich zu der Erklärung verpflichtet, daß ich nicht der Ansicht bin, der natürliche Boracit habe sich unter alleiniger Wirkung der Wärme gebildet. Daß Wärme dabei mit im Spiel gewesen sein mag, wird man billig gelten lassen können, wie erheblich ihr Antheil an der Erreichung jenes regulären Zustandes war, entzieht sich völlig unserer Schätzung. Welcher Art mögen nun die anderen Umstände gewesen sein? — Ich dachte dabei wohl an Druck, der ja den Schmelzpunkt ändert, und hätte diese Fähigkeit auch auf die Aenderung der Temperatur übertragen können, bei der das System umschlägt. Indessen schienen mir damals solche Schlüsse zu gewagt. — Da nun aber neuerdings Mallard und Le Chatelier [2]) nachgewiesen haben, daß bei einem Druck von 2475 Kgr. per Quadratcentimeter das hexagonale Jodsilber bei 20° C. schon regulär wird, eine Eigenschaft, die es unter gewöhnlichen Temperaturverhältnissen erst bei 146° C. erlangt, so kann man wohl diesen Factor bei der Kry-

---

Es geht aus diesen Versuchen Jannasch's hervor, daß der künstliche Boracit, rein oder mit den anderen Producten gemischt, erst weit über 265° C. fest wird, — also unter Umständen, bei denen er isotrop ist.

Meine optischen Prüfungen bestätigen Bourgeois' Angaben vollkommen und zeigen, daß die optisch wirksamen Krystalle bei höherer Temperatur isotrop werden.

1) Neues Jahrb. f. Mineralogie 1884. I. p. 237.

2) Comptes rendus T. XCIX. II Sem. 1884. Nr. 2.

stallisation des natürlichen Boracits auch in Rechnung ziehen, zumal geologische Gründe nicht seiner Annahme widersprechen. Daneben wirkten aber vielleicht noch andere, zur Zeit nicht genügend gekannte Einflüsse mit.

Jedenfalls fordert uns bei diesem Mineral die Form auf, das reguläre System für die erste Anlage nicht zu verlassen, und es scheint mir, wie ich es schon früher aussprach, hier und in anderen Fällen, in denen uns ein scheinbar gesetzwidriges Verhalten gewisser Erscheinungen entgegentritt, viel richtiger zu sein, nach den Gründen zu forschen, als das dem Gesetz sich nicht Fügende seinerseits zum Gesetz zu erheben.

Hält man dieß fest und verfährt danach, so erweisen sich die Krystallsysteme des Leucits und des Boracits als eng verknüpft und stellen sich als zu den interessantesten des Mineralreichs gehörend dar.

Erklärung der Tafel.

Fig. 1. Lage der kleineren Elasticitätsaxe MM′ zu den Polarisationsebenen der gekreuzten Nicols NN′.

Fig. 2. Schema der Elasticitätsaxen in einem optisch zweiaxigen, positiven Leucitkrystall.

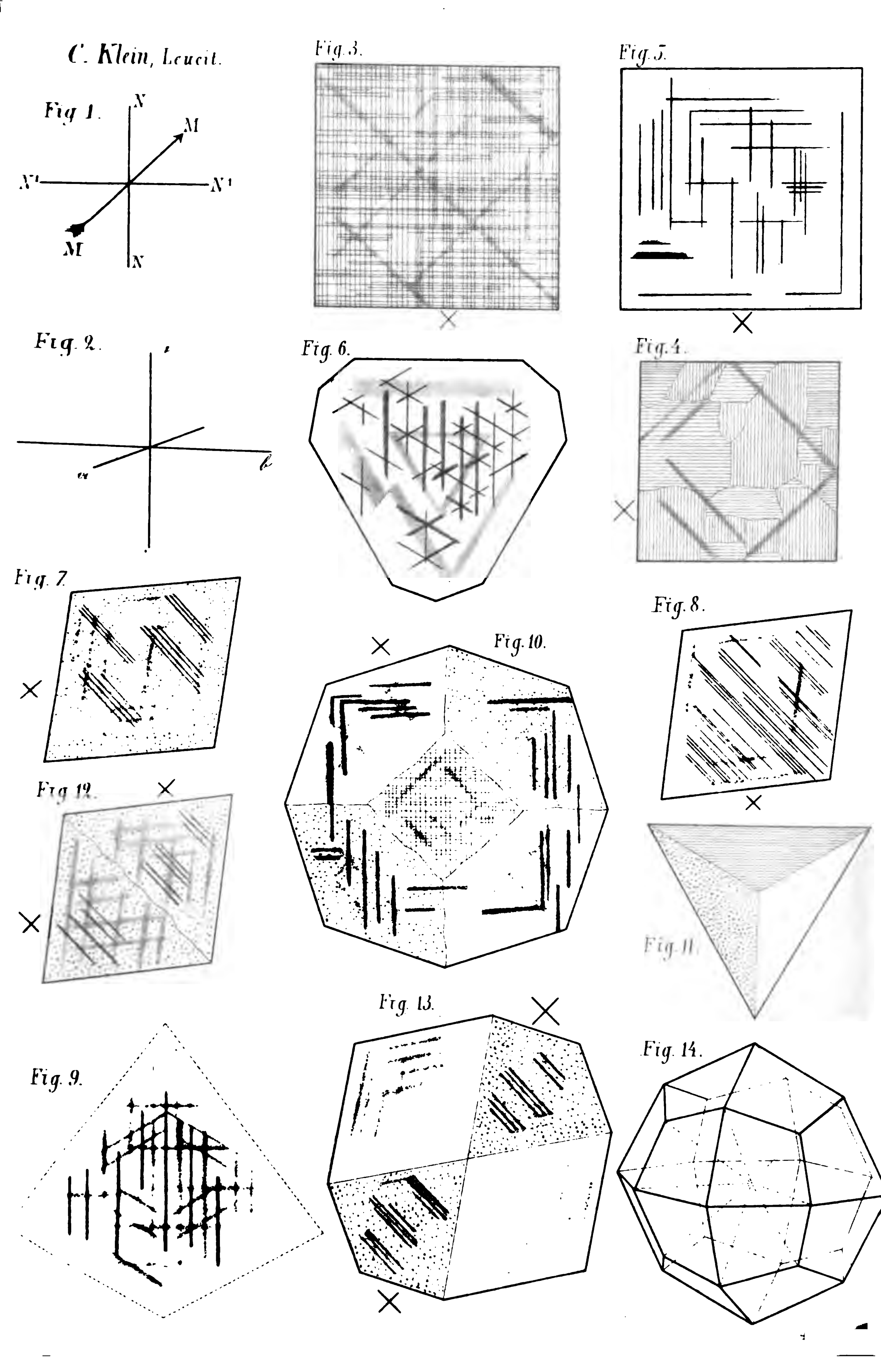
Fig. 3. Schliff[1]) parallel 0P(001), aus einem Leucit-Krystalle von Frascati bei Rom. (Auch von einem aufgewachsenen Krystalle des Vesuvs). Die Platte ist aus einem Krystalle der scheinbaren Form 2O2(211) genommen, die aus einem Grundindividuum mit Zwillingslamellen besteht, und geht durch die vier in einem oktaëdrischen Eck zusammenstoßenden Flächen. Die zahlreichen, scharf einsetzenden Lamellen sind nach ∞P(110), die weniger zahlreichen, verschwommen erscheinenden nach 2P$\breve{\infty}$(021) und 2P$\bar{\infty}$(201) eingelagert. — Fall der Kreuzung der Lamellen.

Fig. 4. Schliff gleicher Lage, von demselben Fundort. — Fall des Absetzens der zu einander annähernd normal stehenden Lamellenzüge.

Fig. 5. Schliff parallel der vorderen oder seitlichen Endfläche, aus einem wie Fig. 3 beschaffenen Leucit von Frascati. Die denselben diagonal durchsetzenden verschwommenen Lamellen sind nach dem Prisma und dem einen der beiden Domen

---

1) Die Betrachtung geschieht hier und in der Folge im polarisirten Licht unter Anwendung eines Gypsblättchen vom Roth I. Ordnung.


C. Klein, Leucit.
Fig. 1.
N
M
N'
N'
M
N
Fig. 2.
a
b
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.

eingelagert; sie schneiden schräg ein; die nach den Seiten des Schliffs liegenden, scharf einsetzenden Lamellen gehen nach den Flächen des anderen der beiden Domen; ihr Einsetzen erfolgt normal zum Schliffe.

Fig. 6. Schliff parallel dem Oktaëder früherer Auffassung. Leucit von Frascati (oder von einem aufgewachsenen Vesuvkrystall). Die scharf einsetzenden drei Lamellenzüge, rechtwinkelig zu den längeren Umgrenzungselementen der Figur gelagert, beweisen mit den drei verschwommen erscheinenden, parallel jenen Umgrenzungen gestellt, die vollkommen dodekaëdrische Zwillingsbildung. — Es ist hier nur die Anordnung beider Lamellensysteme dargestellt.

Fig. 7. Schliff parallel dem Rhombendodekaëder früherer Auffassung. Leucit von Frascati. Die Schliffläche hat die optische Bedeutung eines rhombischen Doma's und wird in der Diagonalstellung blau bei der Untersuchung mit dem Gypsblättchen. (In der Figur ist das Blau durch getüpfelt dargestellt). Verschwommen erscheinende Lamellen ziehen nach den Seiten, scharf einsetzende nach den kurzen Diagonalen des Schliffs durch denselben.

Fig. 8. Schliff nach $\infty O(110)$ desselben Vorkommens. Bedeutung des Schliffs $= \infty P(110)$. Die Anordnung der Lamellen ist wie im vorhergehenden Falle zu bemerken, doch erscheint die Bildung nach der kurzen Diagonale durchgreifender und herrscht bisweilen sogar allein. Der Schliff zeigt, wenn er zu MM' des Gypsblättchens wie der vorige gestellt wird, einen gelben Ton. (In der Figur weiß gelassen).

Fig. 9. Schliff aus einem Leucit von Frascati nach einer Fläche von $2O2(211)$, nicht ganz von der Oberfläche her. Es sind die Umgrenzungen letzterer gestrichelt angegeben. Zu bemerken ist ein System scharf einschneidender Lamellen, dazu ein zweites, damit paralleles, von verschwommenem Ansehen. Zur Bildung dieser Systeme tragen eine, resp. zwei Flächen des Dodekaëders bei. Senkrecht zur letzteren Lamellenrichtung liegt ein anderes System verschwommener Lamellen; dieses und das vorige bilden die Diagonalen zu den Seiten eines Rhombus, der selbst von zwei ferneren Richtungen gebildet wird. Die diesen Richtungen entsprechenden Lamellen sind ebenfalls verschwommen. Alle bezeichneten Lamellen entsprechen nach ihrer Lage den sechs Richtungen am Dodekaëder, so daß damit die vollkommen dodekaëdrische Zwillingsbildung wiederum erfüllt wird.

Fig. 10. Schliff nach dem Würfel früherer Auffassung aus einem Leucitkrystall vom Vesuv. (Vorkommen von 1855 u. 1847). Derselbe hat ungefähr die Lage der Medianebene und zeigt die Zusammensetzung des Krystalls aus drei Grundindividuen an. Die Lamellen in denselben verlaufen, wie in Platten senkrecht resp. parallel der ersten Mittellinie eines Grundindividuums.

Fig. 11. Schliff nach dem Oktaëder früherer Auffassung aus einem Leucit vom Vesuv. (Vorkommen v. 1847 u. 1855). Die Zusammensetzung des Krystalls ist wie bei Nr. 10. Es zeigt sich Dreitheilung nach den Ecken. Die Felder werden, in der Stellung der Figur mit dem Gypsblättchen geprüft: Roth (horizontal schraffirt), blau (getüpfelt), gelb (weiß). — Zwillingslamellen sind wegen Darstellung der Feldertheilung nicht eingezeichnet.

Fig. 12. Schliff nach dem Rhombendodekaëder früherer Auffassung aus einem Leucit vom Vesuv. (Vorkommen von 1847). Die Zusammensetzung des Krystalls ist wie in Fig. 10. Im polarisirten Lichte erkennt man die Zweitheilung der Platte durch Auslöschungsdifferenzen nicht, bisweilen aber eine Feldergrenze schon ohne feinere optische Hülfsmittel. Die Lamellen verhalten sich in jedem Theile des Schliffs wie im Grundindividuum.

Fig. 13. Medianschliff derselben Lage aus demselben Krystall. Die Felder der zwei ersten Individuen keilen sich aus und wirken in Diagonalstellung anders auf das Gypsblättchen (blau) als die der sich einschiebenden, zu einander parallel gestellten Individuen (gelb).

Fig. 14. Idealer Fall der Zusammensetzung von 2O2(211) früherer Auffassung aus drei sich durchkreuzenden, mit ihren Iten Mittellinien in der Richtung der a-Axen des regulären Systems gelagerten Individuen. Eine Hälfte eines solchen ist gestrichelt dargestellt.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

10. December. **№ 12.** 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 8. November 1884.

Wüstenfeld, Jemen im XI. (XVII.) Jahrhundert. Die Kriege der Türken, die arabischen Imame und die Gelehrten. 2. Abtheilung. (Erscheint in den Abhandlungen).

Wieseler, über einige beachtenswerthe Bildwerke zu Trier.

Bechtel, Thasische Inschriften Ionischen Dialects im Louvre. (Erscheint in den Abhandlungen).

Brock, 1. über die Entwicklung der Geschlechtsorgane der Pulmonaten. 2. zur Systematik des Genus Liligoptis (Leachia Lesueur). (Vorgelegt von Ehlers).

Pfeiffer, über die titrimetrische Bestimmung des Harnstoffs. (Vorgelegt von Henneberg.)

Minnigerode (Correspondent), Untersuchungen über die Symmetrie-Verhältnisse und die Elasticität der Krystalle. 3. Abhdlg.

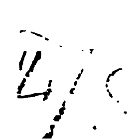
Thomae (Correspondent), Bemerkungen über die Gaussische Reihe.

Ueber einige beachtenswerthe Bildwerke zu Trier.

Von

Friedrich Wieseler.

Während meines Aufenthalts zu Trier in den verwichenen Michaelisferien lernte ich drei Cameen und ein Steinrelief kennen, welche ich nicht umhin kann unverzüglich zu weiterer Kunde zu bringen.



I.

Von den Cameen nimmt durch seine Dimensionen (10 Centimeter Breite und 7³/₄ Höhe) und durch das Interesse, welches die Darstellung bietet, den ersten Platz ein der queroblonge Sardonyx von drei Lagen an dem Metalldeckel des sogenannten von Ada, Schwester Carls des Großen, nach Trier geschenkten Codex aureus in der dortigen Stadtbibliothek. Eine Inschrift sagt aus, daß hanc tabulam fieri fecit abbas Otto de Elten anno MCCCCXCIX. Das Werk ist verhältnißmäßig gut erhalten. Ich kann bei der Beschreibung der Darstellung eine Photographie der Deckeltafel benutzen, welche im Verlage der Lintz'schen Buchhandlung in Trier erschienen ist.

Gleich bei dem ersten Anblick des Originals erinnerte ich mich an die Abbildung eines Cameos, welche in Clarac's Mus. de sculpt. T. VI, pl. 1052 mitgetheilt ist. Der Verfasser des Textes weiß, ebenso wie sein gleich zu erwähnender Gewährsmann, von dem Aufbewahrungsorte des Originals nichts zu sagen. Er bezeichnet dasselbe nur als camée fragmenté, présentant Claude et sa famille, indem er die dargestellten Personen, von links nach rechts gehend, so bezeichnet: 3270 D Octavia, 3269 B Claude, 3270 Drusus, 3269 I Messalina, 3270 B Britannicus. Er bemerkt außerdem noch: Visconti n'a donné que la zone intermédiaire occupée par les bustes; au-dessus et au-dessous sont deux aigles. Die beiden Adler au-dessus fehlen allerdings auf dem Trier'schen Cameo und können auf demselben nie vorhanden gewesen sein. Aber sie beruhen auch nur auf Irrthum des Verfassers des Clarac'schen Textes. Mongez, aus dessen Iconographie Rom. pl. 29, n. 2 die Clarac'sche Abbildung geschöpft ist, wie auch die obenerwähnte Erklärung, sagt p. 217 fg.: la gravure n'est qu'une portion d'un camée, la portion qui n'a pas été gravée, et qui est de plus grande du double que celle ci, ne présente que deux aigles. Das paßt durchaus auf den Trier'schen Cameo. Wenn die Abbildungen dem Original und der Photographie in manchen Details nicht ganz entsprechen, so rührt das nur von der Ungenauigkeit jener her. Der Kopf der zweiten und der vierten Büste ist ein wenig seitwärts gewendet, der erste nach links, der andere nach rechts. Beide Köpfe nehmen sich im Gesicht jugendlicher aus und ebenso die beiden Kinderköpfe. Am ungenauesten ist der Kopf der vierten Büste behandelt, an welchem wesentlich nur die Angabe der Beschädigung oben richtig ist. Er reicht noch ein klein wenig mehr nach oben hinauf als der der zweiten Büste. Das Haar ist falsch ausgeführt. Es ist deutlich nicht das eines Weibes, sondern das eines Mannes, sowie das Gesicht das eines angehenden Jünglings ist. Der Kopf ist deutlich einmal abgebrochen gewesen nebst dem Theile des

Halses rechts (links von der Figur). Auch unmittelbar unterhalb des Kopfes der Büste zumeist nach rechts gewahrt man eine Bruchlinie. Der Cameo hat an den Gesichtern der Büsten außerdem durch Abschaben gelitten.

Die fünf vollständig oder beinahe en face dargestellten Büsten kommen oberhalb eines Gegenstandes zum Vorschein, welcher sich wie eine Mauer oder Wand ausnimmt. Vor oder an diesem Gegenstande erscheinen unten die beiden Adler, welche die Flügel gehoben haben und sich so ausnehmen, als wären sie im Kampfe begriffen gewesen und wollten sie sich nun von einander trennen, der eine nach links, der andere nach rechts hin, wobei sie sich aber die Köpfe zuwenden. Der Gegenstand ist aus derselben weißen Lage gearbeitet wie die Büsten, an denen nur ein Theil des Kopfschmucks zu der braunen Lage gehört, während die Adler ganz in dieser ausgeführt sind. An dem Adler rechts vom Beschauer ist die rechte Kralle sowie das ganze linke Bein und der unterste Theil des linken Flügels nicht ausgeführt, die beiden letzten Partien anscheinend in Folge eines Fehlers im Stein. An dem Adler links vom Beschauer kommt die äusserste Partie des rechten Flügels nicht zum Vorschein. Er nimmt sich ganz aus wie als ob er abgeschnitten wäre.

Man darf wohl annehmen, daß es sich um die Vorderseite eines Postaments für die fünf Büsten handeln soll, an dem man sich unten die beiden Adler als in Relief angebracht zu denken habe.

Die Adler stehen offenbar in Beziehung auf eine oder auf zwei der oben in den Büsten dargestellten Personen, die ohne Zweifel einer und derselben kaiserlichen Familie angehören.

Daß es an sich nicht nöthig ist, die beiden Adler auf zwei verschiedene Personen zu beziehen (wie es allerdings in Betreff der Ptolemäermünzen der Fall ist, vgl. die Beispiele bei Poole Catal. of Gr. coins, the Ptolemies, London 1883, pl. V, n. 7, X, n. 6, XXVI, n. 7, 8, 9, 12, XXVIII, n. 6 u. 7, XXX, n. 4, auch p. 34, 49, 52), darf man mit Sicherheit behaupten. Hat doch auch Juppiter nicht nur einen, sondern mehrere Adler.

Es wird zweckmäßig sein, hierauf gelegentlich etwas genauer einzugehen.

Auf dem höchsten Gipfel des Lykäischen Berges in Arkadien befand sich ein aus Erde aufgeschütteter Altar des Zeus und vor ihm auf je einer Säule ein nach Sonnenaufgang schauender Adler, vgl. Pausanias VIII, 38, 5. Dieses Beispiel kann nur dann hiehergezogen werden, wenn man voraussetzen zu können glaubt, daß es sich um einen männlichen und einen weiblichen Adler als Paar handelte.

Sonst wird man nur einen Fall jener architektonischen Symmetrie anzunehmen haben, bei welcher das doppelte Bild keinesweges auf zwei besondere Wesen hindeutet. Ist nun der in Rede stehende Fall als ein sicherer Beleg für die Annahme mehr als eines Adlers bei Zeus nicht zu betrachten, so steht es ohne Zweifel anders in Betreff der bekannten Sage über die Ermittelung des Delphischen Omphalos als Mittelpunkt der Erde durch Zeus, der einen Adler von Osten und einen anderen von Westen gleichen Fluges habe fliegen lassen, die dann am Omphalos zusammengetroffen seien, einer Sage, die auch in Bildwerken dargestellt war und noch jetzt, wenn auch nur auf einer Münze, dargestellt gefunden wird, jedenfalls aber erst dann aufgekommen ist, nachdem das Orakel zu Delphi politischer und geistiger Mittelpunkt geworden war, vgl. Strabo IX, 3, p. 419, schol. z. Pindar. Pyth. IV, 6, schol. z. Lucian. de saltat. Vol. IV, p. 144 Jacobitz (wo für *αἰετὸν* zu schreiben sein wird *αἰετώ*), Plutarch de def. or. 1 [1]), Num. Chronicle, N. S., Vol. XVI, pl. VIII, n. 6, vgl. Head p. 279.

Es kann nicht wohl bezweifelt werden, daß man ursprünglich nicht bloß mehrere, sondern alle Adler als dem Zeus heilig und untergeben betrachtete. Aeschylos sprach in der Niobe (fragm. 155 Nauck) von *πτεροφόροισιν ἀετοῖς*. Von Sophokles werden in der An-

1) Ohne Zweifel war auch in der Stelle des Euripides Ion. 222 fg. von den beiden Vögeln die Rede:

ΧΟ. ἆρ' ὄντως μέσον ὀμφαλὸν
γᾶς Φοίβου κατέχει δόμος;
ΙΩΝ. στέμμασί γ' ἐνδυτόν, ἀμφὶ δὲ Γοργόνες.
ΧΟ. οὕτω καὶ φάτις αὐδᾷ.

Ich habe freilich in den Annal. d. Instit. di corrisp. arch. Vol. XXIX, 1857, p. 176 fg. vermuthet, daß das ohne allen Zweifel verderbte *Γοργόνες* durch die Schreibung *γοργόνες* gebessert werden könne, so daß von dem aus Bildwerken bekannten Netz um den Omphalos die Rede wäre, und Ad. Michaelis hat mir darin beigepflichtet, auch ist in Nauck's dritter Ausgabe wirklich *γοργόνες* geschrieben. Allein ganz abgesehen davon, daß es doch noch fraglich sein kann, ob *γοργόνες* wirklich in der Bedeutung von »Netze« gebraucht ist, so läßt mich Vs 225 an der Richtigkeit jener Herstellung zweifeln. Die Sage sprach schwerlich von den Binden und dem Netze, die wir allerdings auf Bildwerken erblicken, sondern von den öfter erwähnten Vögeln. Ich halte es deshalb jetzt für entschieden wahrscheinlich, daß zu schreiben ist: *ἀμφὶ δέ γ' ὄρνεις. 'Αμφὶ* steht dem *ἔνδυτον* nicht gleich. Daß Euripides nicht geradezu Adler nannte, kann seinen guten Grund haben. Der älteste Gewährsmann, Pindar Pyth. IV, 4, erwähnt allerdings goldene Adler. Bei Strabon werden aber nur *αἱ εἰκόνες τοῦ μύθου,* ohne Angabe der Art der Vögel, genannt. Plutarch spricht von »Adlern oder Schwänen«. Vielleicht bestand schon in Euripides' Zeit ein Schwanken hinsichtlich dieser Vögel.

tigone Vs 1040 fg. *οἱ Ζηνὸς αἰετοὶ* so erwähnt, daß zugleich erhellt, daß dieselben als neben dem Throne des Gottes lagernd gedacht wurden. Auch die Sage bei Pseudo-Eratosthenes Catasterismi XXX, p. 156 Robert, nach welcher bei dem Loosen der Götter um die *πτηνὰ* dem Zeus der Adler zufiel, läßt sich noch auf das ganze Geschlecht beziehen. In dem Berichte des Aglaosthenes aber, welcher an dieser Stelle beigebracht wird, tritt ganz deutlich nur ein Adler auf, nämlich der, welcher den Zeus in den Kampf gegen die Titanen begleitete und dafür an den Himmel versetzt wurde. Es bedarf kaum der Bemerkung, daß die Zutheilung nur eines Adlers an Zeus wesentlich von den bildenden Künstlern ausging, denen es eigenthümlich ist, wie durch einen Baum einen ganzen Hain oder Wald, so durch ein Thier mehrere derselben Gattung oder das ganze Geschlecht zu bezeichnen. Dennoch finden wir noch in späteren Kunstwerken mehrere Adler als Diener und Helfer des Zeus und um ihn selbst herum. So in der Gigantenschlacht an der Pergamenischen Ara, ja noch auf Gemmen aus Römischer Zeit. Ein geschnittener Stein, den Overbeck Kunstmyth. II, 1, Gemmentaf. II, n. 6 in Abbildung mitgetheilt und S. 168 besprochen hat, zeigt die, wie er meint, »kaum sonst nachweisbare Thatsache«, daß dem Gotte, der den Blitz in der hinterwärts erhobenen Rechten und den Adler auf der vorgestreckten Linken hält, außerdem ein zweiter, zu seinen Füßen mit ausgespannten Flügeln dastehender Adler beigegeben ist. Inzwischen bezweifelt Overbeck mit guten Gründen die Echtheit des Steines nicht im Mindesten[1]). Die Darstellung steht in der That

1) Dagegen hält der Verfasser einer soeben erschienenen Schrift, welche sich in anerkennenswerther Weise mit dem Adlerattribut beschäftigt, K. Sittl »Der Adler und die Weltkugel als Attribute des Zeus«, bes. Abdruck aus dem vierzehnten Supplementbande der Jahrb. für class. Philologie, S. 29 die Echtheit des Steins für sehr bedenklich. Die Zweizahl der Adler, sagt er, »ist ebenso unerhört, wie daß der blitzende Gott — von Vasenbildern abgesehen — bekleidet ist. Der Fälscher bedurfte keines umfassenden Wissens, um zu erkennen, daß zwei Adler völlig singulär seien und somit den Wert der Gemme erhöhen«. Mit viel größerem Rechte kann man aus der Besonderheit der Gemmendarstellung auf ihre Echtheit schließen. Die Behauptung, daß der blitzende Gott nur auf Vasenbildern bekleidet sei, enthält einen sehr starken Irrthum. Wenn Overbeck a. a. O. angiebt, daß der blitzende Zeus in den Münztypen insgesammt nackt gebildet sei, so dachte er ohne Zweifel an die älteren. Daß der Gott auf späteren Münzen mit der Chlamys angethan erscheint, zeigt sein eigenes Werk Münztaf. V, n. 11, vgl. Denkm. d. a. K. II, 3, 35, a. Auf dem in Rede stehenden geschnittenen Steine handelt es sich freilich um ein Himation. Aber auch dieses findet sich bei dem blitzwerfenden Zeus auf Werken anderer Gattungen der Kunstübung, z. B. auf den Reliefs der Ara zu Per-

im Bereiche der geschnittenen Steine nicht vereinzelt da. Ueber einen Chalcedon des Berliner Museums lesen wir bei Toelken Erkl. Verz. der vertieft geschnittenen Steine S. 99 fg. zu n. 100 Folgendes: »Jupiter auf einem Throne sitzend, ganz bekleidet, mit Scepter und Patera in den Händen, zu seinen Füßen der aufblickende Adler und über Jupiters Haupte noch zwei schwebende Adler, von denen der größere einen Kranz im Schnabel und einen Blitz in den Klauen trägt. — Unten die Buchstaben: »*ΔΟΜЄΤΙC*«, die schwerlich anders können gelesen werden als *Δομετίανος Σεβαστός*, Domitianus Augustus; woraus erhellt, daß die schwebenden Adler sich auf den vergötterten Vater und den Bruder Domitians, die Kaiser Vespasianus und Titus beziehen«. Auch wenn die Deutung der Inschrift die richtige wäre, was ohne Zweifel nicht der Fall ist, würden die drei Adler als zu dem einen dargestellten Juppiter gehörend betrachtet werden müssen. Auf beiden Gemmen haben die Adler verschiedene Beziehungen zu dem Gotte. Der auf jeder von ihnen sich wiederholende, auch sonst so oft dargestellte zu den Füßen des Gottes ist dessen gewöhnlicher Diener und Begleiter. Der auf dem an erster Stelle erwähnten Steine, welcher auf der linken Hand seines Herrn sitzt ohne die Flügel zu heben, indem er auf diesen und den Blitz seine Blicke richtet, harrt vermuthlich auf das Werfen des Blitzes, um sich, sobald als dieses geschieht, auf den Getroffenen zu stürzen, ähnlich wie nicht selten auf Darstellungen der den Pfeil absendenden Artemis deren Hund. Von den beiden anderen Adlern auf dem zweiten Steine ist der größere über dem Haupte Juppiters dessen Diener im Kampfe, welcher den Sieg bringenden Blitz trägt, der andere etwa der Augurienadler.

Wir fügen noch ein Beispiel hinzu, welches sich auf einen irdischen Herrscher bezieht. Auf dem bekannten Diptychon mit der Apotheose des Romulus (Millin Gal. myth. pl. CLXXVIII, n. 659) sehen wir nicht einen, sondern zwei Adler himmelwärts fliegen.

In allen diesen Fällen sind die Adler willige Diener und Begleiter eines Einzigen.

In dem vorliegenden Falle scheint es sich aber um zwei Adler zu handeln, die mit einander streiten oder gestritten haben. Ist das wirklich gemeint, so müssen sich die Adler auf zwei von den darge-

---

gamon (Overbeck Gesch. d. Griech. Plastik IV, Fig. 132 A) und dem Cameo des Athenion (Denkm. d. a. K. II, 3, 34, a, Overbeck Kunstmyth. II, 1, Gemmentaf. V, n. 2), um nur diese allbekannten Beispiele zu erwähnen. Auf den Reliefs von Aphrodisias trägt der blitzende Zeus sogar einen langen Chiton und ein Obergewand (D. d. a. K. II, 66, 845, a).

stellten Personen beziehen. Sie müssen dann auf zwei feindliche Glieder derselben Familie hindeuten, die sich bekämpfen, und zwar ohne Erfolg; denn keiner der Vögel erscheint als Sieger. Ein solcher Fall läßt sich aber in der Kaisergeschichte nicht nachweisen. Dazu kommt, daß in den zusammengestellten Büsten auch nicht die Spur eines Zwiespalts zu finden ist, vielmehr eine eng verbundene friedliche Familie.

Also kann jene Auffassungsweise der Adler nicht richtig sein. Es handelt sich nicht um zwei mit einander kämpfende oder gekämpft habende Adler, sondern um zwei, von denen ein jeder gegen den Feind eines Römischen Kaisers und seines Hauses kämpft, um ein Paar des Kriegs- und Siegs-, des Legions- und Kaiseradlers, der die Römer in den Kampf führt.

Soll nun dieses Paar sich auf zwei Personen beziehen, oder gilt die Zweizahl hier nur soviel wie die Einzahl?

Wir haben es mit einem Bildwerke zu thun, das als decoratives gelten kann, und bei dergleichen Werken findet sich bekanntlich die Doppelzahl desselben einigen Wesens in Folge der Berücksichtigung der architektonischen Symmetrie. Um nur ein Beispiel beizubringen, in welchem es sich auch um zwei Adler handelt, so finden wir an den beiden Seitenlehnen des Thrones des Zeus, welcher rechts am Boden den leibhaftigen Adler neben sich hat, auf dem bekannten, öfters wiederholten Pompejanischen Wandgemälde in den Denkm. d. a. Kunst II, 2, 16 je einen Adler als schmückendes Bildwerk des Thrones dargestellt. Der Künstler dachte gewiß nicht an zwei verschiedene Adler[1]), obgleich, wie wir oben gesehen haben, die Sage und die Kunst mehrere Adler bei Zeus kennen. Um auch ein paar Beispiele anzuführen, welche sich auf irdische Herrscher beziehen, so vergleiche man die beiden Adler um eine Amphora oder ein Schild in den Giebelfeldern Phrygischer Königsgräber (Perrot Exploration de la Gal. u. s. w. p. 146, E. Curtius Ueber Wappengebrauch und Wappenstil im griech. Alterthum, Abhandl. d. K. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1874, Taf. n. 23), und die zu den Seiten eines Sternes an der Tiara Iranischer Herrscher (s. die Münzen des Tigranes bei Fried-

1) Vermuthlich gehört hieher auch die Darstellung auf einem Nicolo zu Paris, von welcher wir durch Chabouillet Catal. génér. et rais. des camées et pierr. grav. de la bibl. imp. p. 278, n. 2133 nur hören, daß sie zwei Adler, die zusammen einen Kranz halten, zeigt. Desgleichen dürfte auf der Münze Alexander's II. von Epirus bei Lenormant Num. d. rois Grecs pl. XXII, n. 15 das Paar der sich anblickenden Adler für den einen stehen, welcher sonst auf den Epirotischen Münzen erscheint. Anders freilich Sittl a. a. O. S. 11, A. 1.

laender und Sallet K. Münzkab. zu Berlin S. 131, n. 450 u. 452 d. zw. Ausg.). S. auch die Anm. unten auf dieser S. Danach kann man die Adler auf dem Trier'schen Cameo auf eine Person, diejenige, welche unter den dargestellten die vornehmste und ein Kaiser ist, beziehen.

Dennoch hat für uns eine Auffassungsweise der Adler, nach welcher dieselben sich zunächst auf etwas Doppeltes beziehen, die größere Wahrscheinlichkeit. An zwei Personen wird freilich nicht gedacht werden können, denn ganz abgesehen davon, daß schwerlich eine Schlacht nachweisbar sein würde, in welcher zwei Römische Kaiser gegen einen auswärtigen Feind siegreich fochten, und daß die Tracht der männlichen Büsten durchaus nicht auf Krieg deutet, so befindet sich unter den dargestellten Büsten auch keine, die man einem zweiten Kaiser zuschreiben könnte. Es ist aber bezeugt, daß zwei Adler auf die Herrschaft über ein zweitheiliges Reich bezogen wurden. Die älteste einschlägige Schriftstelle ist meines Wissens die des Justinus XII, 16, 5, wo berichtet wird, daß an dem Tage der Geburt Alexander's d. Gr. zwei Adler auf dem Dache des väterlichen Palastes saßen »omen duplicis imperii Europae Asiaeque praeferentes«. Bekanntlich bezieht man die in einander verwachsenen Doppeladler, welche sich auf den Schilden an der Antoninischen Säule finden, auf die Doppelherrschaft der Römischen Kaiser (Lipsius Analecta p. 435, Sittl a. a. O. S. 11). Ich zweifle sehr, ob mit Recht. Dagegen läßt sich gewiß bei den beiden Adlern auf dem Trier'schen Cameo an den Inhaber utriusque imperii denken [1]). Auf diese Weise beziehen sich die Adler an zweiter Stelle auch auf eine Person, den dargestellten Kaiser.

Wenden wir uns jetzt zur Ermittelung der zur Darstellung gebrachten Personen.

Das Weib, dessen Büste der Beschauer zumeist nach links gewahrt, macht durch den Schleier, welcher von seinem Hinterhaupt herabfällt, und durch sein Gesicht durchaus den Eindruck einer Matrone. Man denkt wie von selbst an die Frau des Mannes von reiferen Jahren, dessen Büste links von der des Weibes zu sehen ist. Die darauf folgende Büste ist die eines Kindes männlichen Geschlechts. Dann kommt die Büste eines erwachsenen Jünglings, endlich die eines Knaben. Alle männlichen Büsten sind mit der gewöhnlichen Friedenstracht versehen. Die beiden an erster Stelle erwähnten Büsten

---

1) Ob hieher auch die Gemme gehört, welche Reiz Mus. Franciani descriptio T. I, p. 354, n. 1854 anführt, oder ob es sich um eine Verdoppelung aus symmetrischen Gründen handelt, muß dahin gestellt bleiben. Doch ist das Letztere das Wahrscheinlichere. Die Darstellung wird so beschrieben: Imperator galeatus et hastatus, Victoriolam tenens. Paludamentum ex humero pendet. Utrobique ad pedes aquila rostro palmam ferens, et clypeus. In ora legitur NASO.

haben deutlich Kränze, der Mann allem Anscheine nach einen Lorbeerkranz. Von den dann folgenden ist nicht bloß die erste deutlich, sondern auch das andere Paar wahrscheinlich mit einem andersartigen Kopfschmuck versehen, über welchen wir unten des Genaueren sprechen werden. Es liegt auf der Hand, daß in den beiden Büsten zumeist nach links Mutter und Vater der drei in den folgenden Büsten dargestellten Personen zu erkennen und daß sie auf eine Kaiserin und einen Kaiser zu beziehen sind.

Daß diese Figuren zu der Familie des Claudius nicht passen, liegt auf der Hand. Auch die Arbeit des Cameos spricht gegen die Zeit dieses Kaisers. Das Werk kann frühestens aus der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts stammen. Wir zweifeln nicht, daß es der ersten Hälfte des vierten angehört.

Wir erinnern uns überall keines Kaisers, der drei Söhne gehabt hätte; nur Constantin der Große hatte noch mehrere, er hatte vier, aber von zwei Frauen. Von der zweiten Frau hatte er in der That drei Söhne, und diese sind nebst der Mutter Fausta und dem Vater hier dargestellt. Wie vortrefflich auf Constantin d. Gr. seit dem Sieg über Licinius die Bezeichnung der Herrschaft über den Occident und den Orient paßt, liegt auf der Hand. Wir erkennen also in den Büsten: Fausta, Constantin den Vater, Constans, Constantin den Sohn, Constantius. Crispus, der älteste Sohn Constantin's, fehlt. Auf den ersten Blick kann das sehr auffallend erscheinen. War doch Crispus durch seine kriegerischen Thaten gegen die Franken und die Alemannen sowie namentlich durch den Sieg über Licinius vor seinen Brüdern berühmt und dem Vater sowohl als auch der Stiefmutter besonders genehm, bis auf die Zeit kurz vor seinem gewaltsamen Tode. Auf den numismatischen Monumenten, die aus der Zeit nach dem Jahre 317 stammen, in welchem er zugleich mit dem viel jüngeren Bruder Constantin II. zum Caesar ernannt wurde, finden wir ihn mit diesem um den Vater herum dargestellt (Froehner Méd. de l'emp. Rom. p. 278). Aber hier handelt es sich um Staatspersonen, um den Kaiser und die beiden Caesaren. Auf dem in Rede stehenden Cameo haben wir, so zu sagen, eine Familiendarstellung: Fausta und Constantin und ihre drei Söhne. Bei einem solchen Bilde konnte Crispus übergangen werden, ohne daß er selbst in der Nichtberücksichtigung eine Zurücksetzung hätte finden können. Finden wir doch auch auf den numismatischen Monumenten, auf denen Fausta als Mutter mit ihren beiden ältesten Söhnen Constantin und Constans dargestellt ist (Cohen Méd. imp. T. VI, pl. IV, n. 6, und Froehner a. a. O. p. 292), keine Rücksichtnahme auf Crispus. Die Annahme, daß das Werk in der Zeit zwischen der, da Crispus bei sei-

nem Vater in Ungnade fiel und im Gefängniß getödtet wurde, und der der Hinrichtung der Fausta auf Befehl ihres durch sie getäuschten Gemahls, ausgeführt sein möge, würde schon deshalb nicht gebilligt werden können, weil beide Umstände in demselben Jahr und kurz hintereinander statthatten.

Daß der Cameo noch bei Lebzeiten der Fausta, also spätestens im J. 326 gearbeitet wurde, kann wohl als sicher betrachtet werden. Eine frühere oder spätere Verfertigungszeit darf man aber schwerlich voraussetzen. Es ließe sich an sich wohl hören, daß die Arbeit schon vor dem 8ten November 323, an welchem Tage Constantius II. die Caesarwürde erhielt, begonnen wurde, da dessen Büste, die letzte nach rechts, kleiner ist und sich jugendlicher ausnimmt als die Constantin's II. links von ihr, obgleich jener nur ein Jahr jünger war als dieser. Doch läßt sich jener Umstand auch dadurch erklären, daß Constantius als Caesar bedeutend jünger war, und — was die Hauptsache ist — Niemand wird glauben, daß es sich bei der Büste Constantin's II. um einen sieben- bis achtjährigen Knaben handele. Daß aber das Werk erst aus der Zeit nach dem gefeierten Siege Constantin's über die Gothen herrühre, durch dessen Erringung der Ruhm des Sohnes mit dem des Vaters rivalisiren konnte, hat — ganz abgesehen von dem Umstande, daß Fausta damals schon längst nicht mehr lebte — auch keine Wahrscheinlichkeit, da, wenn auch die Büste, welche wir auf Constantin II. beziehen, eher die eines Sechszehnjährigen als die eines Sieben- bis Zehnjährigen sein kann, dagegen das Kindes- und Knabenalter des Constans und Constantius, welche zur Zeit, da Constantin II. den Sieg über die Gothen erfocht, bedeutend älter waren als sie auf dem Cameo dargestellt sind, viel auffallender sein würde als die Voraussetzung eines etwa zehnjährigen Constantius.

In dieser Hinsicht berücksichtigt die Kunst der betreffenden Zeit keineswegs durchaus die Naturwahrheit. Ihr gilt vielmehr der Rang als Maßstab der körperlichen Größe und auch des Alters. Auf den oben erwähnten numismatischen Monumenten mit der Darstellung Constantin's I. und seiner Söhne Crispus und Constantin erscheinen die beiden Caesaren zweimal in ganz derselben Größe und demselben Alter, obgleich ihr Altersunterschied ein sehr bedeutender war [1]); einmal ist der eine — den man gewiß als für Constantin zu halten hat, trotzdem daß er zur Rechten Constantin's I. steht — etwas

1) Wesentlich gleiche Größe haben die drei Kaiser Constantin II., Constantius und Constans auf dem Medaillon bei Grueber Rom. Med. in the Brit. Mus. pl. LIX, Fig. 3, aber der älteste steht in der Mitte.

kleiner dargestellt als der andere. Selbst auf dem berühmten großen Goldmedaillon des K. K. Münz- und Ant. Cab. zu Wien bei Arneth Gold- und Silbermonum. Taf. XV, n. 3, Cohen Méd. imp. T. VI, pl. VIII, Froehner a. a. O. Taf. 20, zu p. 304 fg. erscheint der jüngere rechts von Constantin I. stehende Caesar Constantius etwas, wenn auch ganz unbedeutend, kleiner als der ältere Constantin II., obgleich das Werk hauptsächlich jenen feiern soll, wie aus dem Umstande erhellt, daß er allein auf der Vorderseite dargestellt ist. Daß Constantius in der That von kleiner Statur war, kommt dabei schwerlich in Betracht. Auf dem Silberschild des Theodosius (abgeb. in den Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wissensch. zu Wien, histor.-phil. Cl. III, Taf. 2 und der Arch. Ztg. 1860, Taf. CXXXVI, n. 5, vgl. Friederichs Bausteine zur Gesch. d. griech.-röm. Plastik S. 514 fg.) ist der elfjährige Augustus Arcadius kleiner dargestellt nicht nur als der Kaiser Theodosius, der zudem in der Mitte sitzt, sondern auch als der Mitkaiser Valentinian II., aber doch größer als ein Knabe jenes Álters zu sein pflegt. Ich sehe, daß kürzlich auch Stephani im Compte-rendu de la comm. imp. archéol. pour l'ann. 1881, St. Pétersbourg 1883, p. 127, hinsichtlich des von ihm auf pl. V, n. 23 herausgegebenen Intaglios aus der zweiten Hälfte des vierten Jahrhunderts bemerkt hat, er bezweifele, daß man auf Grund der Größe des dort dargestellten Knaben eine sichere Entscheidung darüber werde treffen können, ob der Künstler einen vier- oder einen achtjährigen Knaben bilden wollte.

Vollkommene Porträtähnlichkeit läßt sich selbst bei Erwachsenen auf einem Werke der Zeit, in welche uns das in Rede stehende zu gehören scheint, nicht erwarten. Doch steht auch von dieser Seite nichts im Wege an die Constantinische Familie zu denken. Die Aehnlichkeit, welche zwischen dem Vater und dem gleichnamigen Sohn obwaltet, findet sich auch sonst (s. die akadem. Abhandl. über einige geschn. Steine des vierten Jahrh. n. Chr. II, 1, S. 22 fg.). Die größere Schlankheit Constantin's des Sohnes erscheint durchaus passend. Von der gebogenen Nase, welche sich bei allen männlichen Gliedern der Constantinischen Familie findet, gewahrt man bei den erwachsenen auf dem Cameo keine Spur, was nicht sowohl von der Beschädigung der Nasen herrührt, als von der Darstellung der Köpfe, namentlich dessen Constantin's I., en face, und um so weniger befremden kann, als es auch in den Profildarstellungen der Münzen und Medaillons vorkommt, ganz besonders bei Constantin II. Der Künstler hat offenbar auf die Genauigkeit der Bildung der Nasen gar kein Gewicht gelegt. Die beiden jüngsten Söhne haben die Stumpfnasen, mit denen die Kinder gebildet zu werden pflegen.

Das Gesicht der Fausta läßt sich sehr wohl mit dem derselben Gemahlin Constantin's I. auf dem Petersburger Cameo bei Mongez a. a. O. pl. 61, n. 5 vergleichen, dessen Verfertigung sicherlich vor das Jahr 326 fällt.

Auch der Umstand, daß das Haar der männlichen Büsten in kurzen Büscheln auf die Stirn und die Schläfen hinabfällt, paßt auf das Beste zu der Constantinischen Zeit.

Desgleichen der Umstand, daß die Gesichter der dargestellten Personen weit besser ausgeführt sind als das Beiwerk, die Adler. Diese, namentlich der rechts vom Beschauer, sind zudem unverhältnißmäßig groß dargestellt, was freilich zur Ausfüllung des Raumes nöthig war.

In der Zusammenstellung der Büsten ist von dem Princip, welches sich wie in den pyramidalen Gruppen früherer Zeit, so auch noch in Typen der Münzen und Medaillons des vierten Jahrhunderts beobachtet findet, nämlich dem, die wichtigste Person in die Mitte zu stellen und sie auch durch körperliche Größe hervorzuheben, auf dem vorliegenden Cameo eine Ausnahme gemacht, indem gerade die jüngste und kleinste und dem Range nach unbedeutendste Person in die Mitte gestellt ist. Aber vielleicht stellt sich doch die Sache anders, wenigstens in der Hinsicht auf die Wichtigkeit der Person. Man erwäge, daß es sich um ein Familienbild handelt, daß aber in der Familie sehr wohl der Kleinste derjenige sein kann, um welchen sich die anderen Glieder der Familie am meisten bekümmern, welcher den Mittelpunkt der Familie bildet. So haben den kleinen Constans die Eltern und die älteren Brüder in die Mitte genommen, jene nach rechts, dem Platze der Bevorzugten, diese nach links hin. Dabei kommt auch der Umstand in Betracht, daß gerade der Kleinste mit einem besonders in die Augen stechenden Kopfschmuck versehen ist, der sich in der Abbildung bei Mongez wie mit einer Sternblume geschmückt ausnimmt, in ziemlicher Uebereinstimmung mit der Photographie, wo an der betreffenden Stelle etwas Sternartiges erscheint. Ueber den Kopfschmuck Constantin's des jüngeren läßt sich nicht gehörig urtheilen. Als Lorbeerkranz ist er sicherlich nicht zu betrachten. Bei Constantius zeigt die Mongez'sche Abbildung etwas auf dem Kopfe, das sich wie das Schloß einer Binde ausnimmt. Auch diese Kopfzierathen der Söhne Constantin's hängen wohl mit dem Umstande zusammen, daß es sich nicht um eine officielle Darstellung handelt. Auf den numismatischen Monumenten pflegen selbst die Caesaren ohne allen Kopfschmuck dargestellt zu werden, nur ausnahmsweise erscheint bei ihnen der Lorbeerkranz, zuerst, wenn ich nicht irre, bei Licinius dem jüngeren.

Wir bemerken schließlich noch, daß die Darstellung en face sowohl auf den numismatischen Monumenten als auch auf den geschnittenen Steinen bei ganzen Figuren sich mehrfach, wenn auch nicht gerade häufig findet, daß aber jene Darstellungsweise für Büsten sowohl dort als auch hier zu den größten Seltenheiten gehört. Münzbilder dieser Art kennen wir von Postumus, Licinius dem jüngeren und Maxentius. Von Cameen aus späterer Zeit ist uns nur ein Beispiel bekannt, und das ist gerade der Petersburger mit Constantin I. und Fausta.

II.

Die beiden anderen Cameen sah ich an der Vorderseite der Reliquientafel von St. Matthiae. Leider konnte ich dieses höchst interessante Werk, das im Jahre 1204 in Constantinopel erbeutet wurde, nur unter ungünstigen Umständen betrachten und namentlich war es mir unmöglich, die Cameen genau zu untersuchen. Meine Mittheilung hat also zunächst nur den Zweck zu genauerer Untersuchung des Dargestellten und womöglich auch zu einer treuen Abbildung Anregung zu geben.

Von den Cameen ist der eine mitten in den oberen, der andere mitten in den unteren Rand der Tafel eingelassen. Beide sind Onyxe, aber von sehr verschiedener Art. Der obere etwas kleinere, aber immerhin auch den Dimensionen nach ansehnliche hat rundliche Form, der untere, noch größere geradovale.

Die Darstellung auf dem Cameo oben gilt in der Kirche als die der heiligen Helena; aber es handelt sich ganz deutlich um die nach links gewendete Büste eines Römischen Imperators, dessen Haupt mit einem Lorbeerkranz geschmückt ist und dessen Brust und Achseln die kriegerische Tracht zeigen. Das glänzend polirte, in der weißen Lage ausgeführte Brustbild hebt sich sehr gut von dem schwarzen, ebenfalls stark polirten Grunde ab. Ich mußte bei dem energischen Gesichtsausdruck unwillkürlich an einen der beiden Constantine, zunächst den zweiten, denken, und trifft dieser Gedanke das Wahre, so haben wir in diesem Werke einen neuen Beleg für die Tüchtigkeit der Steinschneidekunst in erhabener Arbeit, in welcher es gerade von Constantin II. mehrere ausgezeichnete Porträts giebt (s. meine akadem. Abhandl. über einige beachtenswerthe geschnittene Steine des vierten Jahrhunderts n. Chr. Abth. II, 1, S. 21 fg.).

Die Darstellung auf dem anderen Cameo von vorwiegend bräunlicher Farbe bezieht man in der Kirche auf Johannes den Evangelisten mit dem Adler. Dieser steht allerdings ganz sicher; aber der vermeintliche Johannes ist gewiß ein Wesen der Griechischen Sage. Die betreffende, sitzend dargestellte, nach rechts gewendete Figur ist

lang bekleidet, auch der Kopf ist mit einer Bedeckung versehen. Sie hebt den linken Arm und hält den rechten nach dem Adler, wie um ihm etwas darzubieten, vermuthlich eine Schale. Der Adler blickt auf die rechte Hand hin und hebt den rechten Fuß zu ihr empor.

Bekanntlich findet sich das Motiv, daß der Adler mit der einen Kralle nach der Schale greift, welche ihm der gewöhnlich wie die betreffende Figur auf dem Cameo sitzend dargestellte Ganymedes hinreicht, mehrfach wiederholt. Jeder wird zunächst an diesen denken, zumal da die Figur mit einer Kopfbedeckung versehen ist, welche wohl an die sogenannte Phrygische Mütze erinnern kann. Allerdings ist der ganze untere Theil des Körpers vom Unterleibe an bis auf die Füße hin (die deutlich zum Vorschein kommen) mit einem so schweren Gewande und so vollständig bedeckt, wie wir es sonst meines Wissens nirgends bei Ganymedes finden, obgleich es an Darstellungen, in denen dieser bei der Tränkung des Adlers das Gewand über die Oberschenkel geschlagen hat, nicht fehlt. Entschieden spricht es aber gegen Ganymedes, wenn meine Annahme, daß der Oberleib bekleidet zu sein scheine, nicht irrthümlich ist. Ist dieses nicht der Fall, so läßt sich nur an die den Adler tränkende Hebe denken, zu welcher auch die Bedeckung des Kopfes durch eine Art von Haube wohl paßt. Darstellungen dieses Bezuges hat man früher wiederholt angenommen. Noch Kekulé Hebe S. 56 fg. und Ann. d. Inst. arch. Vol. XXXVIII, 1866, p. 121 fg. ließ sie zu, während Stephani im Compte-rendu de la comm. imp. arch. pour l'ann. 1867, p. 195, mit Beistimmung Overbeck's Kunstmyth. II, 1, S. 547, bemerkte, es sei nicht der entfernteste Grund vorhanden, der zu der Annahme, daß man schon im Alterthume Hebe den Adler des Zeus tränkend gedacht und gebildet habe, irgendwie berechtigen könnte. Er bestreitet auch das weibliche Geschlecht der einzigen Figur, welche Kekulé in den Ann. p. 125 als diesem angehörend betrachtete. Indessen hat dieses Gelehrten Bemerkung, daß die Annahme einer den Adler tränkenden Hebe an sich nichts Auffälliges sei, sicherlich vollkommene Berechtigung. Eine wiederholte genauere Prüfung des in Rede stehenden Werkes mag entscheiden, ob es zulässig ist an Ganymedes zu denken. Aber auch wenn dieses der Fall sein sollte, würde die Darstellung als Gemmenbild von Belang sein. Die hieher gehörenden geschnittenen Steine sind am vollständigsten von Stephani a. a. O. S. 193 fg. zusammengestellt. Es giebt nach Stephani unter ihnen nur wenige, die als ächt antik gelten können, und, wenn Stephani nicht irrt, so hat keiner derjenigen, welche die Phrygische Mütze zeigen, ausreichende Gewähr für seinen antiken

Ursprung[1]). Daß der in Rede stehende Cameo (welcher übrigens aus sehr später Zeit stammt und in künstlerischer Hinsicht keinen besonderen Werth hat) wirklich antik ist, kann keinem Zweifel unterliegen.

III.

Das Steinrelief wird im Provincialmuseum aufbewahrt. Es wird in dem sehr schätzbaren Führer durch dieses Museum von D. Hettner S. 9, der zweiten Auflage, mit folgenden Worten erwähnt: »ein in zwei Platten zersägter Viergötteraltar, wovon noch ein gutgearbeiteter Vulcan mit Ambos, Zange und Beutel (?) und Hestia mit Scepter und Fackel gut erhalten sind«. Wir haben es hier nur mit dem Vulcan zu thun, für welchen das Werk hinsichtlich eines Attributs außerordentlich wichtig ist. Der Beutel wäre bei diesem Gotte nicht bloß unerhört, sondern auch unerklärlich. Der betreffende Gegenstand wird von dem Gotte mit der rechten Hand gehalten. Er ist halbeiförmig, und entspricht wesentlich dem Gegenstande, welchen ich unter den Attributen Vulcans nachgewiesen und als Feuersymbol bezeichnet habe, vgl. Nachrichten von der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1872, n. 7, Arch. Zeitung 1873, S. 69 fg., Text zu den Denkm. d. a. K. Th. II, H. I, S. 76 d. dritt. Ausg. zu Taf. V, n. 64. Es handelt sich um eine Feuerglocke, die ja zu dem Feuer- und Heerdgotte besonders gut paßt. Man hat diese sich auf dem Relief mit einer Handhabe oben, etwa einem Knopfe, versehen zu denken, wie den ähnlichen Feuerdeckel auf dem Pariser Relief in den Denkm. d. a. Kst. II, 49, 608 und den entsprechenden »Omphalos« auf dem Etruskischen Relief bei Gori Mus. Etr. I, t. CLXX,

1) C. W. King bemerkt in Natural history of precious stones and gems p. 199 fg.: There is now (das Werk erschien im J. 1867) in London a unique work in relief of the same material (wie der berühmte Sapphir mit der Eberjagd Constantius' II), the well-known design of Hebe feeding the eagle, apparently belonging to the times of Hadrian. Ist damit der »Cameo der Sammlung Blacas, gegenwärtig wahrscheinlich« — ich denke ohne Zweifel — »im brit. Mus.« gemeint, welchen Stephani a. a. O. S. 193, Anm. 3 unter den geschnittenen Steinen aufführt, deren keiner ausreichende Gewähr für seinen antiken Ursprung biete, so muß man sich darüber wundern, daß eine Figur mit Phrygischer Mütze und Chlamys von King als Hebe bezeichnet wird. Der Umstand, daß das Material des früher Blacas'schen Steins dem Petersburger Archäologen wie mir unbekannt ist, erlaubt in Verbindung mit dem, daß von einem anderen in neuerer Zeit nach London gekommenen Stein nichts verlautet hat, die Annahme der Identität des Blacas'schen mit dem von King erwähnten. In diesem Falle dürfte aber die von Stephani bezweifelte Aechtheit des Blacas'schen Steins durchaus wahrscheinlich sein.

mit welchem zu vergleichen Wicar Tableaux, statues etc. de la gal. de Florence et du palais Pitti T. IV, pl. 11. In den meisten Fällen ist die Handhabe weggelassen.

Der Feuerdeckel findet sich hier und dort auf einem Altar stehend. Auch auf einer Münze von Panticapäum zeigt sich nach Gardner Catal. of Greek coins, The Tauric Chersonese u. s. w. p. 7, n. 15 ein altar having a conical cover.

Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle.

Von

B. Minnigerode.

Dritte Abhandlung.

In der zweiten Abhandlung, die denselben Titel führt, wie die vorliegende, habe ich der Auseinandersetzung der Symmetrieverhältnisse des hexagonalen Systems ein Coordinatensystem zu Grunde gelegt, bei dem die 3 Coordinatenaxen den Kanten eines Würfels parallel sind, während die 6- oder 3-zählige Symmetrieaxe des Krystalls einer Diagonale dieses Würfels parallel ist. Das gewählte Coordinatensystem ist ein zweckmäßiges für die dort gemachte Anwendung auf physikalische Verhältnisse, in der geometrischen Krystallographie legt man aber — und mit großem Vortheil — den Untersuchungen über das hexagonale System ein gewisses 4-axiges Coordinatensystem zu Grunde. Ich gebe hier eine Darstellung der Symmetrieverhältnisse dieses Systems, die sich an die übliche Behandlungsweise anschließt und den Krystallographen weniger fremdartig erscheinen dürfte, als die in der früheren Arbeit gewählte.

Auch für das in der Krystallographie angewandte 4-axige Coordinatensystem habe ich das Potential der elastischen Kräfte entwickelt, doch sehe ich von der Mittheilung der Formeln an dieser Stelle ab.

Greifswald, 30. October 1884.

§ 17.

Die bekannte Behandlung des hexagonalen Systems stützt sich auf ein Coordinatensystem mit 4 Axen, von denen 3 in einer Ebene liegen und sich unter Winkeln von $\frac{2\pi}{3}$ schneiden; ich bezeichne sie durch x, y, z. Die vierte Axe steht senkrecht zu ihnen und soll

durch t bezeichnet werden. Die Projection eines Strahls auf die xyz-Ebene bilde mit den Axen x, y, z Winkel, deren Cosinus α, β, γ sind; der Strahl selbst bilde mit der t-Axe einen Winkel, denen Cosinus δ ist. Die Richtung des Strahls ist dann durch α, β, γ, δ bestimmt, die den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

genügen.

Die hier auftretenden Substitutionen sind folgende:

$$\begin{aligned} K &= (\alpha, \beta, \gamma)\,(\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma) \\ H &= (\alpha, \beta)\,(\bar\alpha, \bar\beta) \\ D &= (\alpha, \bar\alpha)\,(\beta, \bar\beta)\,(\gamma, \bar\gamma), \\ \Delta &= (\alpha, \bar\alpha)\,(\beta, \bar\beta)\,(\gamma, \bar\gamma)\,(\delta, \bar\delta) \end{aligned}$$

Die drei ersten sind die schon in der ersten Abhandlung freilich mit anderer Bedeutung von α, β, γ benutzten, die vierte ist neu und mit jeder der andern verstauschbar. Sie sind von einander unabhängig und genügen den Gleichungen

$$K^3 = 1, \quad H^2 = 1, \quad D^2 = 1, \quad \Delta^2 = 1.$$

Die Gruppe

$$\{K, H, D, \Delta\}$$

ist von der 24. Ordnung. Ihre Substitutionen können Folgendermaßen geordnet werden:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & K, & K^2, & H, & KH, & K^2H, \\ D, & KD, & K^2D, & HD, & KHD, & K^2HD, \\ \Delta, & K\Delta, & K^2\Delta, & H\Delta, & KH\Delta, & K^2H\Delta, \\ D\Delta, & KD\Delta, & K^2D\Delta, & HD\Delta, & KHD\Delta, & K^2HD\Delta. \end{array}$$

Die durch 1 bezeichnete Anordnung des Elemente sei

$$\alpha\beta\gamma\delta\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma\bar\delta.$$

Dann kann man die zu jeder Substitution gehörige Permutation ohne Weiteres ablesen, wenn man beachtet, daß die erste Horizontalreihe der Reihe nach folgende Permutationen enthält

$$\alpha\beta\gamma\delta\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma\bar\delta, \; \beta\gamma\alpha\delta\bar\beta\bar\gamma\bar\alpha\bar\delta, \; \gamma\alpha\beta\delta\bar\gamma\bar\alpha\bar\beta\bar\delta, \; \beta\alpha\gamma\delta\bar\beta\bar\alpha\bar\gamma\bar\delta, \; \alpha\gamma\beta\delta\bar\alpha\bar\gamma\bar\beta\bar\delta, \; \gamma\beta\alpha\delta\bar\gamma\bar\beta\bar\alpha\bar\delta,$$

und daß in den Permutationen einer Verticalreihe die Buchstaben in gleicher Weise auf einander folgen. Die Horizontalreihen sind nur durch Permentationen der Vorzeichen von einander verschieden;

welche jedesmal auftreten, ist aus den Substitutionen der ersten Verticalreihe zu entnehmen, wobei die Gleichung

$$D\Delta = (\delta, \bar{\delta})$$

zu benutzen ist.

Ich füge noch hinzu, daß die vier ersten Buchstaben jeder Permutation als Indices der zugehörigen Krystallflächen angenommen werden können, wenn die Bravais'sche Bezeichnung zu Grunde gelegt wird.

§. 18.

Die Besprechung der geometrischen Bedeutung der einzelnen Substitutionen leite ich mit der Bemerkung ein, daß in der xyz-Ebene in Winkelabständen von $\frac{\pi}{3}$ der Reihe nach folgende Axen auftreten:

$$x, \bar{z}, y, \bar{x}, z, \bar{y};$$

die positive Drehungsrichtung wird so gewählt, daß den Uebergang von x nach y der Winkel $\frac{2\pi}{3}$ entspricht.

Die Substitution K weist auf eine 3-zählige Symmetrieaxe t hin; dieselbe Bedeutung hat K in der 2ten Abhandlung. D entspricht hier einer 2-zähligen Symmetriaxe t; wie früher Q^2. Das gleichseitige Vorhandensein von K und D weist auf eine 6-zählige Symmetrieaxe t hin, und ist dem früheren Q aequivalent[1]). Die Substitution Δ bedingt ein Centrum der Symmetrie, ebenso wie früher D; H bedingt wie früher eine durch die t-Axe gehende Ebene der Symmetrie, $H\Delta$ nach der jetzigen sowie HD nach der früheren Auffassung eine zur t-Axe senkrechte 2-zählige Axe der Symmetrie.

Aus dem Schema G. der II. Abhandlung erhält man also das entsprechende für das 4-axige Coordinatensystem geltende durch Benutzung der folgenden Tabelle, deren erste Spalte die Substiutionen der II., deren zweite Spalte die ihnen entsprechenden der vorliegenden III. Abhandlung enthält

K	K
Q	K, D
D	Δ
H	H.

1) Statt der Substitutior Q hätte auch früher das gleichzeitige Auftreten von K und Q^2 zu Grunde gelegt werden können.



Das Ergebniß ist folgendes:

Das hexagonale System.

Erste Abtheilung.

a. *Holoëdrische Formen.*

$\{K, H, D, \Delta\}$

b. *Trapezoëdrische Hemiëdrie.*

$\{K, D, H\Delta\}$

c. *Pyramidale Hemiëdrie.*

$\{K, D, \Delta\}$.

Zweite Abtheilung (Rhomboëdrisches System).

d. *Rhomboëdrische Hemiedrie des hexagonalen Systems.*

$\{K, H, \Delta\}$.

e. *Trapezoëdrische Tetartoëdrie.*

$\{K, H\Delta\}$.

f. *Rhomboëdrische Tetartoëdrie.*

$\{K, \Delta\}$.

Hemimorphien der ersten Abtheilung.

g. *Erste Hemimorphie.*

$\{K, H, D\}$.

h. *Zweite Hemimorphie.*

$\{K, D\}$.

Hemimorphien der zweiten Abtheilung.

i. *Dritte Hemimorphie.*

$\{K, H\}$.

k. *Vierte Hemimorphie.*

$\{K\}$.

Die geometrischen Eigenschaften der Unterabtheilungen des hexagonalen Systems sind früher[1]) entwickelt; doch möge eine kurze Ableitung derselben hier folgen in der jetzigen, den Krystallographen geläufigeren Auffassungsweise.

1) S. 378.

Das gleichzeitige Vorkommen von K und D in allen Gruppen der ersten Abtheilung zeigt das Vorhandensein einer 6-zähligen Symmetrieaxe, das Vorhandensein von K allein in allen Gruppen der zweiten Abtheilung das einer 3-zähligen Symmetrieaxe. $H\Delta$ entspricht einer zur t-Axe senkrechten 2-zähligen Seitenaxe der Symmetrie; es sind also[1]) in den Fällen a., b. 6, in den Fällen d., e 3 2-zählige Seitenaxen vorhanden, von denen benachbarte den Winkel $\frac{\pi}{6}$ resp. $\frac{\pi}{3}$ einschließen.

In den Fällen a., c., d., f. ist ein Centrum der Symmetrie vorhanden, in Folge des Bestehens von Δ. Auf einer geradezähligen Symmetrieaxe steht dann jedesmal eine Symmetrieebene senkrecht. In den Fällen a., c. ist also eine zur 6-zähligen Symmetrieaxe senkrechte Symmetrieebene vorhanden; im Fall a. steht senkrecht auf jeder der 6 2-zähligen im Fall d. senkrecht auf jeder der 3 2-zähligen Seitenaxen eine Symmetrieebene. Aber auch in den Fällen g. und i. sind in Folge des Bestehens von H 6 resp. 3 2-zählige Ebenen der Symmetrie vorhanden, die sich unter Winkeln von $\frac{\pi}{6}$ resp. $\frac{\pi}{3}$ in der t-Axe schneiden.

Die 6-zählige Symmetrieaxe ist in den Fällen a., b. 2-seitig, in den Fällen a., c. 1-seitig von der 1. Art, in den Fällen g., h. polar. Die 3-zählige Symmetrieaxe ist in den Fällen d., e. 2-seitig, in den Fällen d., f. 1-seitig von der 2. Art, in den Fällen i., k. polar. Die 2-zähligen Seitenaxen der Symmetrie sind in den Fällen a., b. 2-seitig, in den Fällen a., d. 1-seitig von der 1. Art, im Fall e. polar[2]).

Enantiomorphe Formen kommen in den Fällen b., e., h., k. vor, da in ihnen weder ein Centrum noch eine Ebene der Symmetrie auftritt.

---

1) S. die Auseinandersetzungen S. 377.

2) Die entsprechenden Betrachtungen S. 378 der ersten Abhandlung gelten hier Wort für Wort.

Bemerkung über die Gauss'sche Reihe.

Von

J. Thomae.

In seiner Abhandlung über die Gauß'sche Reihe giebt Riemann zwei Fälle an, in denen diese Reihen außer den allen solchen Reihen gemeinsamen in Bezug auf die Veränderliche linearen Transformationen noch besondere, nicht lineare, zulassen. Es sind in Riemann's Bezeichnung die beiden Fälle

$$\text{(A.)}\qquad P\begin{pmatrix}0, & \beta, & \gamma, & x\\ \frac{1}{2}, & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\gamma, & 2\beta, & \gamma, & \frac{1+\sqrt{x}}{2}\\ \gamma', & 2\beta', & \gamma', & \end{pmatrix},$$

$$\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = \tfrac{1}{2},$$

und

$$\text{(B.)}\qquad P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma, & x\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \gamma, & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma, & \frac{1-\rho^2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\rho^2}\\ \gamma', & \gamma', & \gamma', & \end{pmatrix}.$$

$$\rho = e^{\frac{2i\pi}{3}},\ \gamma+\gamma' = \tfrac{1}{3}.$$

Diesen sind selbstredend diejenigen anzufügen, welche aus ihnen durch die gemeinen

$$x \text{ in } 1-x,\quad \frac{1}{x},\ 1-\frac{1}{x},\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x}{x-1}$$

verwandelnden Transformationen entspringen.

Diese besondern Transformationen lassen sich aber noch um zwei neue vermehren, wenn man die Forderung fallen läßt, daß eine Function P nur durch eine andere ausdrückbar sein solle, wenn man vielmehr zu ihrer Darstellung ein Aggregat contiguer Functionen zuläßt. Ist zur Abkürzung

$$x' = (1-\rho\rho\sqrt[3]{x}) : (\sqrt[3]{x}-\rho\rho),$$

so sind es die beiden Transformationen

$$\text{(B').}\quad P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma & x\\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & \gamma' & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\gamma+1, & \gamma, & \gamma, & x'\\ \gamma' & , \gamma', & \gamma', & \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma+1, & x'\\ \gamma', & \gamma', & \gamma', & \end{pmatrix}$$

$$\gamma+\gamma' = 0.$$

$$\text{(B''.)}\quad \frac{(\sqrt[3]{x}-\rho^2)^2}{(1-x)^{2+\frac{1}{3}}}\, P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma-\frac{1}{3} & x\\ \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & \gamma'-\frac{1}{3} & \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{1-x'}\right) P\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma, & x'\\ \gamma', & \gamma', & \gamma' & \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\gamma & , \gamma+1, & \gamma & , x'\\ \gamma'-1, & \gamma'+1, & \gamma'-1, & \end{pmatrix},$$

$$\gamma+\gamma' = \tfrac{1}{3}.$$

Die Transformation (B″.) wird aus (B.) durch Differentiation erhalten. Schreiben wir nämlich (B.) in der Form

$$P\begin{pmatrix}0, & \gamma, & 0, & \frac{x}{x-1} \\ \frac{1}{3}, & \gamma', & \frac{1}{3}, & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma & x' \\ \gamma', & \gamma', & \gamma' & \end{pmatrix},$$

und berücksichtigen, daß

$$P'\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix} = \frac{d}{dx} P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma & \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{\alpha}{x} - \frac{\gamma}{1-x}\right) P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\alpha & , \beta+1, & \gamma & x \\ \alpha'-1, & \beta'+1, & \gamma'-1 & \end{pmatrix}$$

sei, so erhalten wir durch Differentiation

$$\frac{1}{(1-x)^2} P\begin{pmatrix}0, & \gamma+1, & 0, & \frac{x}{x-1} \\ -\frac{2}{3}, & \gamma'+1, & -\frac{2}{3}, & \end{pmatrix} = \frac{x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}}{(1-x)^2} P\begin{pmatrix}0, & \gamma-\frac{1}{3}, & 0, & \frac{x}{x-1} \\ \frac{2}{3}, & \gamma'-\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \end{pmatrix} =$$

$$\frac{x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}}{(1-x)^2} P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma-\frac{1}{3} & x \\ \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & \gamma'-\frac{1}{3} & \end{pmatrix} = \frac{1-\rho}{3} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{x}-\rho^2)^2} P'\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma, & x' \\ \gamma', & \gamma', & \gamma' & \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1-\rho}{3} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{x}-\beta^2)} \cdot \left\{\left(\frac{\gamma}{x'} - \frac{\gamma}{1-x'}\right)\right\} P\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma & x' \\ \gamma', & \gamma', & \gamma' & \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\gamma & , \gamma+1, & \gamma & x' \\ \gamma'-1, & \gamma'+1, & \gamma'-1 & \end{pmatrix}.$$

Rechnet man constante Factoren in die P ein, so hat man (B″.). Diese Transformation bewirkt, daß $P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma-\frac{1}{3}, & x \\ \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & \gamma'-\frac{1}{3}, & \end{pmatrix}$ durch $P\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma, & x' \\ \gamma', & \gamma', & \gamma', & \end{pmatrix}$ und eine ihr contigue Function linear mit algebraischen Coefficienten ausgedrückt werden kann. Umgekehrt läßt sich auch $P\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma, & x' \\ \gamma', & \gamma', & \gamma' & \end{pmatrix}$ und jede ihr contigue Function linear mit algebraischen Coefficienten durch die contiguen Functionen

$$P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma-\frac{1}{3}, & x \\ \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & \gamma'-\frac{1}{3}, & \end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma+\frac{2}{3}, & x \\ -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \gamma'+\frac{2}{3}, & \end{pmatrix} = x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma, & x \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \gamma', & \end{pmatrix}$$

ausdrücken, denn nach (B.) ist

$$P\begin{pmatrix}\gamma, & \gamma, & \gamma, & x' \\ \gamma', & \gamma', & \gamma', & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma, & x \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \gamma', & \end{pmatrix}.$$

Um jede andere dieser Function von x' contigue Function durch die einander contiguen Functionen

$$P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma-\frac{1}{3}, & x \\ \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & \gamma-\frac{1}{3}, & \end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}0, & 0, & \gamma+\frac{2}{3}, & x \\ -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \gamma'+\frac{2}{3}, & \end{pmatrix}$$



ausszudrücken, braucht man nur den Satz anzuwenden, daß jede P-function durch zwei beliebige (von einander unabhängige) ihr contigue Functionen linear mit algebraischen Coefficienten darstellbar ist.

Die Formel (B'.) erweist sich nicht ganz so einfach, doch darf ich hier auf einen Aufsatz von mir in Schlömilch's Zeitschrift XIX pag. 273 verweisen, wo ich bewiesen habe, daß

$$P\begin{pmatrix} 0, & \infty, & 1, & \frac{1}{k}, & \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & 0, & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & 2, & \end{pmatrix} = MP\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma+1, & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix} + NP\begin{pmatrix} \alpha+1, & \beta, & \gamma, & x \\ \alpha' & , \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}$$

sei, wenn $\alpha+\alpha'+e+e'+\gamma+\gamma' = 0$ und $\frac{1}{k}$ eine außerwesentlich singuläre Stelle ist, während M und N (von k abhängende) Constante bedeuten. Nun ist aber nach Riemanns Principien

$$P\begin{pmatrix} 0, & 0, & \gamma, & x \\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & \gamma', & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0, & 1, & \rho, & \rho^2, & \\ 0, & \gamma, & \gamma, & \gamma, & \sqrt[3]{x} \\ 2, & \gamma', & \gamma', & \gamma', & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0, & \infty, & 1, & -\rho, & \\ \gamma, & \gamma, & \gamma, & 0, & x' \\ \gamma', & \gamma', & \gamma', & 2, & \end{pmatrix},$$

worin $-\rho$ eine außerwesentlich singuläre Stelle ist, so daß der Ausdruck mit Einrechnung der Constanten in die P-functionen gleich

$$P\begin{pmatrix} \gamma+1, & \gamma, & \gamma, & x' \\ \gamma' & , \gamma', & \gamma', & \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} \gamma, & \gamma, & \gamma+1, & x' \\ \gamma', & \gamma', & \gamma' & \end{pmatrix}$$

ist, wie die Formel (B') besagt.

Es ist unschwer zu erkennen, daß auch $P\begin{pmatrix} \gamma+1, & \gamma, & \gamma, & x' \\ \gamma' & , \gamma', & \gamma', & \end{pmatrix}$ und jede ihr contigue Function durch

$$P\begin{pmatrix} 0, & 0, & \gamma, & x \\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & \gamma', & \end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix} 0, & 0, & \gamma, & x \\ \frac{1}{k}, & \frac{2}{3}, & \gamma', & \end{pmatrix}$$

oder durch zwei ihnen contigue Functionen linear mit algebraischen Coefficienten ausdrückbar sei.

Die Transformationen (B'.) (B''.) bilden eine Vervollständigung der Transformation (B.) dahingehend, daß nicht blos die in (B.) stehenden Functionen, sondern auch sämmtliche ihnen contigue, was für die Functionen die unter (A.) stehen selbstverständlich ist, die Transformation zulassen.

Bilden wir aus den einander contiguen P-functionen, und denen welche durch die in Bezug auf x linearen Transformationen aus ihnen hervorgehen, eine Klasse, und repräsentiren, mit Unterdrückung der Veränderlichen, eine solche Klasse durch das Zeichen

$$P(\lambda, \mu, \nu),$$

worin λ, μ, ν die Exponentendifferenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ bedeuten,

und die daher beliebig mit einander vertauscht, oder ins Negative verwandelt werden können, so wird es genügen, die Verwandschaft der verschiedenen Klassen, welche durch die Beziehungen (B.) (B'.) (B''.) hergestellt wird, kurz mit (B.) zu bezeichnen, weil in der That nach dem Voraufgehenden die Transformationen (B.) (B'.) (B''.) in Bezug auf die Klassen zusammen gehören.

Es scheint nicht uninteressant, zu untersuchen, wie mittels dieser Transformationen diejenigen Klassen abgebraischer Functionen zusammenhängen, welche P-functionen sind, und die von Herrn Schwartz in Crelle's Journal B. 75 pag. 323 gefunden und zusammengestellt sind. Diese Klassen mögen hier mit denselben lateinischen Ziffern bezeichnet werden, wie bei Schwartz. Dabei ist jedoch zu beachten, daß unter I $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \nu)$ eine Schaar von Klassen enthalten ist, weil ein willkürlicher Parameter vorhanden ist. Man vergleiche außerdem Riemanns Betrachtungen auf Seite 71 und 72 seiner gesammelten Werke. $(A)^{-1}$, $(B)^{-1}$ mögen sich von (A) bez. (B) dadurch unterscheiden, daß die Seiten dieser Transformationsgleichungen vertauscht sind.

Es ist transformirbar die Klasse	II	$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
mittels (A) in	III	$P(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
mittels (B) in	I	$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Ferner geht über	II	$P(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
mittels $(A)^{-1}$ in	IV	$P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
und IV mittels $(A)^{-1}$ in	V	$P(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
und V mittels (A) in	I	$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Die Klassen der Functionen $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist evident algebraisch, (Riemann pag. 72.) und mithin sind es auch die Functionen der Klassen II. III. IV. V.

Ferner geht über	VII	$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$
mittels (A) in	VII	$P(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3})$
oder (nach Vertauschung der Exponenten) in	VIII	$P(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5})$
III geht über mittels (B) in	XI	$P(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$
XI mittels $(A)^{-1}$ in	IX	$P(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$
und IX mittels (A) in	XIII	$P(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5})$
zu welcher Klasse $P(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ $P(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ gehören.		$P(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5})$
geht über mittels $(B)^{-1}$ in	XII	$P(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5})$
welche Klassen mittels $(A)^{-1}$ übergeht in	XIV	$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5})$
XIV aber geht mittels (A) über in	XV	$P(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$

So zeigt es sich, daß die Klassen VI bis XV in einander transformirbar sind, mit Ausnahme der Klasse X welche isolirt bleibt. Ist mithin eine von ihnen algebraisch, so sind es auch die andern.

Jena 1884.

Ueber die titrimetrische Bestimmung des Harnstoffs.

Von

Dr. Th. Pfeiffer.

(Vorgelegt von W. Henneberg.)

In einer ausführlichen Abhandlung[1]) über die quantitative Bestimmung des Harnstoffs nach der Liebig'schen Methode hat Pflüger bekanntlich nachgewiesen, daß auf die Harnstoffausfällung die Art und Weise des Zusatzes der Quecksilbernitratlösung sowohl, als auch der Neutralisation einen wesentlichen Einfluß ausübt. Pflüger ist hiernach der Ansicht, daß lediglich sein als »stetige Methode« bezeichnetes Verfahren zu richtigen Resultaten führe, und daß folglich alle bis dahin gemachten Harnstofftitrationen mit einem bedeutenden Fehler behaftet seien, den er zu 14 % und mehr veranschlagt[2]).

Dieser Vorwurf traf auch die von Henneberg[3]) mitgetheilte Rautenberg'sche Harnstoffbestimmung, und hat später noch besonderen Ausdruck in einer Abhandlung von Habel u. Fernholz[4]) gefunden. Die genannten Autoren gelangten, von der »Kochsalzcorrection« Rautenberg's ausgehend, zu dem Resultate, daß diese und ebenso sein Verfahren zur Harnstoffbestimmung einfach zu verwerfen seien.

Eine diesbezügliche Untersuchung, welche ich auf Veranlassung des Herrn Professor Henneberg unternommen habe, hat nun aber zu folgenden Ergebnissen geführt:

1. Die Rautenberg'sche Methode der Harnstoffbestimmung läßt die von Pflüger als äußerst wichtig erkannte Neutralisation durch Benutzung von Kalkcarbonat weit gleißmäßiger erreichen, als dies überhaupt mit einem in Wasser löslichen Reagens, wie das von Pflüger u. A. verwandte Natriumcarbonat, möglich ist. Die bei der Titration fortschreitend frei werdende Salpetersäure wird nämlich sofort von dem zugesetzten Kalkcarbonat gebunden, während letzteres auch im Ueberschuß unschädlich bleibt.

Hiermit ist aber, wie nach den Pflüger'schen Untersuchungen

1) Archiv f. d. gesammte Physiologie XXI, p. 248.
2) ibid. p. 261.
3) Annalen d. Chem. u. Pharm. CXXXIII, p. 55.
4) Archiv f. d. gesammte Physiologie XXIII, p. 85.

zu erwarten war, ein geringerer Verbrauch an Quecksilbernitratlösung verknüpft, und zwar verlangen 0,2 g. Harnstoff (10 ccm. einer 2proc. Lösung) nach Pflüger titrirt, 20 ccm. Quecksilbernitrat[1]), nach Rautenberg nur 16,804 ccm. Dieser Minderverbrauch von Quecksilberlösung ist der kritische Punkt, um welchen sich die Pflüger'schen Einwände und Bedenken drehen. Da sich derselbe jedoch unter gleichen Verhältnissen stets gleich bleibt, so involvirt er nur scheinbar einen Fehler. Lediglich der Titer ist ein wechselnder. Man würde, wie leicht ersichtlich, einfach zu sagen haben: 1 ccm. Quecksilberlösung entspricht bei Rautenberg nicht wie bei Pflüger 1 mg. Harnstoff, sondern 1,19 mg. Oder man muß, um wieder zu der üblichen Verhältnißzahl (1 ccm. Quecksilbernitrat = 1 mg. Harnstoff) zu gelangen, die Liebig-Pflüger'sche Lösung für das Rautenberg'sche Verfahren in dem Verhältniß von 16,804:20 verdünnen. Mit anderen Worten: die von Liebig, Pflüger u. A. festgestellte Gehaltszahl (71,5 g. Hg. im Liter) der Quecksilberlösung hat eben nur bei genauer Befolgung der von denselben für die Titration gegebenen Vorschriften Gültigkeit. Eine Aenderung der letzteren hat auch eine Aenderung des Quecksilberverbrauchs und somit auch obiger Gehaltszahl im Gefolge, vorausgesetzt, daß 1 ccm. Quecksilberlösung stets 1 mgr. Harnstoff entsprechen soll. Da die meisten Titrirflüssigkeiten empirisch gestellt sein dürften, so ist dies Verhalten unbemerkt geblieben. Werden nun bei der Stellung des Titers, sowie bei der eigentlichen Titration nur immer die gleichen Bedingungen inne gehalten, so muß das Resultat nothwendiger Weise richtig ausfallen.

2. Nach dem Vorhergehenden ist es unzweifelhaft, daß Rautenberg bei seinen Versuchen mit einer Quecksilbernitratlösung gearbeitet hat, welche nicht 71,5 g. Quecksilber, sondern (im Verhältniß von 16,8:20 verdünnt) nur ca. 60 g. enthalten konnte. Eine für meine Zwecke genau nach Rautenberg gestellte Lösung enthielt 60,186 g. Quecksilber in Liter. Diese Thatsache entzieht den von Habel und Fernholz gegen Rautenberg angestellten Berechnungen die Grundlage. Die Behauptung, in der von Rautenberg zur »Kochsalzcorrection« verbrauchten Menge Quecksilbernitrat sei mehr Quecksilber enthalten, als die angewandte Kochsalzmenge zur Umsetzung in Quecksilberchlorid verlangt, wird dadurch hinfällig.

Die von den genannten Autoren stark angegriffene Vorschrift Rautenberg's: »man säuert mit einem Tropfen Salpetersäure schwach an«, kann, richtig gelesen, kaum mißverstanden werden.

1) Nach der Liebig'schen Vorschrift bereitet. 1 Ltr. = 71,5 g. Quecksilber.

Den Einfluß des Säuregehalts der hinzugefügten Quecksilberlösung läßt Rautenberg unberücksichtigt. Durch einen Correctionsfactor kann demselben leicht Rechnung getragen werden. Dieser Factor muß jedoch für jede neue Lösung, je nach ihrem Säuregehalt, neu bestimmt werden. (Corrigirte Kochsalzcorrection.)

3. Bei Versuchen mit Kuh- und Pferdeharn führten die Rautenberg'sche Harnstoffbestimmung, sowie die corrigirte Kochsalzcorrection zu völlig befriedigenden Resultaten.

4. Bei menschlichem Harne machten sich jedoch bei der Kochsalzcorrection störende, bis jetzt noch unaufgeklärte Momente geltend. Ich habe aber nachgewiesen, daß ein geringer Ueberschuß von Silbernitrat, zum Ausfällen der Chloride, die Harnstoffbestimmung absolut nicht beeinflußt. Die Rautenberg'sche Methode der Harnstoffbestimmung kann somit auch hier in bequemster und sicherster Weise Verwendung finden. Das Ausfällen der Chloride mit Silbernitrat ist natürlich auch bei Harnen von Pflanzenfressern ausführbar.

5. Die Untersuchung des Harnstoff-Quecksilber-Niederschlags stieß auf besondere, hier nicht näher zu erörternde Schwierigkeiten und führte daher zu keinem glatten Resultate.

Das Nähere, einschließlich der zahlreichen analytischen Belege, wird demnächst an anderer Stelle publicirt werden.

Ueber die Entwicklung der Geschlechtsorgane der Pulmonaten.

Von

J. Brock.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Die Mittheilungen, welche ich in Folgendem gebe, entbehren, wie ich mir wohl bewußt bin, noch in manchen Punkten der Vollständigkeit und Abrundung, die man von wissenschaftlichen Publikationen zu fordern berechtigt ist. Zu meiner Entschuldigung mag gesagt sein, daß ich durch äußere Umstände für längere Zeit verhindert bin, auf das hier behandelte Thema zurückzukommen, über welches außerdem von anderer Seite das baldige Erscheinen einer ausführlichen Untersuchung in Aussicht gestellt worden ist.

Die Entwicklung der Geschlechtsorgane der Pulmonaten kann bei der Kleinheit und Zartheit der in Betracht kommenden Gebilde insbesondere ihrer ersten Anlagen nur durch Zerlegung der ganzen

Thiere in ununterbrochene Schnittreihe mit Erfolg studirt werden; den älteren Arbeiten, denen zur Lösung dieses schwierigen Problems nur die Hülfsmittel der Präparation zu Gebote standen (Eisig, Zeitschr. wiss. Zool. XIX, 1869, Jourdain, Rev. sc. nat. Montpell. (2) T. 2 1880) ist deshalb größtentheils nur noch ein historischer Werth beizumessen. Um mir bei der angewandten Untersuchungsmethode die Orientirung zu erleichtern, wählte ich eine Nacktschnecke, (Limax agrestis), bei welcher die störende Aufrollung des Hinterleibes in das Gehäuse wegfällt.

Die erste Anlage der Geschlechtsorgane fällt noch in die letzte Zeit des Larvenlebens, also früher, als man bisher annahm. Bei dem Ausschlüpfen nahen Larven fand ich nämlich dicht unter der Cutis der rechten Seite, vor dem Schlundring, einen feinen, nach hinten etwas erweiterten Zellstrang mit deutlichen Lumen, der vorn und hinten blind geschlossen ohne scharfe Grenze in die Mesodermzellen der Umgebung überging. Die ganze Länge des Stranges betrug c. 0,17 Mm. bei einer Gesammtlänge des Embryos von c. 1,5 Mm.; dieser Strang ist, wie ein Vergleich mit späteren Stadien lehrt, die erste Genitelanlage.

Bei eben ausgeschlüpften Thieren (von c. 2—2,5 Mm.) findet man ohne Ausnahme schon die Anlage der Zwitterdrüse. Dieselbe erscheint als ein c. 0,1 Mm. im Längsdurchmesser messendes Häufchen von Zellen, welche ihrer Form nach sich in nichts von den gewöhnlichen Mesodermzellen der Umgebung unterscheiden, aber durch eine — auch für das erwachsene Organ characteristische Hülle von pigmentirten Bindesubstanzzellen sehr scharf von ihnen abgegrenzt sind. Der Zellstrang, in dem wir jetzt die Uranlage der gesammten ausführenden Geschlechtsorgane erkennen, ist bedeutend nach hinten gewachsen und steht mit der Anlage der Zwitterdrüse in unmittelbarem Contact; sobald die Zwitterdrüse eine Höhlung bekommt, öffnet er sich in diese. Niemals — trotz vieler auf diesen Punkt verwandten Mühe — ist es mir gelungen, eine Zwitterdrüsenanlage ohne Verbindung mit der Anlage der ausführenden Geschlechtsorgane zu sehen, ich muß daher behaupten, daß die Zwitterdrüse sich vom hinteren Ende derselben aus in stetem Zusammenhange mit ihnen entwickelt. Keimdrüse und ausführende Geschlechtsorgane werden daher bei den Pulmonaten nicht getrennt angelegt, sondern entwickeln sich aus ein und demselben mesodermalen Blastem[1]). Bemerkenswerth ist, daß in der

1) Es ist bedauerlich, daß eine Frage von so fundamentaler Bedeutung nur auf negativem Wege zu entscheiden ist. Trotz meines wirklich recht umfang-

Zwitterdrüse schon sehr früh Ureier auftreten; die weiteren Veränderungen bis zur Geschlechtsreife beschränken sich lediglich auf Größenzunahme und Zerfall in einzelne Läppchen.

Das nächste Organ, daß angelegt wird, ist der Penis. Schon in dem oben erwähnten Stadium, bald aber noch deutlicher, markirt es sich als eine anfangs schwache, später stärker hervortretende spindelförmige Erweiterung des »Geschlechtsganges«, wie ich die gemeinsame Anlage der ausführenden Geschlechtsorgane nennen will; dieselbe tritt etwas hinter dem vorderen Ende des Geschlechtsganges auf, welches dadurch als Anlage des Atrium genitale abgegrenzt wird. Diese Anschwellung schnürt sich bald so ab, daß sie als Blindsack an dem Geschlechtsgange hängt und es erscheint schon früh in ihr jene Falte, welche bei der Begattung zunächst hervorgestülpt wird (cf. Jourdain, Rev. sc. nat. VII. 1878, p. 417). Unterdessen hat sich auch der hinter dem Penis befindliche Theil des Geschlechtsganges in 2 Theile geschieden, einen hinteren engeren, den Ductus hermaphroditicus, und einen vorderen, an Weite rasch zunehmenden, die gemeinsame Anlage des Uterus und Oviducts. Diese Weitenzunahme betrifft besonders den hinteren (proximalen) Abschnitt, der schon von Anfang an ein etwas stärkeres Kaliber zeigt, bald fängt er auch an, sich in einzelne Windungen zu legen, und giebt sich dadurch als den proximalen drüsigen Theil der ♀ ausführenden Geschlechtsorgane, den Uterus nach der gewöhnlichen Nomenclatur zu erkennen, wenn nicht vielleicht auch die Anlage der Eiweißdrüse in ihm enthalten sein sollte. Ungefähr um diese Zeit bricht auch das Geschlechtsatrium nach außen durch, nachdem es sich vorher stark nach vorn verlängert hat und zuletzt mit feinem blinden Ende unmittelbar an das Epithel der äußeren Haut stieß. Eine Betheiligung irgend einer ektodermalen Einstülpung bei der Bildung der äußeren Geschlechtsöffnung ist daher mit Sicherheit auszuschließen. Letztere bleibt übrigens lange noch äußerst fein mit einem Durchmesser von nicht mehr als c. 0,02 Mm.

Der nächste Schritt ist nun eine Spaltung des distalen Abschnittes des Oviducts von der Mündung des Penissackes in das Geschlechtsatrium aufwärts gerechnet in zwei Röhren. Diese Spaltung, welche sich allmählig immer weiter proximalwärts gegen die Zwitterdrüse zu fortsetzt, wird ganz einfach durch eine Falte bewerkstelligt, die

reichen Materiales kann mir doch vielleicht grade das Stadium, in welchem eine freie, nicht mit den ausführenden Geschlechtsorganen verbundene Zwitterdrüse da ist, entgangen sein. Für wahrscheinlich kann ich es nicht halten, aber es ist doch gut, die Möglichkeit nicht aus dem Auge zu verlieren.

sich von der inneren Wand des Lumens der Röhre erhebt und der gegenüberliegenden Wand entgegenwächst. Durch die Beschreibungen früherer Autoren (Pansch, Baudelot, J. A. Schmidt, Lehmann, etc.) verleitet, glaubte ich in dieser neu abgespaltenen Röhre die Anlage der Prostata zu finden. Sowie ich indessen einmal die Geschlechtsorgane eines erwachsenen Thieres in eine lückenlose Querschnittreihe zerlegte, konnte ich mich sofort leicht überzeugen, daß bei Limax von einer Trennung der ausführenden Geschlechtsorgane in einen ♂ und ♀ Theil vor dem Abgang des Vas deferens gar nicht die Rede sein kann. Das zarte, platte, drüsige Band, welches Oviduct und Uterus dicht anliegt, sich auch z. Th. abpräpariren läßt und daher bis jetzt unbedenklich für die Prostata erklärt worden ist, steht weder mit dem Vas deferens in irgend welcher Verbindung, noch hat es überhaupt ein Lumen aufzuweisen, vielmehr setzt es sich einzig und allein aus einem Aggregat tubulöser Drüsen zusammen, die mit zahlreichen mikroskopisch feinen Oeffnungen in den Oviduct münden. So merkwürdig es nun auch erscheinen mag, dieser sekundär abgespaltene Gang, welcher in seinen topographischen Verhältnissen so sehr der Prostata anderer Pulmonaten gleicht, bildet sich später in dieses Drüsenband um, wie ich mich auf das Bestimmteste überzeugt habe, wenn mir auch noch nicht alle Einzelnheiten dieses Processes klar geworden sind.

Gleich nach der besprochenen Spaltung des Oviductes tritt das Vas deferens auf; indessen sind mir auch Fälle vorgekommen, wo es derselben voranging, wie denn überhaupt eine genau feststehende Reihenfolge der feineren Entwicklungsvorgänge nicht constatirt werden konnte. Das Vas deferens entsteht ebenfalls auf sehr bemerkenswerthe Weise: es erscheint als blindsackförmige Ausstülpung des Penis, welche mit ihrem blind geschlossenen Ende dem Oviduct (ich will diese hier ganz unpassende Bezeichnung vorläufig noch beibehalten) entgegenwächst, sich an ihn anlegt und unter Resorption der Berührungsstellen der Wandungen sich in ihn öffnet. Für etwaige Nachuntersucher möchte die Bemerkung nicht überflüssig sein, daß der ganze Proceß sehr schnell abzulaufen scheint, und selbst an meinem großen Material in nur wenig Fällen zur Beobachtung kam.

Ist das Vas deferens angelegt, so bleibt die Entwicklung der Geschlechtsorgane abgesehen von der stetigen Größenzunahme und der allmählig immer weiter proximalwärts vorrückenden Spaltung des Oviducts lange Zeit stabil. Erst ganz spät, bei Thieren von 1 Ctm. Länge und darüber wird das Receptaculum semin, als einfache, anfangs ganz weithalsige Ausstülpung des Atrium genit angelegt, welches letztere durch allmählige Verkürzung in die bleibenden Ver-

hältnisse übergeführt wird. Hier brechen meine Beobachtungen vorläufig ab, so daß ich über die Entwicklung des noch fehlenden Gliedes des Genitalsystems, die Eiweißdrüse noch nichts aussagen kann. Doch ist es leicht möglich, daß dieses jedenfalls erst ganz spät auftretende Organ aus Ausbuchtungen hervorgeht, welche sich am hinteren Ende des Uterus zu beiden Seiten des Duct. hermaphrod. bei meinen älteren Entwicklungsstadien bemerkbar machen. Ich habe diese Lücke in meinen Beobachtungen bisher darum noch nicht ausfüllen können, weil selbst wenig ältere Thiere, als die letzterwähnten, schon in allen Punkten die bleibenden Verhältnisse zeigten.

Vor einiger Zeit sind von anderer Seite (M. H. Rouzeaud, Sur le développement de l'appareil reproducteur des Mollusques pulmonés. Compt. rend. I, 96, 1883. p. 273—276) Mittheilungen über den gleichen Gegenstand gemacht worden, welche von den meinigen leider außerordentlich abweichen. Der Autor, Hr. Rouzeaud läßt die Geschlechtsorgane aus einer Ektodermknospe hervorgehen, welche durch fortgesetzte Knospung und Sprossenbildung den gesammten Genitalapparat aus sich heraus entwickelt. Und auch in den weiteren Einzelnheiten herrscht wenig Uebereinstimmung mit meinen Ergebnissen. Es liegt mir fern, eine erst in vorläufiger Mittheilung vorliegende Untersuchung einer ausführlichen Kritik unterziehen zu wollen, doch sei es mir gestattet, zur Vertheidigung meiner Resultate ganz kurz auf zwei Punkte hinzuweisen, in welchen die Rouzeaud'schen mir nicht stichhaltig erscheinen. Was nämlich erstens Rouzeaud's Untersuchungsmethoden betrifft, so erfahren wir darüber zwar nichts Positives, doch darf man nach einer gelegentlichen Aeußerung (»dissections très minutieuses« l. c. p. 274) und der ganzen Art seiner Schilderung wohl annehmen, daß er sich ausschließlich oder vorwiegend der anatomischen Zergliederung bedient hat. Ist diese Vermuthung richtig, so wäre damit die Zuverlässigkeit seiner Resultate allerdings sehr in Frage gestellt, denn ich muß es nach meinen Erfahrungen für schlechterdings unmöglich erklären, auch bei der größten Geduld und Geschicklichkeit befriedigende Einsicht in so verwickelte Verhältnisse mit dieser Methode zu gewinnen. Zweitens aber möchte ich zur Stütze meiner Befunde auf einen jüngst veröffentlichten, sehr interessanten Fall von Mißbildung der Geschlechtsorgane bei einer Helix pomatia aufmerksam machen (Ch. Magenot. Un cas d'atrésie de l'orifice génital externe chez un Hélix pomatia. Bull. soc. zool. France ann. 1883 p. 130). Es fand sich hier nämlich, abgesehen von anderen Abnormitäten, erstens die schon im Titel angekündigte Atresia orificii ext., zweitens aber erreichte das Vas deferens die Prostata nicht, sondern beschränkte sich auf einen

kurzen dem Penis aufsitzenden Blindsack. Beide Abweichungen erklären sich nach meinen entwicklungsgeschichtlichen Befunden einfach als Hemmungsbildungen, während sie nach der Rouzeaud'schen Darstellung, die auch in Betreff der Bildung des Vas deferens zu ganz anderen Resultaten kommt, absolut keiner Deutung fähig sind.

Theoretische Erörterungen dürften in dieser kurzen Mittheilung kaum am Platze sein. Einige naheliegende Schlüsse wird jeder Leser selbst ziehen können; besonders bemerkenswerth dürfte vielleicht der Umstand sein, daß die durch die Prosobronchier bleibend repräsentirte einfache Bildung der Geschlechtsorgane hier vorübergehend ontogenetisch durchlaufen wird.

Zur Systematik des Genus Loligopsis Lam. (Leachia Lesueur).

Von

J. Brock.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Im Sommer dieses Jahres erhielt ich von Hrn. Dr. Breitenbach zwei in Alkohol gut conservirte Cephalopoden, die er bei seiner Rückreise von Brasilien nach Europa am 11. Sept. 1883 auf hohem Meere unter 38° 34′ w. Br. Greenw. 37° 38′ n. Br. erbeutet hatte. Es stellte sich bald heraus, daß ich Vertreter des seltenen und schlecht gekannten Genus Loligopsis Lam. vor mir hatte.

Die Geschichte dieses Genus ist bekanntlich eine sehr merkwürdige. Die beiden ältesten Species (L. Péronii, auf welche das Genus gegründet ist, und L. [Leachia] cyclura Les.) wurden beide nur nach Zeichnungen aufgestellt, welche 8armige Cephalopoden mit Dekapodencharacteren darstellten. Beide Umstände machten das Genus natürlich äußerst verdächtig und es wurde dementsprechend von allen folgenden Autoren behandelt, bis ihm Grant (Transact. zool. soc. Lond. I. 1835) durch die genaue Beschreibung einer neuen Species L. guttata, welche aber später durchweg mit L. cyclura vereinigt wurde [1]), einen festen Platz im System verschaffte. Von besonderer Wichtigkeit war der hier zum ersten Mal gegebene Nachweis, daß

1) Ob wirklich mit Unrecht, wie neuerdings Tryon (Man. conchol. I. 1879, p. 168) behauptet, kann ich nicht entscheiden, weil mir die Originaldiagnose von L. cyclura (Journ. Philadelph. acad. II, 1821) unzugänglich ist.

die Fangarme nicht ganz fehlen, sondern durch sehr kleine stummelartige Hervorragungen ersetzt sind, wie als wenn sie durch äußere Gewalt dicht an der Wurzel abgerissen worden wären. Obgleich der beiderseits völlig gleiche Befund nicht gerade sehr zu Gunsten einer zufälligen Verstümmelung sprach, scheint man eine solche in der Folgezeit bei allen achtarmigenen Arten doch stillschweigend angenommen zu haben, denn es wurden von den späteren Autoren außer achtarmigen Species (L. ellipsoptera Adams & Reeve, L. Bomplandii Vér.) auch solche mit langen Fangarmen, (wenn ich von den später als Chiroteuthis abgetrennten absehe, L. hyperboraea Steenstr.) unbedenklich dem Genus eingereiht, das in L. pavo Les. allerdings schon von früher her solche Formen aufzuweisen hatte. Der hierdurch eingerissenen Verwirrung machte erst 1861 Steenstrup durch eine gründliche kritische Revision des Genus ein Ende (Overs. k. dansk. Vidensk. Selsk. Forhandl. 1861 p. 70). Der berühmte Kenner der Cephalopoden bestätigte zunächst die schon von d'Orbigny, (Férussac & Orbigny, Hist. gén. particul. Céphalop. acétabulif. viv foss. p. 221) richtig vermuthete nahe Verwandschaft von Loligopsis, welchen Namen er als auf eine unerkennbare Species begründet, zu Gunsten von Leachia Les. verwarf, mit Cranchia und faßte beide Genera in eine Familie Cranchiaeformes zusammen; weiter aber vermochte er an neuem ihm zugegangenem Material festzustellen, daß die Tentakelstümpfe der Grant'schen L. guttata keine zufällige Verletzung sind, sondern ein regelmäßiges Vorkommniß bilden, mag man nun diese eigenthümliche Bildung für eine ursprüngliche ansehen, oder sie auf einen in einem gewissen Lebensalter normaler Weise eintretenden Verlust der Fangarme zurückführen wollen. Darauf gestützt, folgerte dann Steenstrup weiter, daß bei den früher beschriebenen achtarmigen Loligopsis-Arten die Tentakelstümpfe nur übersehen worden sind, und zweitens, daß diese Eigenthümlichkeit der Tentakel zu einem Hauptgenuscharacter erhoben werden muß. Für die Loligopsis-Arten mit langen Fangarmen, welche demnach aus dem Genus auszuscheiden sind, errichtete er das Genus Tasnius.

Leider fand diese wichtige Abhandlung, wohl der Sprache wegen, in der sie geschrieben ist, bis auf die neueste Zeit wenig Beachtung. Nicht nur, daß noch 1882 von Owen wieder ein neuer Loligopsis mit langen Fangarmen beschrieben wurde (L. ocellata, Transact. zool. soc. Lond. XI) — viel schlimmer ist die wahrhaft unergründliche Verwirrung, in welche Tryon die beiden Genera Cranchia und Loligopsis in seinem großen Compilationswerke gebracht hat und welche bei irgend welcher Kenntniß der Steenstrup'schen Abhandlung wohl unterblieben wäre.

Die beiden Exemplare, die mir ein glücklicher Zufall in die Hand gab, setzen mich in den Stand, für die von Steenstrup eingeführte Begrenzung der Art auf das Nachdrücklichste einzutreten. An beiden nämlich finden sich auf beiden Seiten in völlig gleicher Weise die Fangarme durch 0,15 mm. lange Stummel (bei einer Gesammtlänge der Thiere von c. 8 Ctm.) ersetzt, welche wie an Steenstrup's und Grant's [1]) Exemplaren abgerundet und von der chromatophorenhaltigen äußeren Körperhaut überzogen waren. In diesen Rudimenten die ursprüngliche Bildung der Tantakel zu sehen, würde ich mich doch nur schwer entschließen können. Viel eher möchte ich dafürhalten, daß die Tentakel normaler Weise (wahrscheinlich in der Jugend) verloren gehen, indem an einer bestimmten Stelle der Basis (— die in allen beobachteten Fällen gleiche Länge der Stümpfe deutet darauf hin —) der Zusammenhang durch eine physiologische Atrophie der Gewebe gelöst wird [2]). Wie dem aber auch sein möge, jedenfalls ist dieses Verhalten der Tentakel so merkwürdig, daß es nicht nur in die Genusdiagnose mit aufgenommen werden, sondern dort oben anstehen muß.

Ob die beiden mir von Hrn. Breitenbach übergebenen Exemplare eine neue Art bilden müssen, ist bei der ungenügenden Characteristik der meisten älteren Species schwer zu entscheiden. Steenstrup erkennt als Ergebniß seiner kritischen Revision des Genus, (bei der aber L. Bomplandii Vér. keine Berücksichtigung erfährt) nur zwei haltbare Arten an, L. cyclura Les. und L. ellipsoptera Ad. & Reeve, ist aber sehr geneigt, auch noch diese beiden in eine einzige Art zusammenzuziehen, indem er annimmt, daß die Punkte, in welchen L. cyclura von der ziemlich ungenügend beschriebenen und abgebildeten L. ellipsoptera abweicht, von den Autoren bei der Abfassung der Speciesdiagnose übersehen oder unrichtig dargestellt wor-

---

1) Daß es sich auch bei Grants L. guttata so verhielt, kann man daraus schließen, daß »no appearance of laceration« vorhanden war.

2) Die einzige bis jetzt bekannte Analogie für die letztere Annahme würde Véranya bieten, bei der die Tentakel auch bei jungen Thieren verloren gehen sollen. Den neuerdings von Ray Lankester aus der Challenger-Ausbeute beschriebenen Procalistes Suhmii n. g. n. sp. (Quart. journ. misc. sc. n. s. No. XCIV, p. 11), bei dem sogar die kurzen Arme und die Saugnäpfe der Tentakel abgeworfen werden sollen, möchte ich vorläufig noch unberücksichtigt lassen; denn so merkwürdig diese neue wohl sicher zu den Cranchiaden gehörige Form auch ist, darf man doch nicht vergessen, daß die ganzen weit gehenden Folgerungen Ray Lankester's auf der Vergleichung von nur zwei ganz jugendlichen Exemplaren beruhen, von denen es nicht einmal ausgemacht ist, in wie weit sie intakt waren.

den sind. Die Breitenbach'schen Exemplare, welche im Ganzen gut mit L. cyclura stimmen, geben einen neuen Anhalt für die Wahrscheinlichkeit dieser Vermuthung. Erstens nämlich stammen sie, wie auch die Steenstrup'schen Exemplare von L. cyclura, aus dem nord-atlantischen Ocean, dem Fundort der angeblichen L. ellipsoptera, und dann ist bei ihnen die Schwanzflosse etwas breiter, als hoch, wie bei L. ellipsoptera, während sie bei der typischen cyclura höher, als breit sein soll. Es bleiben also noch von Unterschieden 1) die Bildung der Tentakel bei L. cyclura, 2) der merkwürdige Knorpelstreifen derselben Species, der jederseits von dem Punkte, wo der Mantel an den Trichter geheftet ist, nach unten zieht, und der L. ellipsoptera fehlen soll, 3) die Länge der Arme, deren Reihenfolge bei L. ellipsoptera nach den Text der Beschreibung (Voy. H. M. Samarang, Zool. Moll.) 4 1 2 3 (und nicht, wie Tryon l. c. p. 163 fälschlich angiebt 2 3 4 1) sein soll, während sie bei der typischen L. cyclura (denen sich die Breitenbach'schen Exemplare hierin anschließen) 3 2 4 1 ist, und 4) die Anheftung des Mantels an den Kopf bei L. cyclura, deren bei ellipsoptera keine Erwähnung geschieht. Daß Steenstrup in Bezug auf 1) im Recht ist und die Tentakelstümpfe von Adams & Reeve nur übersehen worden sind, dürfte wohl nicht zu bezweifeln sein; auch 4) erledigt sich durch die beigegebene Abbildung (ibid. Pl. I, Fg. 1), in der wenigstens die beiden Anheftungsstellen des Mantels zu beiden Seiten des Trichters ziemlich deutlich zu erkennen sind. Daß auch die characteristischen Knorpelstreifen Adams & Reeve nur entgangen sein sollten, möchte eine gewagte Annahme erscheinen; mir selbst ist es durchaus nicht unwahrscheinlich, da die betreffenden Gebilde keineswegs so auffallend sind, als man nach den Abbildungen glauben sollte, und sie auch von mir erst bei wiederholter Untersuchung meiner Exemplare und dann zuerst durch das Gefühl, nicht durch das Gesicht aufgefunden wurden. In Bezug auf 4) endlich, die relative Länge der Arme, stehen Abbildung und Beschreibung von L. ellipsoptera in unlösbarem Widerspruch, denn die erstere zeigt, deutlich die Reihenfolge 3 2 4 1 (also die der typischen cyclura) gegen 4 1 2 3 des Textes. Also auch dieser Punkt ist mindestens sehr zweifelhaft.

Ich nehme daher auf Grund der Breitenbach'schen Exemplare, welche auch die Differenz in den Flossen zwischen beiden Arten überbrücken, an, daß bis jetzt nur eine wohlbegründete Loligopsis-Art nachgewiesen ist, welche Loligopsis cyclura oder vielleicht besser Leachia cyclura Les. heißen muß. Ob das Adams-Reeve'sche Originalexemplar von L. ellipsoptera noch existirt (British Museum?), weiß ich nicht; sollte

es der Fall sein, so hoffe ich in nicht zu ferner Zeit Gelegenheit zu finden, durch Untersuchung desselben die Frage nach der Identität beider Art endgültig zu erledigen.

Ueber die von Mittag-Leffler herausgegebenen „Acta mathematica“.

Mittheilung von

Ernst Schering.

Eine der erfreulichsten Erscheinungen im Gebiete der mathematischen Wissenschaften bildet das Entstehen der neuen Zeitschrift »Acta mathematica«, welche unmittelbar von ihrem Beginn in gleichem Rang mit den ersten wissenschaftlichen Journalen steht.

Es bleibt unvergessen, daß es der große Norweger Abel war, dessen zeitweiliger Aufenthalt in Deutschland wesentlich die Veranlassung bot, daß hier diejenigen wissenschaftlichen Blätter entstanden, welche noch heute und zwar gegenwärtig unter besonders günstigen Aussichten für die Zukunft an Gediegenheit des Inhaltes unübertroffen dastehen. Nach einem halben Jahrhundert ist nun die Zahl der Mathematiker so groß geworden, daß außer andern Zeitschriften mit besondern Zielen und in verschiedenen Ländern, jetzt in Skandinavien diese »Acta Mathematica« mit den höchsten Zielen der Wissenschaft und zugleich mit dem glücklichsten Erfolg entstanden sind.

Der munificenten Protection des für die Wissenschaften begeisterten Königs haben sie ihre Existenz zu danken. Von diesem hohen Beispiel angeregt brachten bedeutende Männer des Inlandes und auch des Auslandes große Donationen dar. Der Hauptredactor, der berühmte Mathematiker Professor Doctor Gösta Mittag-Leffler, bietet durch seinen Namen die Bürgschaft, daß die aufgestellten hohen Ziele der Zeitschrift immer erreicht werden. Mit seiner ungewöhnlichen Arbeitskraft bewältigt er nicht nur die große Masse der Redactions-Geschäfte, sondern bereichert auch selbst die Wissenschaft mit neuen hervorragenden und fruchtbringenden eigenen Werken.

Zahlreiche Mitarbeiter, nicht nur die in deutscher, französischer und englischer Sprache schreibenden Schweden, Norweger, Dänen und Finnländer, sondern auch Deutsche, Franzosen und Italiener haben für die schon erschienenen und die ferner erscheinenden Bände Abhandlungen eingesendet. Diese Autoren und diejenigen, welche außerdem noch ihre Mitwirkung zusagten, bekunden den großen Er-



folg, welchen der Redactor erreicht hat; sie zeigen auch, daß die Gründung einer neuen mathematischen Zeitschrift eine Nothwendigkeit geworden war.

Aber nicht nur der Production erwies sie sich als unentbehrlich sondern auch der Reception war sie sehr willkommen, wie sich äußerlich besonders dadurch zu erkennen giebt, daß das auf das Alter ihrer Wissenschaft mit Recht so stolze Frankreich die Bibliotheken aller ihrer wissenschaftlichen Schulen mit dieser im Auslande herausgegebenen Zeitschrift schmückt, und dadurch die von ihrem Meister ausgehenden so hervorragenden Arbeiten der Heimath wieder zuführt.

Mit gleicher Freude sind die »Acta Mathematica« in Deutschland, Italien, England und Nordamerika begrüßt, und allgemein herrscht die Ueberzeugung, daß dieser Erfolg ein dauernder sein wird.

Berichtigung.

Auf pag. 441, Zeilen 7 und 13 von unten ist zu lesen: Polarisator anstatt Analysator.

Auf pag. 457, Zeile 1 von unten ist zu lesen: 117° 2′ anstatt 121° 29′.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September 1884.

(Fortsetzung.)

Annuaire statistique de la province de Buones-Aires. 2e année.
20th annual report of the Alumni association of the Philadelphia college of pharmacy.
Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen i. V. 4. Jahresschr. auf d. Jahr 1883/84.
Mittheilungen des historischen Vereins für Steiermark Heft 22.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Jahrg. XX.
Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde für das Vereinsjahr 1883/84.
Proceedings of the Davenport academy of natural sciences. Vol. II. P. 2.
Memoirs of the Boston society of natural history. Vol. III. No. 4—7.
Anniversary memoirs of the Boston society of natural history. for the 5th anniversary. 1830—1880.

Von der Akademie der Wissenschaften in Krakau.

Jahrbuch der Verwaltung der Akademie der Wissenschaften zu Krakau. Jahrg. 1883. Krakau 1884. 8.
Abhandlungen und Berichte aus den Sitzungen der Akademie der Wissenschaften zu Krakau.
Mathematisch-naturwissensch. Classe Bd. XI mit 10 Taf. Krakau 1884. 8.
Historisch-philosophische Classe. Bd. XVII mit 2 Taf. Krakau 1884. 8.
Berichte der physiographischen Commission der Akademie der Wissenschaften zu Krakau. Band XVIII. Krakau 1884. 8.
Archiv für Geschichte der Litteratur und Aufklärung in Polen (Publikation der Akademie der Wissensch. zu Krakau). Band III. Krakau 1884. 8.
Acta historica res gestas Poloniae illustrantia. Vol. VI. Acta regis Joannis III ad res imprimis expeditionis Viennensis A. 1683. illustrandas ed. Franz Kluczycki. Krakau 1883. 4.
Vol. VII. Acta quae in Archivo ministerii rerum exterarum Gallici ad Joannis III regnum illustrandum spectant ed. Kasimir Waliszewski. Bd. III. Ibid. 1884. 4.
Abhandlungen der Commission zur Erforschung der Geschichte der Kunst in Polen. Band III. Heft 1. Krakau 1884. 4.
Denkmäler des alten Polnischen Rechts. Bd. VIII Theil I. Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracoviensis. Pars I 1374—1390. ed. curavit Boleslaus Ulanowski. Cracoviae 1884. 4.
Korzon, Thaddaeus, innere Geschichte Polens unter Stanislaus August 1764—1794. Bd. III. Krakau 1884. 8.
Sammlung von Mittheilungen zur vaterländischen Anthropologie hrsg. durch die anthropologische Commission der Akad. der Wissenschaften zu Krakau. Bd. VIII. Krakau 1884. 8.
Morawski, Kasimir, Andreas Patricius Nidecki, sein Leben und seine Werke. Theil I. 1522—1572, hrsg. von der Akademie der Wissensch. zu Krakau. Krakau 1884. 8.

October 1884.

Nature Nr. 775—783.
Journal of de royal microscopical Society. Vol. IV. P. 5.
Ohrtmann, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XIV. Hft. 1.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Bd. XIX. Hft. 2.
Leopoldina. Hft. XX. Nr. 17. 18.
Bulletin de l'academie roy. des sciences etc. et de Belgique. 3 Sér. T. VIII. Nr. 7. 8.
Notes of the Services of B. H. Hodgson esq. collected by a friend. 1883. 8.
Atti della r. accademia delle scienze di Torino. Vol. XIX. Disp. 6. 7.
G. Cantor, Ueber unendliche lineare Punktmanchfaltigkeiten. S. A. a. d. mathemat. Annalen.
Nouveaux mémoires de la société impér. des naturalistes de Moscou. T. XV. Livr. 1.
Bulletin de la société impér. des naturalistes de Moscou année 1883. Nr. 4.
Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. VI. Hft. 1.
Sitzungsberichte der mathematisch-physicalischen Classe der k. k. Acad. der Wissenensch. 1884. Hft. 2.
Jahresbericht der k. ungarischen geologischen Anstalt für 1883.
Geologische Mittheilungen. Ztschr. der ungarischen geolog. Gesellschaft. Bd. XIX. Hft. 4—8.
Katalog der Bibliothek u. allgem. Kartensammlung der k. ungar. geologischen Anstalt 1884.
Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey. June 1882. P. I, II.
Scientific transactions of the roy. Dublin society. Vol. I. Series 2. Nr. XX—XXV. Vol. III. Series 2. Nr. I—III (Nr. II in duplo).
Scientific proceedings of the roy. Dublin society. Vol. III. P. 6. 7. Vol. IV. P. 1—4.

Von der
königl. ungarischen naturwissenschaftl. Gesellschaft.

J. Buza, die Krankheiten unserer Culturpflanzen.
E. Daday, Darstellung der ungarischen zoologischen Literatur in d. Jahren 1870—1880.
L. Gruber, Anleitung zu geographischen Ortsbestimmungen.
T. Kosutany, Ungarns Tabakssorten.
G. Schenzl, Anleitung zu erdmagnetischen Messungen.
F. Hazslinszky, die Flechtenflora des ungarischen Reiches.

* * *

Nova acta regiae societatis scientiarum upsalensis. Ser. VII. Vol. XII. fasc. I.
Report of the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger 1873—76. Zoology. Vol. IX. (Ein Band Text, ein Band Abbildgen.)
Proceedings of the London mathematical society. No. 225—228.
Verhandelingen van de bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschapen. D. XLIV.
Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde. D. XXVIII. Aufl. 6. D. XXIX. Aufl. 1.
Bijdragen tot de taal-, land en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. D. VIII. St. 1.
Notulen van de algemeene en bestuursvergadering van het bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschapen. D. XXI. No. 2.
J. Lieblein, gammelaegyptisk religion. Del. I, II. Kristiania 1883. 1884.
Ders., études sur les Xétas. S. A. aus Vol. II. des travaux de la 3e session du congrès international des orientalistes.
Ders., über datirte ägyptische Texte. S. A. aus der Abhandl. des 5e internationalen Orientalisten Congresses.
Ders., über altegyptische Religion. S. A. aus Travaux de la 6e session du congrès international des Orientalistes à Seide.
Ders., Egyptian religion. Lpz. 1884. 8.
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen u. histor. Classe der k. bair. Akademie d. Wissensch. 1884. Hft. 2.
Proceedings of the scientific meetings of the zoological society of London 1884. P. II.
A List of the fellows of the zoological society of London. June 1884.
Astronomical and magnetical and meteorological observations made at the roy. observatory Greenwich in the year 1882. Lond. 1884.
Proceedings of the canadian institute. Vol. II. Fasc. 1. 2.
Memoirs of the Museum of comparative zoology at Harvards College. Vol. X. No. 3.
Annual report of the trustees of the museum of comparative zoology at Harvards College. 1867. 1868.
Bulletin of the museum of comparative zoology at Harvards College. Vol. X.
Transactions of the Wisconsin academy of sciences, arts et letters. Vol. III.
Proceedings of the american philosophical society. Vol. XXI. Nr. 115.
Transactions of the New-York Academy of sciences. Register zu Bd. II.
Annals of the New-York academy of sciences. Vol. III. No. 1. 2.
Proceedings of the american academy of arts and sciences. New Series. Vol. XI. P. 1. 2.
Publications of the Washburn-observatory of the university of Wisconsin. Vol. II.
Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. XI. Zoologi.
Geologische Karte von Ungarn. Bl. K. 15 u. Erläuterung.
Ztschr. der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Oct.
Mittag-Leffler, Acta mathematica. 4, 4.
23ter Bericht der oberhessischen Gesellschaft für Natur und Heilkunde.
(W. Schlötel) Reise-Abenteuer eines Deutschen in der Schweiz. A. D. 1884.
Irmischia. 4ter Jahrgg. Nr. 5—9.
Despeyroux, cours de mécanique. Avec des notes par M. G. Darboux. T. I. Paris 1884.

Öfversigt af finska Vetenskaps societetens förhandlingar. XXV.
Acta societatis scientiarum fennicae. T. XIII.
Colorado scientific society, the artesian wells of Denver. 1884.
Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- u. Völkerkunde Ost-Asiens. Hft. 31.
Annales de la faculté des lettres de Bordeaux. 2e Sér. 1884. No. 2.
Verhandlungen der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Academie. Bd. XLV. XLVI.
Boncompagni, bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matemat. e fisiche. T. XVII. Genn.
American Journal of mathematics. Vol. VII. Nr. 1.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Jahrgg. XIX. Hft. 3.
Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. Hft. 28.
Bulletin de l'academie impér. des sciences de St. Petersbourg. T. XXIX. Nr. 3.
R. Clausius, zur Theorie der Kraftübertragung durch dynamoelectrische Maschinen. S. A. aus den Ann. für Physik und Chemie.
H. Gyldén, om ett af Lagrange behandladt fall af det s. k. trekoppars problemet. S. A. aus Öfversigt af kongl. vetenskaps akademien förhandlingar.
Ders., Grunddragen af en enkel method att lösa åtskilliga problem i den analytiska mekaniken. Desgl.
Ders., en hypothes att förklara planetsystemets utbildning. Desgl.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

30. December. **№ 13.** 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 6. December 1884.

Schering, astronomische Beobachtungen auf der königl. Sternwarte Göttingen.
H. A. Schwarz, Bemerkung zu der in No. 10 der Nachrichten abgedruckten Mittheilung des Herrn Weierstrass: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen.
Riecke, über die electrodynamische Rotation einer Flüssigkeit.
Voigt, über die optischen Eigenschaften sehr dünner Metallschichten.
Frensdorff, Jacob Grimm in Göttingen.
Leo Meyer (Correspondent), über die Flexion des präsentischen Particips und des Comparativs im Gothischen.

In dieser Sitzung, der letzten im 133. Jahre des Bestehens der Gesellschaft, waren die Preisaufgaben zu verkünden und über die Personalveränderungen Bericht zu erstatten.

Die Preisaufgabe der physikalischen Classe, für deren Lösung der Termin mit dem November d. J. ablief, hat keinen Bewerber gefunden.

Die noch zu bearbeitenden Aufgaben lauten:

Für den November 1885 von der mathematischen Classe:

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften verlangt, daß die von Eisenstein angefangene Untersuchung über den Zusammenhang der quadratischen Zerfällung der Primzahlen mit gewissen Congruenzen für die Fälle, in welchen die von Cauchy und Jacobi angewandten Principien nicht mehr ausreichen (s. Crelle, Journ. f. d. Mathematik. Bd. 37. S. 97 ff.) fortgesetzt und soweit möglich zu Ende geführt werde.

Für den November 1886 von der philologisch-historischen Classe:

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften wünscht eine möglichst vollständige Uebersicht und kritische Erörterung der Versuche, die Nationalitäten Europas sei es durch wirkliche Volkszählungen nach der Sprache, sei es durch anderweitige Schätzungen numerisch festzustellen, an welche sich ein eigener Versuch, die Bevölkerung Europas etwa im Stande vor 1880—81 nach den Nationalitäten zu gliedern anzuschließen hätte.

Die Aufgabe zerfällt hiernach in drei Haupttheile.

Die Volkszählungen sind auf ihre verschiedenen Methoden hin zu untersuchen und speciell sind die Differenzen im Effect für jene Länder zu erörtern, wo die Methoden von einer Volkszählung zur andern gewechselt haben (wie z. B. in der Schweiz). Es frägt sich, ob gerade bei dieser Kategorie sich für bestimmte Nationalitäten ein verschiedener Zählungsmodus empfiehlt.

Was die Abschätzungen betrifft, so wird besonderer Werth auf eine möglichst erschöpfende Untersuchung nach dem eigentlichen Ursprung jeder einzelnen gelegt. Es genügt hier selbstverständlich nicht eine genaue Nachweisung der literarischen Quellen, sondern die als werthvoll erkannten Schätzungen sind auf ihre eigenen Methoden hin gleichfalls kritisch zu erörtern.

Bei der oben bezeichneten Schlußaufgabe wird man sich selbstverständlich in manchen Fällen mit ziemlich rohen Annäherungen an die Wahrheit begnügen müssen. Aber für jene Landstriche, in denen früher genauere Feststellungen stattgefunden haben, gilt es auf alle in Frage kommenden Momente, welche im Laufe der Zeit eine Verschiebung des procentualischen Verhältnisses haben hervorrufen können, im Detail einzugehen und somit der Controle alle Hülfsmittel darzubieten.

Die neue Aufgabe der physikalischen Classe für November 1887 lautet:

Es wird gewünscht eine eingehende insbesondere auch chemische Untersuchung 1) des stickstofffreien Reservestoffs, welcher in den Samen der gelben und blauen Lupine (muthmaßlich auch anderer Lupinen-Arten) die Stelle des für gewöhnlich in den Samen der Leguminosen enthaltenen Stärkemehls vertritt, sowie 2) der Umwandlung dieses Reservestoffs bei der Keimung.

Die Concurrenzschriften müssen, mit einem Motto versehen, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die K. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden, begleitet von einem



versiegelten Zettel, welcher den Namen und Wohnort des Verfassers enthält und auswendig mit dem Motto der Schrift versehen ist.

Der für jede dieser Aufgaben angesetzte Preis beträgt mindestens fünfzig Ducaten.

* * *

Die Preisaufgaben der Wedekind'schen Preisstiftung für deutsche Geschichte für den Verwaltungszeitraum vom 14. März 1876 bis zum 14. März 1886 finden sich abgedruckt in diesem Jahrg. der Nachrichten S. 312.

Das Directorium der Gesellschaft ging am 1. October d. J. von Herrn Prof. Ehlers auf Herrn Geh. Hofrath Wilhelm Weber über.

Aus der Reihe der ordentlichen Mitglieder und mitten aus seiner erfolgreichen Lehrthätigkeit schied am 14. Juli durch plötzlichen Tod Prof. Hans Hübner, im noch nicht vollendeten 47. Lebensjahre.

Die Gesellschaft verlor ferner durch Todesfall ihren Assessor

W. Klinkerfues im 57. Jahre

und von ihren auswärtigen Mitgliedern und Correspondenten:

Jean Baptiste Dumas in Paris im 84. Jahre.
Quintino Sella in Rom im 57. Jahre.
Adolph Wurtz in Paris im 67. Jahre.
Laurence Smith in Louisville.
Ferdinand von Hochstetter in Wien im 55. Jahre.
Siegfried Aronhold in Berlin im 64. Jahre.
Humphrey Lloyd in Dublin im 83. Jahre.
Julius Schmidt in Athen im 59. Jahre.
Richard Lepsius in Berlin im 74. Jahre.
Gustav Droysen in Berlin im 76. Jahre.
Carl Müllenhoff in Berlin im 66. Jahre.
Arnold Schäfer in Bonn im 65. Jahre.

In der Sitzung am 3. Mai wählte die königl. Gesellschaft zu ihrem Ehrenmitglied

Herrn Staatssecretär Dr. Heinrich Stephan in Berlin,

in der Sitzung am 6. December zu auswärtigen Mitgliedern die bisherigen Correspondenten:

Herrn Johannes Gildemeister in Bonn.
„ F. C. Donders in Utrecht,

zu Correspondenten:

Herrn Barrée de Saint-Venant in Vendôme.

Herrn F. Tisserand in Paris.
„ Henri Poincaré daselbst.
„ Emile Picard daselbst.
„ Thomas Andrews in Belfast.
„ Otto Benndorf in Wien.
„ Curt Wachsmuth in Heidelberg.
„ Heinrich Nissen in Bonn.
„ Adalbert Bezzenberger in Königsberg.
„ Gustav Tschermak in Wien.
„ Martin Websky in Berlin.
„ Eduard Süss in Wien.
„ Theod. W. Engelmann in Utrecht,

zum Assessor:

Herrn B. Tollens hierselbst.

Bemerkung zu der in No. 10 dieser Nachrichten abgedruckten Mittheilung des Herrn *Weierstrass*.

Von

H. A. Schwarz.

Die Untersuchung der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen hat Herrn Weierstrass in der in No. 10 dieser Nachrichten (Seite 397—419 des gegenwärtigen Jahrganges) abgedruckten Mittheilung zu einem bemerkenswerthen Satze geführt, welcher als ein Fundamentalsatz dieser Theorie angesehen werden kann.

Wenn für ein Gebiet solcher Größen die arithmetischen Grundoperationen den a. a. O. dargelegten Gesichtspunkten gemäß definirt werden, so ist es, wie Herr Weierstrass nachgewiesen hat, stets möglich, jede dem betrachteten Gebiete angehörende complexe Größe a in eine gewisse Anzahl von Componenten $a_1, a_2, \ldots a_r$ zu zerlegen, welche beziehlich den auf Seite 404—407 der angeführten Mittheilung erklärten Theilgebieten $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_r$ angehören.

Die Definition dieser Theilgebiete stützt sich auf die vorausgehende Annahme einer Größe g mit den Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, wobei diese Größe nur den Einschränkungen unterworfen ist, daß sie kein Theiler der Null sein darf, daß die Determinante $|\xi_\mu^{(\nu)}| = X_0$ einen von Null verschiedenen Werth haben muß und daß die Discriminante der Gleichung $f(\xi) = 0$ nicht gleich Null sein darf.

Es kann nun die Frage aufgeworfen werden, ob die Definition der erwähnten Theilgebiete von der Annahme der Größe g wirk-

lich abhängt, mit anderen Worten, ob die erklärten Theilgebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_r$ bei anderer Wahl der Größe g sich ändern oder nicht?

Im Nachfolgenden erlaube ich mir ein Schlußverfahren mitzutheilen, durch welches diese Frage beantwortet werden kann.

Es sei bei Zugrundelegung einer bestimmten Größe

$$g = \sum_a \xi'_a e_a$$

r' die Anzahl der Theilgebiete $\mathfrak{G}_\varrho$, welche Mannigfaltigkeiten einer Dimension, r'' die Anzahl der Theilgebiete $\mathfrak{G}_\sigma$, welche Mannigfaltigkeiten zweier Dimensionen sind, so daß $r = r'+r''$, $n = r'+2r''$ ist, während die Indices ϱ, σ zwei ganze Zahlen bezeichnen, von denen die erste r', die zweite r'' von einander verschiedene Werthe annehmen kann.

Denkt man sich nun die Größen $g^{(\varrho)}$ und die Größenpaare $g^{(\sigma)}$, $k^{(\sigma)}$ zu neuen Haupteinheiten gewählt, so ist die Größe e_0 bestimmt durch die Gleichung

$$e_0 = \sum_\varrho g^{(\varrho)} + \sum_\sigma g^{(\sigma)}. \qquad \text{[Siehe Seite 405 (18.)]}$$

Es bezeichne jetzt x eine beliebige Größe des betrachteten Gebietes, es sei also

$$x = \sum_\varrho \eta_\varrho g^{(\varrho)} + \sum_\sigma (\eta_\sigma g^{(\sigma)} + \zeta_\sigma k^{(\sigma)}),$$

so ergiebt sich, wenn festgesetzt wird, daß die Bezeichnungen

$$\eta g^{(\sigma)} + \zeta k^{(\sigma)} \quad \text{und} \quad (\eta + \zeta i) g^{(\sigma)} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

gleichbedeutend sein sollen, aus der Gleichung

$$x = \sum_\varrho \eta_\varrho g^{(\varrho)} + \sum_\sigma (\eta_\sigma + \zeta_\sigma i) g^{(\sigma)}$$

durch Erhebung beider Seiten in die ν^{te} Potenz die Gleichung

$$x^\nu = \sum_\varrho \eta_\varrho^\nu g^{(\varrho)} + \sum_\sigma (\eta_\sigma + \zeta_\sigma i)^\nu g^{(\sigma)}.$$

Denkt man sich nun n aus einer unbenannten Haupteinheit gebildete Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ bestimmt, welche der Bedingung genügen, daß die Gleichung

$$x^n + \varepsilon_1 x^{n-1} + \varepsilon_2 x^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n e_0 = 0$$

besteht, was stets möglich ist, so ergiebt sich, daß die algebraische Gleichung

$$x^n + \varepsilon_1 x^{n-1} + \varepsilon_2 x^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n = 0$$

im Gebiete der aus den Haupteinheiten 1 und $i = \sqrt{-1}$ gebildeten

gewöhnlichen complexen Größen die Wurzeln η_ϱ, $\eta_\sigma + \zeta_\sigma i$, $\eta_\sigma - \zeta_\sigma i$ besitzt. Es ergiebt sich hieraus, wenn mit ξ eine veränderliche aus einer unbenannten Haupteinheit gebildete Größe bezeichnet wird, die Identität

$$f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \varepsilon_2 \xi^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n =$$
$$= \prod_\varrho (\xi - \eta_\varrho) \prod_\sigma (\xi^2 - 2\eta_\sigma \xi + \eta_\sigma^2 + \zeta_\sigma^2),$$

durch welche die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ als ganze homogene Functionen der Größen η_ϱ, η_σ, ζ_σ bestimmt sind.

Wenn die Coordinaten der betrachteten complexen Größe x bezogen auf die früheren Haupteinheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$ mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bezeichnet werden, so ist klar, daß die neuen Coordinaten η_ϱ, η_σ, ζ_σ der Größe x ganze homogene Functionen ersten Grades der Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind.

Aus dem Umstande, daß die im Vorstehenden mit $f(\xi)$ bezeichnete Function und die von Herrn Weierstrass ebenso bezeichnete mit einander übereinstimmen, ergeben sich folgende Sätze:

1. Die mit $X_1, X_2, \ldots X_n$ bezeichneten ganzen Functionen der Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind in Folge der Bedingungen, welchen die Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ unterworfen sind, durch die Function X_0 theilbar.

2. Jede Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$ im Gebiete der aus 1 und $\sqrt{-1}$ gebildeten gewöhnlichen complexen Größen ist eine ganze homogene Function ersten Grades der Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$.

3. Die Größen

$$f_\varrho(x) = x - \eta_\varrho e_0, \qquad f_\sigma(x) = (x - \eta_\sigma e_0)^2 + \zeta_\sigma^2 e_0$$

sind Theiler der Null und zwar hat im Theilgebiete $\mathfrak{G}_\varrho$ die Componente von $f_\varrho(x)$, im Theilgebiete $\mathfrak{G}_\sigma$ die Componente von $f_\sigma(x)$ den Werth Null. Wenn die Discriminante der Gleichung $f(\xi) = 0$ einen von Null verschiedenen Werth hat, mit anderen Worten, wenn die Größen η_ϱ, $\eta_\sigma + \zeta_\sigma i$, $\eta_\sigma - \zeta_\sigma i$ sämmtlich von einander verschieden sind, so hat keine andere Componente der Größen $f_\varrho(x)$, $f_\sigma(x)$ den Werth Null. Hieraus folgt aber, daß, wenn in dem Producte der r Factoren

$$\prod_\mu f_\mu(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots r)$$

ein beliebiger Factor $f_\nu(x)$ weggelassen wird, das Product der übrigen Factoren unter der angegebenen Voraussetzung eine von Null verschiedene dem Theilgebiete $\mathfrak{G}_\nu$ angehörende Größe ist.

Hiermit ist bewiesen, daß die erklärten Theilgebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_r$ sich nicht ändern, wenn an die Stelle der ihrer Definition zu Grunde liegenden Größe $g = \sum_a \xi'_a e_a$ eine beliebige andere Größe $x = \sum_a \xi_a e_a$ tritt, für welche die gestellten Bedingungen erfüllt sind.

Die zu Anfang dieser Bemerkung aufgeworfene Frage ist hiermit beantwortet.

Zum Schlusse erlaube ich mir einige kleine Ungenauigkeiten zu berichtigen, welche sich beim Abdrucke der Mittheilung des Herrn Weierstrass eingeschlichen haben und welche erst nach Vollendung des Druckes bemerkt worden sind.

Auf S. 402 Z. 8 von oben ist statt $f_n(\xi)$ zu lesen $f_r(\xi)$,
" " " " 14 " unten " " x_1^λ " " x^λ,
" " 408 " 13 " oben " " $(n-\varrho)$ " " $(r-\varrho)$,
" " " " 14 " oben } " " $\varrho+1,\ldots n$ " " $\varrho+1,\ldots r$.
" " " " 12 " unten }

Ueber die elektromagnetische Rotation einer Flüssigkeit.

Von

Eduard Riecke.

I.

Bezeichnet man eine aus verschiedenartigen Leitern gebildete, von einem galvanischen Strome durchlaufene Kette, deren Glieder theils fest liegen, theils eine bestimmte Beweglichkeit besitzen, als einen elektrodynamischen Kreis, so sind mit Bezug auf die Anordnung eines solchen Kreises verschiedene Fälle zu unterscheiden. Der einfachste Fall ist der, bei welchem die Stromfäden stets an dieselbe Reihe ponderabler Theilchen gebunden bleiben; dieß findet statt bei allen Kreisen, deren bewegliche Theile aus Drähten oder biegsamen Fäden zusammengesetzt sind und bei welchen der Uebergang von den festliegenden zu den beweglichen Theilen der Leitung nicht durch Gleitstellen vermittelt wird. Der zweite Fall ist der, in welchem in Folge der Bewegung neue ponderable Elemente als Träger des Stromes zu den schon früher vorhandenen hinzutreten; es ist dieß der Fall bei den meisten derjenigen Anordnungen, bei welchen die beweglichen Stromtheile durch Gleitstellen mit den ruhenden verbunden sind; ferner gehört hierher der Fall einer elastischen Dehnung der vom Strome durchflossenen Leiter. Der dritte Fall ist dadurch ausgezeichnet, daß eine relative Verschiebung der Stromfäden, welche das Innere von körperlichen Leitern erfüllen, gegen die ponderabeln Theilchen der letzteren eintritt. Dieser Fall findet statt, wenn der vom Strome durchflossene Körper elastische Biegungen erleidet, er kann eintreten bei Kreisen, welche mit Gleitstellen behaftet sind und

bei der Bewegung eines von einem galvanischen Strom durchflossenen flüssigen Leiters.

Sind in der Nähe des elektrodynamischen Kreises galvanische Ketten oder Magnete fest aufgestellt, so werden die von denselben ausgeübten Kräfte eine Verschiebung der beweglichen Theile jenes Kreises zur Folge haben. Die hiebei geleistete Arbeit ist bei denjenigen Anordnungen, welche wir dem ersten und zweiten Fall unterordnen können, jederzeit bestimmt durch den negativen Zuwachs, welchen das Potential jener Ströme und Magnete auf den elektrodynamischen Kreis bei der Verschiebung erleidet. Es gilt dieser Satz daher für die Wechselwirkung geschlossener Spiralen, für die von Zöllner beschriebenen Versuche mit Gleitstellen; es bestimmt derselbe die Gestalt der elektrodynamischen Kettenlinie, die Dehnung eines elastischen Leiters unter der Wirkung elektrodynamischer Kräfte.

Dagegen unterliegt die Anwendung des Potentialgesetzes gewissen Schwierigkeiten in dem dritten Fall. In diesem lassen sich leicht solche Anordnungen treffen, daß bei einer Verschiebung des Systemes der ponderabeln Stromträger eine entsprechende Verschiebung oder Verlängerung der Stromfäden nicht eintritt, also auch das elektrodynamische Potential eine merkbare Aenderung nicht erleidet. Eine Ausdehnung des Potentialgesetzes auf derartige Fälle ist nur möglich auf Grund hypothetischer Hülfsvorstellungen über die molekularen Beziehungen zwischen den Theilchen der leitenden Körper und den Theilchen der sie durchströmenden Elektricitäten.

Es ergiebt sich hieraus das besondere Interesse, welches sich an die Untersuchung derjenigen elektrodynamischen Kreise knüpft, welche dem dritten Falle entsprechen. Wie schon erwähnt wurde, gehört hieher die Bewegung einer Flüssigkeit unter der Wirkung elektrodynamischer oder elektromagnetischer Kräfte und es ist daher im Folgenden der Versuch gemacht worden die Theorie einer derartigen Bewegung zu entwickeln und die Resultate derselben mit der Erfahrung zu vergleichen.

II.

Es möge zunächst die Vorrichtung beschrieben werden, mit Hülfe derer die im Folgenden untersuchte Bewegung erzeugt wurde. Auf eine kreisförmige Kupferscheibe von 132^{mm} Durchmesser wurde ein Kupferring von demselben äußeren Durchmesser, einer Breite von 10^{mm} und einer Dicke von 1^{mm} aufgelöthet. Es wurde sodann ein Zinkring abgedreht von $4{,}02^{mm}$ Dicke, einem äußeren Durchmesser von 132^{mm}, einem inneren Durchmesser von $80{,}16^{mm}$. Auf die untere



Fläche dieses Ringes wurde eine dünne Glasplatte aufgekittet und sodann der eben abgeschliffene Ring auf den ebenfalls eben geschliffenen Kupferring aufgeschraubt, so daß eine möglichst innige Berührung der beiden Ringflächen erzielt wurde. Auf diese Weise wurde eine flache Schaale hergestellt, deren Boden durch die Glasplatte, deren Rand durch den Zinkring gebildet wurde; dieselbe wurde mit einer Lösung von Zinkvitriol gefüllt. In ihrer Mitte wurde eine kreisförmige Zinkscheibe von 4,08^{mm} Dicke und 19,48^{mm} Durchmesser eingesetzt; auf die obere Seite dieser Scheibe war eine Glasplatte aufgekittet, welche sich auf den durch den Zinkring gebildeten Rand auflegte. Es wurde so eine ringförmige Flüssigkeitsplatte hergestellt, welche oben und unten von zwei parallelen Glasplatten, nach innen und außen von zwei cylindrischen Zinkflächen abgegrenzt wurde; die Dicke der Platte betrug im Mittel 4,05^{mm}, der innere Halbmesser 9,74^{mm}, der äußere 40,08^{mm}. Die Zinkflächen dienten als Elektroden für die Zu- und Ableitung eines radial in der Flüssigkeitsplatte verlaufenden Stromes. Die auf der kleinen Zinkscheibe aufgekittete Deckplatte war in der Mitte durchbohrt, so daß ein Zuleitungsdraht von Kupfer in die Scheibe eingeschraubt werden konnte. Die Kupferplatte, welche die Grundlage der ganzen Vorrichtung bildete, trug in der Mitte einen vertikal nach unten gehenden Zuleitungsdraht von Kupfer. Die ganze Vorrichtung wurde auf die horizontale Polfläche eines in der Axe durchbohrten Elektromagnets aufgesetzt. Wurde der Elektromagnet erregt, der durch die Zinkvitriolplatte gehende Strom geschlossen, so gerieht die Flüssigkeit in eine rotirende Bewegung, welche mit Hülfe von Schellaktheilchen beobachtet wurde, die in derselben suspendirt waren.

Unter der Voraussetzung, daß die Theilchen der Flüssigkeit und die Schellaktheilchen koncentrische Kreisbahnen um den gemeinsamen Mittelpunkt der Zinkelektroden beschrieben, konnte die Winkelgeschwindigkeit in verschiedenen Entfernungen von jenem Mittelpunkt gemessen werden. Zu diesem Zweck wurde auf der die Flüssigkeit bedeckenden Glasplatte ein System von unter Winkeln von 45° gegen einander geneigten Durchmessern mit dem Diamant gezogen und es wurde dann die Zeit beobachtet, welche ein bestimmtes Schellaktheilchen brauchte, um den halben Umfang seiner Bahn zu durchlaufen. Die Bestimmung der Entfernung des Theilchens von dem Mittelpunkt der Elektrodenkreise d. h. die Bestimmung seines Bahnhalbmessers geschah mit Hülfe eines Glasmaaßstabes, der so auf die Deckplatte aufgelegt wurde, daß die Enden der Theilstriche genau mit einem der Diamantstriche auf der Platte zusammenfielen. Der Radius Vektor der von dem beobachteten Theilchen durchlaufenen

Bahn wurde vor und nach der Bestimmung der Umlaufszeit gemessen und so gleichzeitig eine Prüfung der Annahme gewonnen, der zufolge die ganze Bewegung der Flüssigkeit in koncentrischen Kreisen vor sich gehen sollte.

Im Folgenden sind die Resultate dreier verschiedener Beobachtungsreihen mitgetheilt; die beiden ersten Columnen enthalten die Radien Vektoren des betreffenden Schellaktheilchens vor und nach der Bestimmung der halben Umlaufszeit, welche in der dritten Columne angegeben ist; die einzelnen Beobachtungen sind in der Reihenfolge angeführt, in welcher sie der Zeit nach gemacht worden sind.

I. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
11.3	11.4	8.6	19.9	19.8	14.1	20.8	20.8	15.9
11.8	11.8	8.4	22.0	22.0	18.2	27.6	27 5	27.5
13.3	13.3	8.0	26.7	26.7	25.0	10.8	10.8	10.3
16.2	16.0	10.6	33.7	33.7	35.0	11.9	11.8	8.0
16.8	17.0	11.1	33.8	33.8	35.3	13.8	13.8	7.4
17.8	17.7	12.9	33.8	33.8	35.5	14.1	14.3	7.8
22.7	22.8	20.5	11.9	11.9	7.8	15.5	15.6	8.9
20.0	20.7	15.9	13.3	13.4	7.8	21.3	21.5	16.6
25.7	25.8	24.6	15.5	15.6	8.8	28.3	28.6	28.0
27.7	27.1	28.3	20.9	20.9	16.1	33.9	33.9	35.9
28.8	28.3	29.8	23.6	23.8	21.7	34.9	34.4	50.3
30.3	29.4	32.7	26.3	26.8	25 6	12.5	12.3	7.7
33.0	33.1	34.0	27.3	27.3	27.9	12.6	12.6	7.0
37.9	39.3	81.6	34.0	33.9	36.5	15.8	15.8	9.0
12.0	12.0	8.0	33.9	33.9	36.4	15.8	15.7	9.2
11.9	11.9	7.9	11.9	11.9	8.1	21.0	21.0	16.6
12.6	12 7	7.7	13.1	13.1	7.7	21.0	20.9	16.4
15.3	15.3	9.0	15.2	15.2	8.8	32.7	32.8	32.8
17.8	17.9	12.9	19.1	19.7	15.2	33.9	33.9	36.1

II. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
13.8	13.8	9.2	17.6	17.6	14.3	35.6	35.9	49.1
17.3	17.7	11.3	17.9	18.2	14.3	14.6	14.8	10.2
14.5	14.6	9.6	18.9	19.0	15.5	15.7	15.8	11.5
12.7	12.7	8.1	28.3	28.7	28.6	18.9	18.9	13.4
11.7	11.8	8.7	32.8	32.9	36.4	18.8	18.9	13.1
17.5	17.7	12.8	15.0	15 0	10.9	20.9	20.9	15.3
22.3	21.9	17.1	18.2	18.4	15.2	22.0	22.1	17.1
31.3	31.9	35.1	17.8	18.1	14.6	23.1	23.3	19.3
32.8	32.9	37.2	26.2	26.4	25.5	23.4	23 4	19.9
33.6	33.6	37.5	29.6	29.6	29.6	23.6	23.6	20.1
16.3	16.7	12.1	33.9	34.4	38.8	10.8	10.8	9.6
18.3	18.5	14.7	35.8	35.8	48.0	12.8	12.8	8.1
22.4	22.8	19.2	11.0	11.0	8.4	19.0	19.3	13.3
24.9	25.7	22.9	10.8	10.8	9.0	19.3	19.5	13.4
29.3	29.5	31.1	11.6	11.6	8.6	22.6	22.6	17.7
30.7	30.1	35.5	17.6	17.7	14.0	22.3	22.5	17.8
36.1	36.8	51.2	18.8	18.8	13.0	28.9	29.0	27.8
16.2	16.4	12.0	19.3	19.3	13.8	29.9	30.6	36.9
15.1	15.4	10.7	25.4	25.7	26.7	33.6	33.4	40.6
			30.8	31.3	32.0			



III. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
15.0	15.4	10.2	12.6	12.6	7.7	34.8	35.0	37.1
10.9	11.1	9.3	12.8	12.8	7.9	10.6	10.7	11.1
11.9	12.0	7.8	14.9	14.9	9.8	12.6	12.6	7.8
13.4	13.7	8.0	14.8	14.9	9.5	12.7	12.7	8.0
15.9	16.4	10.4	18.8	18.9	13.8	14.8	14.8	9.7
16.9	17.4	12.0	22.9	23.5	18.7	16.7	16.6	11.0
18.0	18.6	13.6	29.7	30.0	29.4	35.9	35.9	38.7
18.9	19.0	14.0	35.9	36.7	40.7	12.8	12.8	7.9
19.3	19.3	14.3	37.9	38.6	58.8	13.5	13.6	8.6
20.1	20.2	16.6	11.7	11.8	7.8	13.4	13.5	9.0
25.7	25.9	21.9	15.1	15.1	10.3	14.7	14.5	9.1
27.8	28.0	25.4	15.6	15.6	10.2	16.8	17.0	11.1
10.1	10.5	11.3	17.2	17.5	12.1	24.8	24.8	21.9
10.6	10.4	9.3	25.3	25.8	22.1	24.9	24.9	22.5
11.7	11.8	7.8	27.8	28.3	26 5	27.6	28.2	25.9
12.7	12.7	7.7	30.8	31.1	30.5	33.1	33.8	32.8
14.5	14.6	9.4	35.4	35.8	38.1	12.8	12.8	7.9
16.5	16.7	10.2	12.7	12.8	7.9	12.8	12.9	8.0
17.9	18.2	12.1	14.8	14.8	9.7	20.6	20.6	14.9
21.8	22.0	17.1	15.2	15.6	9.7	21.2	21.5	16.0
22.2	22.9	18.0	16.6	16.7	10.9	21.2	21.3	16.9
23.8	24.4	19.5	16.6	16.6	11.1	27.6	27.7	26.5
28.9	29.4	27.5	17 7	17.8	13.0	31.0	31.2	32.9
32.8	33.6	32.6	22.2	22.4	18.3	38.0	38.3	56.4
			35.3	34.9	37.4			

III.

Es möge nun die Theorie der im Vorhergehenden beschriebenen Bewegung entwickelt werden. Wir setzen hiebei voraus, daß das magnetische Feld, in welchem die Bewegungen der Flüssigkeit sich vollziehen, ein homogenes ist und daß die Kraftlinien desselben senkrecht gegen die beiden die Flüssigkeit begrenzenden Ebenen gerichtet sind. Wir nehmen ferner an, daß die Bewegung des galvanischen Stromes von dem inneren nach dem äußeren Elektrodenring in radialer Richtung verlaufe, sowie, daß die Dichtigkeit der Strömung in der Richtung der Plattendicke keine Veränderung erleide. Bei der getroffenen Anordnung lag die Flüssigkeitsplatte horizontal, die Bewegung der elektrischen Theilchen und der mit denselben beladenen Jonen des Zinkvitriol war demnach als horizontal und die Geschwindigkeit in allen Punkten einer und derselben Vertikallinie als gleich zu betrachten.

Die Mittelebene der Flüssigkeitsplatte werde zur xy Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Axe der koncentrischen Elektrodenringe zur z Axe desselben genommen.

Die Intensität des magnetischen Feldes werde bezeichnet durch

J. Es sei ferner e diejenige Menge strömender positiver beziehungsweise negativer Elektricität, welche sich in der Volumeinheit befindet; x_p', y_p' seien die Geschwindigkeitskomponenten der positiven, x_n', y_n' die der negativen Elektricität. Unter diesen Umständen sind die Componenten der Kräfte, welche auf die strömende positive und negative Elektricität eines Volumelementes $d\tau = dx\,dy\,dz$ ausgeübt werden

$$X_p\,d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e y_p'\,dx\,dy\,dz$$

$$X_n\,d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e y_n'\,dx\,dy\,dz$$

$$Y_p\,d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e x_p'\,dx\,dy\,dz$$

$$Y_n\,d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e x_n'\,dx\,dy\,dz.$$

Somit sind die Componenten der auf das ganze Volumelement ausgeübten ponderomotorischen Wirkung

$$X\,d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e (y_p' - y_n')\,dx\,dy\,dz$$

$$Y\,d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e (x_p' - x_n')\,dx\,dy\,dz.$$

Hier sind die Produkte $e(y_p' - y_n')$ und $e(x_p' - x_n')$ nichts anderes als die Strömungskomponenten; bezeichnen wir diese durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, so ist:

$$X\,d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J \mathfrak{v}\,dx\,dy\,dz$$

$$Y\,d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J \mathfrak{u}\,dx\,dy\,dz.$$

Ist λ das galvanische Leitungsvermögen der Flüssigkeit, so können wir

$$\mathfrak{u} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{v} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

setzen, wo unter φ das elektrostatische Potential der freien Elektricität zu verstehen ist. In unserem Falle, in welchem die Strömung in dem ringförmigen Zwischenraum zwischen zwei koncentrischen cylindrischen Elektroden vor sich geht, ergiebt sich:

$$\varphi = -\frac{i}{2\pi\lambda d}\log r.$$

Hier bezeichnet i die Stromstärke, d die Dicke der Flüssigkeitsplatte und r den Abstand des betrachteten Punktes von der Axe des Ringes, der z Axe des Coordinatensystems; es ist also:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Hiernach ergiebt sich:

$$X = \frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{Ji}{2\pi d} \frac{\partial \log r}{\partial y}$$

$$Y = -\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{Ji}{2\pi d} \frac{\partial \log r}{\partial x}.$$

Führen wir diese Ausdrücke ein in die Differentialgleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit mit innerer Reibung, so ergiebt sich, wenn unter u und v die Geschwindigkeitskomponenten in dem Punkte x, y, z, unter p der Druck, unter μ die Dichtigkeit, unter k die Reibungskonstante verstanden wird:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k}{\mu}\Delta u + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{c}\frac{Ji}{2\pi d\mu}\frac{\partial \log r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{k}{\mu}\Delta v + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\sqrt{2}}{c}\frac{Ji}{2\pi d\mu}\frac{\partial \log r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Den früheren Annahmen entsprechend ist die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung der z Axe gleich Null gesetzt. Um die Gleichungen zu vereinfachen beschränken wir uns auf den Fall der stationären Bewegung, wir nehmen ferner an, daß die Geschwindigkeiten u und v klein sind, so daß wir die mit denselben multiplicirten Glieder vernachlässigen können und wir setzen endlich den Druck p als konstant voraus. Dann ergeben sich, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{Ji}{2\pi dk} = A.$$

Die Gleichungen

$$\Delta u = -A\frac{\partial \log r}{\partial y}, \qquad \Delta v = A\frac{\partial \log r}{\partial x},$$

wo $r^2 = x^2 + y^2$.

Da durch die Beobachtungen gezeigt ist, daß die Bewegung der

Flüssigkeitstheilchen in einer Rotation um den Mittelpunkt des Coordinatensystems besteht, so können wir für u und v den Ansatz machen:

$$u = -\frac{\partial W}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial W}{\partial x},$$

wo W eine Funktion, die nur abhängig ist von r und z. Es ist dann die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit in verschiedenem Abstande r von der z Axe gegeben durch

$$\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Zur Ermittelung der Funktion W ergiebt sich die Differentialgleichung

$$\Delta W = A \log r$$

oder

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = A \log r.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist im Allgemeinen noch eine willkürliche Constante hinzuzufügen. Wir setzen dieselbe gleich Null, da sie auf den Verlauf unserer Rechnung ohne Einfluß ist.

Wir setzen:

$$W = U_1 \cos \frac{z\pi}{d} + U_3 \cos \frac{3z\pi}{d} + \cdots$$

dann wird die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr} \cos \frac{z\pi}{d} + \frac{1}{r} \frac{dU_3}{dr} \cos \frac{3z\pi}{d} + \cdots$$

oder wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\omega_1 = \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr}, \qquad \omega_3 = \frac{1}{r} \frac{dU_3}{dr}, \ \cdots$$

$$\omega = \omega_1 \cos \frac{z\pi}{d} + \omega_3 \cos \frac{3z\pi}{d} + \cdots$$

Es wird somit $\omega = 0$ für $z = \pm d/2$, d. h. für alle Punkte der beiden die Flüssigkeit begrenzenden der xy Ebene parallelen Glasflächen. Setzen wir den für W gemachten Ansatz ein in der Differentialgleichung, welcher W genügen muß, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{d^2 U_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU_1}{dr} - \frac{\pi^2}{d^2} U_1\right) \cos \frac{z\pi}{d}$$

$$+ \left(\frac{d^2 U_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU_3}{dr} - \frac{9\pi^2}{d^2} U_3\right) \cos \frac{3z\pi}{d} + \cdots = A \log r.$$

Mit Hülfe der Relation

$$\frac{\pi}{4} = \cos\frac{z\pi}{d} - \frac{1}{3}\cos\frac{3z\pi}{d} + \cdots$$

kann auch die rechte Seite der Gleichung nach den Cosinus der ungeraden Vielfachen von $z\pi/d$ entwickelt werden und wir erhalten dann zur Bestimmung von U_n die Gleichung:

$$\frac{d^2 U_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_n}{dr} - \frac{n^2\pi^2}{d^2} U_n = \varepsilon\frac{4A}{n\pi}\log r$$

wo

$$\varepsilon = +1 \quad \text{für} \quad n = 1, 5, 9 \ldots$$
$$\varepsilon = -1 \quad \text{für} \quad n = 3, 7, 11 \ldots$$

Durch Differentiation ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung eine andere zur Bestimmung von

$$\omega_n = \frac{1}{r}\frac{dU_n}{dr}$$

$$\frac{d^2\omega_n}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\omega_n}{dr} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}\omega_n = \varepsilon\frac{4A}{n\pi}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist:

$$\omega_n = -\varepsilon\frac{4A}{n^3\pi^3}\frac{d^2}{r^2}.$$

Die allgemeine Lösung ergiebt sich, wenn man zu diesem Ausdrucke noch das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2 v_n}{dr^2} + \frac{3}{r}\cdot\frac{dv_n}{dr} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}v_n = 0$$

hinzufügt. Diese Gleichung kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d^2(v_n r\sqrt{r})}{dr^2} - \left(\frac{n^2\pi^2}{d^2} + \frac{3}{4r^2}\right)v_n r\sqrt{r} = 0$$

oder für größere Werthe von r:

$$\frac{d^2(v_n r\sqrt{r})}{dr^2} = \frac{n^2\pi^2}{d^2}v_n r\sqrt{r}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$v_n = \frac{A_n e^{n\pi\frac{r}{d}} + B_n e^{-n\pi\frac{r}{d}}}{r\sqrt{r}}$$

und somit

$$\omega_n = -\varepsilon\frac{4A}{n^3\pi^3}\cdot\frac{d^2}{r^2} + \frac{A_n e^{n\pi\frac{r}{d}} + B_n e^{-n\pi\frac{r}{d}}}{r\sqrt{r}}.$$

Die Integrationskonstanten A_n und B_n bestimmen sich durch die Annahme, daß die Winkelgeschwindigkeit an den beiden Elektrodenflächen gleich Null werde. Bezeichnen wir durch a und b die Radien der entsprechenden Kreise, so ergiebt sich:

$$\omega_n = -\varepsilon\frac{4A}{\pi^3}\cdot\frac{1}{n^3}\frac{d^2}{r^2}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} 1-\sqrt{\dfrac{r}{a}}\cdot\dfrac{e^{n\pi\frac{b-r}{d}}-e^{-n\pi\frac{b-r}{d}}}{e^{n\pi\frac{b-a}{d}}-e^{-n\pi\frac{b-a}{d}}} \\ -\sqrt{\dfrac{r}{b}}\cdot\dfrac{e^{n\pi\frac{r-a}{d}}-e^{-n\pi\frac{r-a}{d}}}{e^{n\pi\frac{b-a}{d}}-e^{-n\pi\frac{b-a}{d}}} \end{array}\right\}.$$

Wofür näherungsweise gesetzt werden kann:

$$\omega_n = -\varepsilon\frac{4A}{\pi^3}\cdot\frac{1}{n^3}\cdot\frac{d^2}{r^2}\left\{1-\sqrt{\frac{r}{a}}e^{-n\pi\frac{r-a}{d}}-\sqrt{\frac{r}{b}}e^{-n\pi\frac{b-r}{d}}\right\}.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen im Abstande r von der Rotationsaxe erhalten wir somit die Reihe:

$$\frac{\pi^3}{4A}\omega = -\frac{d^2}{r^2}\left\{1-\sqrt{\frac{r}{a}}e^{-\pi\frac{r-a}{d}}-\sqrt{\frac{r}{b}}e^{-\pi\frac{b-r}{d}}\right\}\cos\frac{s\pi}{d}$$

$$+\frac{1}{27}\cdot\frac{d^2}{r^2}\left\{1-\sqrt{\frac{r}{a}}e^{-3\pi\frac{r-a}{d}}-\sqrt{\frac{r}{b}}e^{-3\pi\frac{b-r}{d}}\right\}\cos\frac{3s\pi}{d}$$

$$-+\cdots$$

IV.

Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen.

Aus der im Vorhergehenden gegebenen Formel kann die mit dem konstanten Faktor $\pi^3/4A$ multiplicirte Winkelgeschwindigkeit ω berechnet werden, welche in einer bestimmten Entfernung r von der Axe des Flüssigkeitsringes und in einer bestimmten Tiefe s der Flüssigkeit vorhanden ist. Andererseits geben die früher mitgetheilten Beobach-



tungen die Winkelgeschwindigkeit der in der Flüssigkeit suspendirten Theilchen in verschiedenen Entfernungen von der Rotationsaxe; die Tiefe aber, in welcher sich die beobachteten Theilchen in der Flüssigkeit befinden, war ohne Zweifel für die einzelnen Theilchen verschieden und war bei den im Vorhergehenden beschriebenen Versuchen für keines derselben bestimmt worden. Um trotzdem eine Vergleichung der theoretischen Formel mit den Beobachtungen zu ermöglichen wurde die Annahme gemacht, daß alle beobachteten Theilchen in der Mitte der Flüssigkeitsschicht sich befunden haben, daß also für alle $z = 0$ gesetzt werden könne. Dieser Annahme war bei der Ausführung der Messungen dadurch einigermaßen entsprochen worden, daß möglichst nur die mit den größten Rotationsgeschwindigkeiten behafteten Schellaktheilchen beobachtet wurden. Unter dieser Annahme wurde der Werth von $\omega\ \pi^2/4A$ berechnet mit Benutzung der zwei ersten Glieder der Reihenentwicklung für alle ganzen Werthe von $r = 10$ bis $r = 40$ und für $r = 11{,}5$ und $r = 12{,}5$. Hiebei war nach den früher mitgetheilten Messungen zu setzen:

$$a = 40{,}08;\quad b = 9{,}74;\quad d = 4{,}05.$$

Die den beobachteten Entfernungen der suspendirten Theilchen entsprechenden Werthe von $\omega\ \pi^2/4A$ wurden aus den berechneten Werthen dieser Funktion mittelst graphischer Interpolation bestimmt. Durch Division der beobachteten Winkelgeschwindigkeiten mit jenen Werthen von $\omega\ \pi^2/4A$ ergab sich der Werth von $4A/\pi^2$. Aus sämmtlichen für die einzelnen Entfernungen berechneten Werthen dieses Faktors wurde das Mittel genommen und durch Multiplikation der theoretischen Werthe von $\omega\ \pi^2/4A$ mit diesem Mittelwerth sind die berechneten Werthe von ω erhalten.

In den folgenden Tabellen sind die verschiedenen in Betracht kommenden Größen für die früher mitgetheilten Beobachtungsreihen zusammengestellt. Hiebei sind die einzelnen Beobachtungsreihen geordnet nach den Werthen von r, und sind nahe beisammen liegende Werthe von r und ω zu einem Mittelwerth vereinigt.

I. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega\frac{\pi^2}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^2}$	ω be-rechn.	r	ω beob.	$\omega\frac{\pi^2}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^2}$	ω be-rechn.
10.8	0.305	0.0675	4.52	0.358	20.8	0.197	0.0367	5.36	0.194
11.3	0.366	0.0833	4.39	0.441	20.9	0.193	0.0362	5.33	0.192
11.8	0.375	0.0872	4.30	0.462	21.4	0.189	0.0345	5.48	0.183
11.9	0.395	0.0875	4.52	0.464	22.0	0.173	0.0326	5.31	0.173
12.0	0.393	0.0877	4.48	0.465	22.7	0.153	0.0306	5.00	0.162
12.4	0.409	0.0872	4.69	0.462	23.7	0.145	0.0282	5.14	0.149
12.6	0.429	0.0865	4.95	0.458	25.7	0.128	0.0240	5.33	0.127
13.1	0.409	0.0839	4.87	0.445	26.5	0.123	0.0226	5.44	0.120
13.3	0.398	0.0819	4.85	0.434	26.7	0.126	0.0223	5.65	0.118
13.8	0.425	0.0784	5.42	0.415	27.3	0.112	0.0212	5.28	0.112
14.2	0.403	0.0752	5.36	0.398	27.5	0.114	0.0210	5.43	0.111
15.2	0.353	0.0665	5.29	0.352	28.4	0.112	0.0197	5.68	0.104
15.5	0.355	0.0645	5.50	0.342	28.5	0.106	0.0196	5.41	0.104
15.8	0.345	0.0630	5.48	0.334	29.8	0.096	0.0179	5.36	0.094
16.1	0.296	0.0610	4.85	0.323	33.0	0.091	0.0141	6.50	0.075
16.9	0.283	0.0550	5.15	0.291	33.7	0.089	0.0138	6.43	0.073
17.8	0.244	0.0498	4.90	0.264	33.9	0.086	0.0136	6.35	0.072
19.4	0.206	0.0419	4.91	0.222	34.6	0.063	0.0130	4.85	0.069
19.8	0.223	0.0401	5.56	0.212	38.6	0.038	0.0068	5.59	0.036
20.3	0.197	0.0382	5.16	0.202					

Für $4A/\pi^2$ ergiebt sich im Mittel aus den Beobachtungen

von $r = 10$ bis $r = 15$: $4A/\pi^2 = 4.76$
— — — 15 — — — 20 — — 5.20
— — — 20 — — — 25 — — 5.25
— — — 25 — — — 30 — — 5.45
— — — 30 — — — 40 — — 5.81

Das Hauptmittel ist:

$$\frac{4A}{\pi^2} = 5.30$$

der Werth mit Hülfe dessen die berechneten Werthe von ω erhalten sind.

II. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω berechn.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω berechn.
10.8	0.338	0.0660	5.13,	0.343	20.9	0.204	0.0363	5.62	0.189
11.0	0.375	0.0753	4.98	0.399	22.1	0.184	0.0322	5.55	0.167
11.7	0.364	0.0865	4.20	0.458	22.4	0.177	0.0315	5.62	0.164
12.7	0.389	0.0862	4.51	0.448	22.6	0.170	0.0310	5.50	0.161
12.8	0.389	0.0858	4.53	0.446	23.4	0.159	0.0289	5.48	0.150
13.8	0.342	0.0785	4.36	0.408	25.3	0.138	0.0248	5.56	0.129
14.5	0.328	0.0723	4.55	0.376	25.5	0.128	0.0243	5.27	0.126
14.7	0.308	0.0711	4.33	0.370	26.3	0.123	0.0229	5.37	0.119
15.0	0.289	0.0686	4.21	0.357	28.5	0.110	0.0197	5.58	0.102
15.2	0.294	0.0668	4.40	0.347	29.5	0.103	0.0182	5.68	0.094
16.3	0.262	0.0592	4.42	0.308	30.3	0.086	0.0172	5.40	0.089
16.5	0.260	0.0580	4.48	0.301	31.0	0.098	0.0163	6.01	0.084
17.6	0.230	0.0509	4.51	0.265	31.6	0.090	0.0159	5.65	0.083
18.0	0.217	0.0487	4.45	0.253	32.8	0.085	0.0145	5.90	0.075
18.3	0.206	0.0471	4.37	0.245	33.5	0.080	0.0139	5.77	0.072
18.4	0.213	0.0465	4.58	0.242	34.1	0.081	0.0134	6.05	0.070
18.9	0.231	0.0441	5.25	0.229	35.7	0.064	0.0119	5.37	0.062
19.3	0.228	0.0424	5.38	0.220	36.4	0.062	0.0111	5.63	0.058
19.4	0.235	0.0419	5.61	0.218					

Für $4A/\pi^3$ ergiebt sich im Mittel aus den Beobachtungen

von $r = 10$ bis $r = 15$: $4A/\pi^3 = 4.57$
— — — 15 — — — 20 — — 4.70
— — — 20 — — — 25 — — 5.55
— — — 25 — — — 30 — — 5.49
— — — 30 — — — 40 — — 5.68

Im Mittel ist
$$\frac{4A}{\pi^3} = 5.20$$

III. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω berechn.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω berechn.
10.3	0.278	0.0410	6.78	0.227	19.3	0.219	0.0422	5.19	0.234
10.5	0.338	0.0511	6.62	0.283	20.6	0.210	0.0375	5.60	0.208
10.6	0.283	0.0585	4.84	0.324	21.2	0.190	0.0352	5.39	0.195
11.0	0.338	0.0753	4.49	0.417	21.9	0.184	0.0328	5.61	0.182
11.8	0.404	0.0873	4.62	0.483	22.4	0.173	0.0314	5.52	0.174
12.7	0.400	0.0861	4.65	0.477	23.2	0.168	0.0294	5.71	0.164
13.5	0.379	0.0802	4.73	0.444	24.1	0.161	0.0272	5.92	0.151
14.5	0.342	0.0727	4.70	0.403	24.8	0.142	0.0257	5.52	0.142
14.8	0.330	0.0700	4.71	0.388	25.5	0.142	0.0243	5.84	0.134
15.1	0.305	0.c678	4.50	0.375	25.8	0.144	0.0239	6.03	0.131
15.3	0.316	0.0662	4.77	0.366	27.6	0.118	0.0208	5.67	0.122
15.6	0.308	0.0644	4.78	0.357	28.0	0.119	0.0202	5.91	0.112
16.1	0.302	0.0601	5.03	0.333	29.2	0.114	0.0187	6.10	0.103
16.6	0.291	0.0571	5.12	0.316	29.8	0.107	0.0179	6.01	0.099
17.0	0.272	0.0542	5.02	0.300	31.0	0.099	0.0164	6.01	0.091
17.3	0.260	0.0525	4.95	0.291	33.3	0.095	0.0141	6.77	0.078
17.7	0.242	0.0500	4.84	0.277	35.0	0.084	0.0126	6.67	c.070
18.0	0.260	0.0485	5.36	0.268	35.7	0.082	0.0119	6.88	0.066
18.3	0.231	0.0470	4.91	0.260	36.3	0.077	0.0112	6.87	0.062
18.9	0.226	0.0442	5.10	0.245	38.2	0.054	0.0079	6.73	0.044

Für $4A/\pi^3$ ergiebt sich im Mittel aus den Beobachtungen

von r = 10 bis r = 15 : $4A/\pi^3$ = 4.53
— — — 15 — — — 20 — — 4.96
— — — 20 — — — 25 — — 5.61
— — — 25 — — — 30 — — 5.93
— — — 30 — — — 40 — — 6.65

Hierbei sind die beiden ersten Werthe für r = 10.3 und r = 10.5 nicht mit berücksichtigt.

Das Hauptmittel ist:

$$\frac{4A}{\pi^3} = 5.54.$$

Die berechneten Werthe der Winkelgeschwindigkeiten sind auf der beiliegenden Tafel durch die Curven I, II und III dargestellt, während die den beobachteten Werthen entsprechenden Punkte durch gerade Linien mit einander verbunden sind. Die Abweichung der aus den Beobachtungen sich ergebenden gebrochenen Linien von den der theoretischen Formel entsprechenden Curven dürfte vorzugsweise durch die folgenden Umstände bedingt sein.

1. Die Schellaktheilchen, deren Umlaufszeiten beobachtet worden sind, gehören nicht der Mittelebene der Flüssigkeitsplatte an, für welche die theoretischen Werthe berechnet sind, sondern befinden sich in verschiedenen Entfernungen von dieser.

2. Bei der Entwicklung der Theorie wurde die Voraussetzung gemacht, daß in den allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen die Glieder, welche die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen und die ersten Differentialquotienten derselben nach den Coordinaten enthalten, zu vernachlässigen sind. Es ist wahrscheinlich, daß dieß für die dem inneren Elektrodenrand benachbarten Theile der Flüssigkeit nicht zulässig ist.

3. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen werden überdieß integrirt nur für große Werthe des Radius Vektors r. Auch hierdurch kann eine Abweichung des theoretischen Werthes der Geschwindigkeit von dem beobachteten bedingt sein.

Der erste Umstand macht sich ohne Zweifel geltend bei der zweiten Beobachtungsreihe. Man sieht, daß die Linie, welche die beobachteten Werthe der Winkelgeschwindigkeit verbindet bei r = 18,3 eine plötzliche Verschiebung erleidet, entsprechend einem Uebergang zu verhältnißmäßig größeren Geschwindigkeiten der Theilchen. Es würde dieß darauf hinweisen, daß die von dem inneren Elektrodenring bis zu jenem Radius Vektor beobachteten Theilchen der Mittelebene der Flüssigkeitsscheibe ferner liegen, als die in dem äußeren

Theil des Flüssigkeitsrings beobachteten. Durch denselben Umstand dürfte auch die dritte Beobachtungsreihe entstellt sein.

Der Einfluß des zweiten und dritten Punktes giebt sich deutlich bei der ersten Beobachtungsreihe zu erkennen dadurch, daß von $r = 11$ bis $r = 13{,}3$ die beobachteten Geschwindigkeiten erheblich hinter den berechneten zurückbleiben. Wenn hiebei der zweite Punkt derjenige ist, welcher den größten Einfluß ausübt, so muß der Anschluß der beobachteten Winkelgeschwindigkeiten an die berechneten ein um so besserer sein, je kleiner die absoluten Werthe dieser Geschwindigkeiten sind. Dieß wird bestätigt durch eine vierte Beobachtungsreihe, bei der die Winkelgeschwindigkeiten nur $^2/_3$ der bisherigen betrugen und deren Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

IV. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω berechn.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω berechn.
12.3	0.283	0.0876	3.23	0.312	19.5	0.139	0.0414	3.36	0.147
12.5	0.286	0.0869	3.29	0.310	20 0	0.154	0.0393	3.92	0.140
12.9	0.281	0.0850	3.31	0.303	20.8	0.140	0.0368	3.80	0.131
13.0	0 281	0.0840	3.34	0.299	21.5	0.110	0.0340	3.24	0.121
13.7	0.255	0.0789	3.23	0.281	23.7	0.100	0.0281	3.56	0.100
13.8	0.260	0.0784	3.32	0.279	24.9	0.101	0.0256	3.94	0.091
15 6	0.237	0.0645	3.67	0.230	25.5	0.080	0.0244	3.28	0.087
15.7	0.233	0.0635	3.67	0.226	26.5	0.080	0.0227	3.52	0.081
15.8	0.224	0.0629	3.56	0.224	31.3	0.063	0.0160	3.94	0.056
16.8	0.222	0.0556	3.99	0.198	31.7	0.056	0.0156	3.59	0.055
17.1	0 209	0.0539	3.87	0.192	38.2	0.031	0.0080	3.87	0.029
18.8	0.145	0.0448	3.24	0.159					

Für $4A/\pi^3$ ergiebt sich im Mittel aus den Beobachtungen

von $r = 10$ bis $r = 15$: $4A/\pi^3 = 3.29$
— — — 15 — — — 20 — — 3.62
— — — 20 — — — 25 — — 3.69
— — — 25 — — — 30 — — 3.40
— — — 30 — — — 40 — — 3.80

Das Hauptmittel ist $4A/\pi^3 = 3{,}56$.

Die für diesen letzteren Werth sich ergebende Geschwindigkeitskurve ist in der beigelegten Tafel gleichfalls mit den beobachteten Werthen der Winkelgeschwindigkeit zusammengestellt.

Ueber die Flexion des präsentischen Particips und des Comparativs im Gothischen.

Von

Leo Meyer.

In der Sitzung vom 2. August 1862 hatte ich die Ehre der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften eine Abhandlung über die Flexion der deutschen Adjectiva vorzulegen, über die in den Nachrichten (1862, Seite 382) kurzer Bericht erstattet worden ist, die dann aber ganz selbstständig im Druck erschien unter dem Titel »Ueber die Flexion der Adjectiva im Deutschen. Eine sprachwissenschaftliche Abhandlung von Leo Meyer (Berlin 1863)« und so auch wieder in den Göttingischen gelehrten Anzeigen (1863, 9. Stück, 4. März, S. 321—329) besprochen worden ist.

Das deutsche Adjectiv bewegt sich je nach verschiedenen Beziehungen im Satz in drei ganz verschiedenen Formen: in der kürzesten oder früher sogenannten flexionslosen, die im Grunde mit substantivischen Flexionsformen genau übereinstimmt und vorwiegend prädicativ gebraucht wird (*der Wind ist kalt*);

in der pronominellen, die ihre Flexion nicht einfach von den Fürwörtern herübernahm, wie viele wollen, sondern im Grunde ein selbstständig flectirtes Pronomen, das im Altindischen als Relativ lebendige *ja-*, in sich enthält und vorwiegend attributiv gebraucht wird (*kalter Wind*), und

in der Flexion von Grundformen auf *n*, die mit der Flexion der ebenso ausgehenden substantivischen Grundformen übereinstimmt und vorwiegend neben dem Artikel gebraucht wird (*der kalte Wind*).

Jakob Grimm hat bekanntlich die letztgenannte Flexionsform die schwache Declination genannt, die pronominelle aber die starke und in Bezug auf die kürzeste mit Unrecht von weggeworfener starker Flexion gesprochen.

Gegen einzelne meiner Ausführungen sind hie und da Einwendungen erhoben, auf die in der Zeitschrift für deutsche Philologie von Höpfner und Zacher (Band 9, Halle 1878, S. 1—16) erwiedert worden ist, von niemandem aber ist seitdem die große Frage der so wunderbar reichen Entwicklung der deutschen Adjectivflexion in irgend nennenswerther Weise gefördert.

Es mag mir gestattet sein der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften heute eine kleine Untersuchung vorzulegen, die in engstem Zusammenhang mit der Frage der deutschen Adjectivflexion

steht, sie in gewisser Weise ergänzt. Sie betrifft die Flexion des präsentischen Particips und des Comparativs im Gothischen.

Während beispielsweise im Neuhochdeutschen das präsentische Particip und der Comparativ in Uebereinstimmung mit dem Adjectiv in drei verschiedenen Flexionsformen auftreten können (*der Mann ist leidend; ein leidender Mann; der leidende Mann; — der Wind ist kälter; kälterer Wind; der kältere Wind*), beschränkt sich im Gothischen die Flexion des präsentischen Particips, abgesehen von seinem substantivischen Gebrauch, und die des Comparativs so gut wie ganz auf die sogenannte schwache Form.

Es ist das eine auf den ersten Blick sehr wunderbare Erscheinung, deren tieferes Verständniß aber doch scheint gewonnen werden zu können.

Der substantivische Werth des präsentischen Particips im Gothischen ist nicht etwa durch irgend eine Neubildung gekennzeichnet, sondern mit seiner alten Grundform auf Nasal und Dental, wie sich dieselbe aus dem Vergleich mit den verwandten Sprachen, insbesondere dem Griechischen, Lateinischen und Altindischen als schon indogermanisch ergiebt, hat das präsentische Particip im Gothischen ohne Weiteres substantivischen Werth angenommen. So erweisen es die Vocative *talzjand* ‚ἐπιστάτα, Lehrer' Luk. 5, 5; 8, 24; 45; 9, 33; 49; 17, 13; *frijônd* ‚φίλε, Freund' Luk. 14, 10; *franjinônd* ‚δέσποτα, Herr' Luk. 2, 29; — die Accusative *giband* ‚δότην, Geber' Kor. 2, 9, 7; *fiand* ‚ἐχθρόν, Feind' Matth. 5, 43; dafür *fijand* Röm. 12, 20 und Thess. 2, 3, 15; *daupjand* ‚βαπτιστήν, Täufer' Mk. 8, 28; Luk. 9, 19; *nasjand* ‚σωτῆρα, Heiland' Phil. 4, 20; Johanneserkl. 4, a; — der Dativ *nasjand* ‚σωτῆρι, dem Heiland' Luk. 1, 47; Tit. 1, 4; — die Genetive *fijandis* ‚ἐχθροῦ, des Feindes' Luk. 10, 19; *nasjandis* ‚σωτῆρος, des Heilandes' Tim. 1, 1, 1; 1, 2, 3; 2, 1, 10; Tit. 1, 3; Johanneserkl. 1, c; — die Pluralnominative *bisitands* ‚περίοικοι, die Herumwohnenden' Luk. 1, 58; *fijands* ‚ἐχθροί, die Feinde' Matth. 10, 36; Luk. 19, 43; dafür *fiands* Neh. 6, 16; *frijônds* ‚φίλοι, Freunde' Joh. 15, 14; — die Pluralaccusative *bisitands* ‚περίχωρον, die Herumwohnenden' Mk. 1, 28; Luk. 7, 17; *fijands* ‚ἐχθρούς, Feinde' Matth. 5, 44; Mk. 12, 36; Luk. 6, 35; 19, 27; 20, 43; Kor. 1, 15, 25; Phil. 3, 18; Kol. 1, 21; *frijônds* ‚φίλους, Freunde' Matth. 5, 47; Luk. 7, 6; 14, 12; 15, 6; 16, 9; Joh. 15, 13; 15; — die Pluralgenetive *bisitandê* ‚τῆς περιχώρου, der Herumwohnenden' Luk. 4, 14; *fijandê*, τῶν ἐχθρῶν, der Feinde' Luk. 1, 74; — die Pluraldative *fijandam* ‚ἐχθρῶν, Feinden' Luk. 1, 71; *frijôndam* ‚φίλων, den Freunden' Luk. 15, 29.

Der ausgeprägt substantivische Werth dieser Formen beruht ein-

zig darin, daß sie nicht adjectivisch gebraucht werden, daß sie sich, kann man sagen, zum adjectivischen Gebrauch nicht eignen. Das Adjectiv beschränkt sich im Gegensatz zum Substantiv, was namentlich auch im Griechischen und Lateinischen sehr deutlich heraustritt, auf eine immer geringere Anzahl von Flexionsformen. Da es im Satze so zu sagen mehr zu dienen als zu herrschen hat, so bewegt sichs in gleichmäßigerer, gleichsam gefügigerer Form als das Substantiv. Es giebt daher im Deutschen von den eigenthümlich ausgebildeten auf Nasal ausgehenden, den sogenannten schwach flectirenden Formen abgesehen überhaupt keine adjectivische Grundformen mit auslautenden Consonanten, wie es eben auch jene Participalsubstantive auf *nd* sind.

Eine Ausnahme nur hat sich bezüglich der angeführten Behandlung des präsentischen Particips im Gothischen geltend gemacht. Der männliche Nominativ auf *-nds*, der sich in formeller Beziehung unmittelbar neben die oben aufgeführten substantivisch gebrauchten Participformen stellt, ist ganz gewöhnlich rein participiell oder, können wir auch sagen, adjectivisch gebraucht. Bei einer Gesammtzahl von etwas über zweitausend und einhundert präsentischen Participformen, wie sie in unseren gothischen Denkmälern sich finden, begegnet er allein etwas über achthundert Mal. Substantivischen Werth zeigen dabei nur die folgenden Formen, die sich so also ganz den oben aufgezählten participiellen Casusformen zugesellen: *fijands* ,*ἐχθρός*, Feind' Röm. 8, 7; Gal. 4, 16; Kor. 1, 15, 26; — *frijônds* ,*φίλος*, Freund' Matth. 11, 19; Luk. 7, 34; Joh. 11, 11; 19, 12; — *nasjands* ,*σωτήρ*, Heiland' Luk. 2, 11; Eph. 5, 23; Tim. 1, 4, 10; Johanneserkl. 1, a; 2, a; 2, c; 5, d; — *gibands* ,*δότης*, Geber' Kor. 2, 9, 7; — *daupjands* ,*ὁ βαπτίζων* und *βαπτιστής* Täufer' Mk. 6, 14; Luk. 7, 20; 33; — *allvaldands* ,*παντοκράτωρ*, der Allmächtige' Kor. 2, 6, 18; — *gardavaldands* ,*οἰκοδεσπότης*, Hausherr' Matth. 10, 25; Luk. 14, 21; — *midumônds* ,*μεσίτης*, Mittler' Tim. 1, 2, 5; — *mêrjands* ,*κήρυξ*, Prediger' Tim. 1, 2, 7; 2, 1, 11; — *fraisands* ,*ὁ πειράζων*, Versucher' Thess. 1, 3, 5; — *fraveitands* ,*ἔκδικος*, Rächer' Thess. 1, 4, 6; — *airzjands* ,*ὁ πλάνος*, Verführer' Matth. 27, 63; — *saiands* ,*ὁ σπείρων*, Säemann' Mark. 4, 3; Luk. 8, 5; dafür *saijands* Mark. 4, 14.

Es ist eine beachtenswerthe Uebereinstimmung mit dem Gothischen, daß auch im Littauischen (wie in *áugâs* ,wachsend' aus *áugant-s*; Schleicher Grammatik § 96) und Altbulgarischen (wie in *peky* ,kochend' aus *pekont-s*; Leskien Handbuch § 63) der männliche Singularnominativ im Gegensatz zu fast allen übrigen zugehörigen Casusformen, die aus einer durch suffixales *ja* erweiterten Form gebil-

det wurden, unmittelbar aus der alten participiellen Grundform auf *nt* hervorging.

Außer in den angegebenen Gränzen tritt das präsentische Particip des Gothischen nur in der sogenannten schwachen Flexion, also in einer durch den Nasal erweiterten Form auf, wie *giband-an-* ‚gebend' (Kor. 2, 5, 12), so daß es äußerlich genau entsprechen würde, wenn etwa im Griechischen statt eines Genetivs *φέροντ-ος* ein *φερόντ-ον-ος* oder im Lateinischen statt *ferent-is* ein *ferent-in-is* gebildet wäre. Dabei besteht eben nur die schon angeführte Ausnahme, daß der männliche Singularnominativ in der Regel in der alten Form auf *-nds* auftritt.

Vier Formen nur stehen und zwar jedes Mal in Begleitung des Artikels wieder der angeführten Ausnahme entgegen, nämlich *sa qvimanda* ‚ὁ ἐρχόμενος, welcher kommt' Matth. 11, 3; Mark. 11, 9; Luk. 7, 19; 20; 19, 38; Kor. 2, 11, 4 (*sa qvimands* nur Joh. 3, 31 = Johanneserkl. 4, b); *sa gagganda* ‚ὁ ἐρχόμενος, welcher kommt' Matth. 3, 11 = Johanneserkl. 3, d (daneben *sa gaggands* Luk. 6, 47 und *sa inngaggands* ‚ὁ εἰσερχόμενος, der hineingeht' Joh. 10, 2); *sa brigganda* ‚ἡ ἀπάγουσα, welcher bringt' Matth. 7, 13; 14 und *sa libanda* ‚ὁ ζῶν, der lebende' Joh. 6, 51, die also auch von Grundformen auf *an* ausgingen. Sie beweisen aber nicht etwa, daß durch den Artikel immer die männliche Nominativform auf *anda* hervorgerufen wird, sondern viel häufiger steht auch neben ihm die Form auf *nds*. Es ist nicht ohne Werth, die betreffenden Formen vollständig aufzuführen. Es sind außer den drei bereits genannten (*sa qvimands* Joh. 3, 31 und *sa gaggands* Luk. 6, 47 und *sa inngaggands* Joh. 10, 2), bei denen doch schwerlich an unrichtige Ueberlieferung wird gedacht werden dürfen, die folgenden: *sa visands* ‚ὁ ὤν, welcher ist' Joh. 8, 47; *sa gibands* ‚ὁ δούς, welcher gab' Tim. 1, 2, 6; *sa slahands* ‚ὁ παίσας, welcher schlug' Matth. 26, 68; *sa têkands* ‚ὁ ἁψάμενος, welcher berührte' Luk. 8, 45; 46; *sa hvôpands* ‚ὁ καυχώμενος, welcher sich rühmt' Kor. 2, 10, 17; *sa standands* ‚ὁ παρεστηκώς, welcher steht' Luk. 1, 19; *sa atstandands* ‚ὁ παρεστηκώς, welcher dabei stand' Mark. 15, 39; *sa faurastandands* ‚ὁ προϊστάμενος, welcher vorsteht' Röm. 12, 8; *sa andstandands* ‚ὁ ἀντιτασσόμενος und ἀντικείμενος, welcher widersteht' Röm. 13, 2; Thess. 2, 2, 4; *sa usstandands* ‚ὁ ἀνιστάμενος, welcher aufsteht' Röm. 15, 12; *sa andnimands* ‚ὁ δεχόμενος, welcher aufnimmt' Matth. 10, 40 (2 mal); 41 (2 mal); *sa atsteigands* ‚ὁ καταβάς, der herabgestiegen ist' Joh. 6, 41; *sa gatairands* ‚ὁ καταλύων, welcher zerbricht' Mark. 15, 29; *sa aflêtands* ‚ὁ ἀπολύων, welcher verläßt' Luk. 16, 18; *sa andstaldands* ‚ὁ ἐπιχορηγῶν, welcher darreicht' Kor. 2, 9, 10; *sa gathlaihands* ‚ὁ παρακαλῶν, welcher trö-

stet' Kor. 2, 7, 6; *sa habands* ,ὁ ἔχων,' welcher hat' Luk. 3, 11; *sa armands* ,ὁ ἐλεῶν, welcher sich erbarmt' Röm. 12, 8; *sa matjands* ,ὁ ἐσθίων, welcher ißt' Röm. 14, 3 (2 mal); *sa guthvastjands* ,ὁ βεβαιῶν, welcher befestigt' Kor. 2, 1, 21; *sa mêljands* ,ὁ γράψας, welcher schrieb' Röm. 16, 22; *sa lêvjands*, ὁ παραδιδούς, welcher verrieth' Mark. 14, 42; 44; Joh. 18. 5; dafür *sa galêvjands* Matth. 27; 3; Joh. 18, 2; 19, 11; *sa drôbjands* ,ὁ ταράσσων, welcher beunruhigt' Gal. 5, 10; *sa dailjands* ,ὁ μεταδιδούς, welcher mittheilt' Röm. 12, 8; *sa urraisjands* ,ὁ ἐγείρας, welcher auferweckt' Kor. 2, 4, 14; *sa taujands* ,ὁ ποιῶν und ὁ ποιήσας, welcher thut' Matth. 7, 21; Röm. 10, 5; *sa hausjands* ,ὁ ἀκούσας, welcher hörte' Luk. 6, 49 und dafür *sa gahausjands* Joh. 6, 45; *sa lausjands* ,ὁ ῥυόμενος, welcher erlöst' Röm. 11, 26; *sa galaubjands* ,ὁ πιστεύων, welcher glaubt' Röm. 9, 33; 10, 11; *sa ungalaubjands* ,ὁ ἄπιστος, der ungläubige' Kor. 1, 7, 14; 15.

Da nun die schwache Flexion des deutschen Adjectivs sich überhaupt vorwiegend an den bestimmten Artikel anschließt, so mag auch die Bevorzugung der schwachen Flexion des präsentischen Particips im Gothischen außer in der angegebenen Gränze mit dadurch veranlaßt sein, daß sich das Particip so gern mit dem Artikel verbindet: wir finden es so im Ganzen gegen vierhundert mal in unseren gothischen Texten.

Der Hauptgrund aber für die Bevorzugung der schwachen Flexionsform beim präsentischen Particip des Gothischen ist offenbar doch wieder ein negativer.

Da die kurze ursprüngliche Flexionsform des präsentischen Particips, wie oben gezeigt wurde, substantivischen Werth erhalten hat, so konnte sichs für den adjectivisch lebendigeren Gebrauch des Particips überhaupt nur noch um die schwache, durch *n* charakterisirte, und die starke, durch die Zufügung des pronominellen *ja* gebildete, Form handeln. Die letztere aber war für das alte präsentische Particip überhaupt wenig geeignet, da sie vorwiegend das Attributive bezeichnet, das alte präsentische Particip aber mit seiner noch lebendigeren Kraft nur ausnahmsweise in eigentlich attributivem, das ist fester haftende Eigenschaften bezeichnendem, Gebrauch auftritt.

Es ist auch in den gothischen Denkmälern nur eine verhältnißmäßig sehr geringe Anzahl von Stellen, an denen von einem eigentlich attributiven Gebrauch des präsentischen Particips die Rede sein kann. An mehreren unter ihnen stehen im Griechischen auch gar keine Participformen gegenüber, nämlich in *vulfôs vilvandans* ,λύκοι ἅρπαγες, reißende Wölfe' Matth. 7. 15; *ô kuni ungalaubjandô*, ὦ γενεὰ ἄπιστος, ungläubiges Geschlecht' Mark. 9. 19; Luk. 9, 41; *aban ungalaubjandan* ,ἄνδρα ἄπιστον, einen ungläubigen Ehemann' Kor. 1,

7, 13; *qvên ungalaubjandein* ‚γυναῖκα ἄπιστον, eine ungläubige Ehefrau' Kor. 1, 7, 12; *thiudai unfrathjandein*, ‚ἔθνει ἀσυνέτῳ, unverständigem Volk' Röm. 10, 19; *galaubjandans fraujans* ‚πιστοὺς δεσπότας, gläubige Herren' Tim. 1, 6, 2; *unlingands guth* ‚ἀψευδὴς θεός, der nicht lügende Gott' Tit. 1, 2; *funin unhvapnandin* ‚πυρὶ ἀσβέστῳ, mit nicht erlöschendem Feuer' Luk. 3, 17; *thairh infeinandein armahairtein* ‚διὰ σπλάγχνα ἐλέους, durch sich erbarmende Barmherzigkeit' Luk. 1, 78; *ausôna hausjandôna*, ὦτα ἀκούειν, hörende Ohren' Matth. 11, 15; Mark. 4, 9; 23; 7, 16.

Dazu sind weiter nur etwa noch zu nennen; *gutha libandin* ‚θεῷ ζῶντι, dem lebendigen Gott' Tim. 1, 4, 10; *guthis* [in allen Ausgaben steht die unrichtige Form *guths*] *libandins* ‚θεοῦ ζῶντος, des lebendigen Gottes' Röm. 9, 26; Kor. 2, 3, 3; 2, 6, 16; Tim. 1, 3, 15; *vatins libandins* ‚ὕδατος ζῶντος, lebendigen Wassers' Joh. 7, 38; *klismô klismjandei* ‚κύμβαλον ἀλαλάζον, eine klingende Schelle' Kor. 1, 13, 1; *lukarn brinnandô jah liuhtjandô* ‚ὁ λύχνος ὁ καιόμενος καὶ φαίνων, eine brennende und scheinende Leuchte' Joh. 5, 35; *haurnjans haurnjandans* ‚blasende Hornbläser' ohne griechische Grundlage Matth. 9, 23; *managein auhjôndein* ‚τὸν ὄχλον θορυβούμενον, die lärmende Volksmenge' Matth. 9, 23; *du managein ungalaubjandein jah andstandandein* ‚πρὸς λαὸν ἀπειθοῦντα καὶ ἀντιλέγοντα, zu ungläubigem und widersprechendem Volk' Röm. 10, 21; *valdufnjam ufarvisandam* ‚ἐξουσίαις ὑπερεχούσαις, den höheren Gewalten' Röm. 13, 1; *auhsan thriskandan* ‚βοῦν ἀλοῶντα, einen dreschenden Ochsen' Kor. 1, 9, 9; *auhsin thriskandin* ‚βοῦν ἀλοῶντα, einem dreschenden Ochsen' Tim. 1, 5, 18; *ansts managnandei* ‚ἡ χάρις πλεονάσασα, reichliche Gnade' Kor. 2, 4, 15.

Daß auch für die prädicative Bedeutung des präsentischen Particips im Gothischen von dem männlichen Nominativ abgesehen nur die schwache Flexionsform angewandt wird, wie in *jus saurgandans vairthith* ‚ὑμεῖς λυπηθήσεσθε, ihr werdet trauernd sein' Joh. 16, 20; *vas Iôsêf jah aithei is sildaleikjandôna* ‚ἦν ὁ Ἰωσὴφ καὶ ἡ μήτηρ αὐτοῦ θαυμάζοντες, es waren Joseph und seine Mutter sich verwundernd' Luk. 2, 33 oder *gasaihvand Iêsû gaggandan* ‚θεωροῦσιν τὸν Ἰησοῦν περιπατοῦντα, sie sehen Jesus gehend' Joh. 6, 19, braucht nach dem oben Ausgeführten nur kurz erwähnt zu werden.

Mit einigen Worten aber mag noch darauf hingewiesen sein, in wie eigenthümlicher Weise sich die Geschichte des präsentischen Particips im Deutschen in späterer Zeit entwickelt hat. Während die uns erhaltenen Gothischen Denkmäler, deren Umfang nicht ganz die Hälfte des Umfanges des gesammten neutestamentlichen Textes erreicht, wie schon oben angegeben wurde, etwas über zweitausend und

einhundert präsentische Participformen enthalten, finden sich in Luthers Uebersetzung des Neuen Testamentes nur noch an ungefähr achtzig Stellen präsentische Participformen, die wir auch noch vollständig anführen wollen. Mehr als die Hälfte der Formen findet sich prädicativ gebraucht, was in den gothischen Texten nur bei der verhältnißmäßig geringen Zahl von etwa anderthalb hundert präsentischen Participformen der Fall ist. Es sind nur wenige bestimmte Verbindungen, um die sichs dabei handelt: *ich bin nun sehend* (βλέπω) Joh. 9, 15; 25; *sei sehend* (ἀνάβλεψον) Luk. 18, 42; *wie er aber nun sehend ist* (βλέπει) Joh. 9, 21; *wie ist er denn nun sehend* (βλέπει) Joh. 9, 19; *wir sind sehend* (βλέπομεν) Joh. 9, 41; *und war drei Tage nicht sehend* (ἦν μὴ βλέπων) Apost. 9, 9; *ihre Füße sind eilend* (ὀξεῖς) Röm. 3, 15; *ist aber jemand unwissend, der sei unwissend* (ἀγνοεῖ, ἀγνοείτω) Kor. 1, 14, 38; *die da unwissend sind* (τοῖς ἀγνοοῦσι) Ebr. 5, 2; *welche nicht glaubend waren* (οἱ μὴ πιστεύοντες) Joh. 6, 64; *es waren aber Juden zu Jerusalem wohnend* (ἦσαν κατοικοῦντες) Apost. 2, 5; *wir waren weiland unweise, . . . dienend den Lüsten* (ἦμεν δουλεύοντες) Tit. 3, 3; *diese sind zween Oelbäume und zwo Fackeln stehend vor dem Gott der Erden* (εἰσιν . . . αἱ . . . ἑστῶσαι) Offenb. 11, 4; *daß du wieder sehend werdest* (ἀναβλέψῃς) Apost. 9, 17; *daß er wieder sehend werde* (ἀναβλέψῃ) Apost. 9, 12; *auf daß die da nicht sahen sehend werden* (βλέπωσι) Joh. 9, 39; *ich ward sehend* (ἀνέβλεψα) Joh. 9, 11; *alsbald ward er sehend* (ἀνέβλεψε) Mark. 10, 52; Luk. 18, 43; *ward wieder sehend* (ἀνέβλεψε) Apost. 9, 18; *alsbald wurden ihre Augen wieder sehend* (ἀνέβλεψαν) Matth. 20, 34; *wie er wäre sehend worden* (ἀνέβλεψεν) Joh. 9, 15; *daß er sehend worden wäre* (ἀνέβλεψεν) Joh. 9, 18; *des der sehend war worden* (τοῦ ἀναβλέψαντος) Joh. 9, 18; *Jesus ward gelassen alleine und das Weib im Mittel stehend* (κατελείφθη . . . ἑστῶσα) Joh. 8, 9; *er kam sehend* (βλέπων) Joh. 9, 7; *dein König kommt reitend* (καθήμενος) Joh. 12, 15; *i de Tauben macht er hörend* (ποιεῖ ἀκούειν) *und die Sprachlosen redend* (λαλεῖν) Mark. 7, 37; *sein Wort habt ihr nicht in euch wohnend* (μένοντα) Joh. 5, 38; *hat das ewige Leben bei ihm bleibend* (μένουσαν) Joh. 1, 3, 15; *die der Herr wachend findet* (γρηγοροῦντας) Luk. 12, 37; *auf daß er nicht . . . finde euch schlafend* (καθεύδοντας) Mark. 13, 36; *fand sie schlafend* (καθεύδοντας) Matth. 26, 40; 43; Mark. 14, 37; 40; *fand die Tochter auf dem Bette liegend* (βεβλημένην) Mark. 7, 30; *funden den Menschen . . . sitzend* (καθήμενον) Luk. 8, 35; *darnach sahe ich und siehe eine große Schaar . . . vor dem Stuhl stehend* (ἑστῶτες) Offenb. 7, 9; *als sie ihm nachsahen gen Himmel fahrend* (πορευομένου αὐτοῦ) Apost. 1, 10.

An zwei Stellen (Apost. 7, 32 und 16, 29), die in neueren Aus-

gaben auch ein präsentisches Particip (*zitternd*) enthalten, bietet der echte Luthersche Text vielmehr die Verbindung des Präteritums *ward* mit dem Infinitiv (*ward zittern*), von der Grimm in der deutschen Grammatik (4, 7 und 92) handelt. Weiter aber schienen noch hieher zu gehören: *gehet eilend* (ταχὺ) *hin* Matth. 28, 7; *sie gingen eilend* (ταχὺ) Matth. 28, 8; *komm eilend* (σπούδασον ἐλθεῖν) Tit. 3, 12; *sie kamen eilend* (ἦλθον σπεύσαντες) Luk. 2, 16; *steig eilend hernieder* (σπεύσας κατάβηθι) Luk. 19, 5; *er stieg eilend hernieder* (σπεύσας κατέβη) Luk. 19, 6; *stund sie eilend* (ταχὺ) *auf* Joh. 11, 29 und *daß sie eilend* (ταχέως) *aufstund* Joh. 11, 31; daß das *eilend* dieser Stellen aber schon rein adverbial gedacht ist, machen die Worte *ich habe ihn aber desto eilender* (σπουδαιοτέρως) *gesandt* (Phil. 2, 28) mit ihrer comparativischen Form ganz deutlich.

Dann sind noch anzuführen: *dem ihr unwissend* (ἀγνοοῦντες) *Gottesdienst thut* Apost. 17, 23; *denn ich habs unwissend* (ἀγνοῶν) *gethan* Tim. 1, 1, 13; *derhalben ich auch solchs abwesend* (ἀπὼν) *schreibe* Kor. 2, 13, 10 und *ob ich . . . abwesend* (ἀπὼν) *von euch höre* Phil. 1. 27, an welchen Stellen sichs also nur um die beiden Formen *unwissend* und *abwesend* handelt, denen eine volle participielle Lebendigkeit gar nicht mehr innewohnt. Auf eine weitere Stelle aber, nämlich Joh 8, 59, ist noch besonders aufmerksam zu machen, weil die zweite Hälfte des Satzes *ging zum Tempel hinaus* [*mitten durch sie hinstreichend*] erst in nachlutherischer Zeit und auch in ganz unlutherischer Weise zugefügt worden ist.

Alle noch übrigen Stellen, an denen Luther in seiner Uebersetzung des Neuen Testamentes das präsentische Particip gebraucht hat, zeigen es in attributiven Verbindungen. Wir geben sie auch vollständig: *mit sehenden Augen* (βλέποντες) Matth. 13, 13; 14; Mark. 4, 12; *mit hörenden Ohren* (ἀκούοντες) Matth. 13, 13; Mark. 14, 12; *des umliegenden Landes* (τῆς περιχώρου) Luk. 4, 37; *die umliegenden Länder* (τὴν περίχωρον) Mark. 6, 55; *alle umliegende Länder* (πάσῃ τῇ περιχώρῳ) Luk. 7, 17; *der umliegenden Länder* (τῆς περιχώρου) Luk. 8, 37; *alle umliegende Orte* (ὅλης τῆς περιχώρου) Luk. 4, 14; *von den umliegenden Städten* (τῶν πέριξ πόλεων) Apost. 5, 16; *das glimmende Tocht* (λίνον τυφόμενον) Matth. 12, 20; *ein brennend und scheinend Licht* (ὁ λύχνος ὁ καιόμενος καὶ φαίνων) Joh. 5, 35; *ein tönend Erz* (χαλκὸς ἠχῶν) Kor. 1, 13, 1; *eine klingende Schelle* (κύμβαλον ἀλαλάζον) Kor. 1, 13, 1; *ein verzehrend Feuer* (πῦρ καταναλίσκον) Ebr. 12, 29; *reißende Wölfe* (λύκοι ἅρπαγες) Matth. 7, 15; *der kriechenden Thiere* (ἑρπετῶν) Röm. 1, 23; *der umlaufenden Juden* (τῶν περιερχομένων Ἰουδαίων) Apost. 19, 13. Unmittelbar an schließt sich die vereinzelte Stelle (Röm. 12, 15), an der eine präsentische Parti-

cipform substantivischen Werth angenommen hat: *weinet mit den Weinenden* (μετὰ κλαιόντων).

Es ergiebt sich aus der gegebenen Uebersicht, daß Luther an der Mehrzahl der Stellen sein präsentisches Particip gar keinem griechischen Particip gegenüber stellt, was für die ganze Entwicklungsgeschichte des deutschen Particips um so bedeutsamer ist, als doch der griechische Text des Neuen Testamentes an Participformen überaus reich ist.

An die Betrachtung der Flexion des präsentischen Particips im Gothischen schließen wir in der Kürze auch noch die der gothischen Comparativflexion, da zwischen beiden eine auffällige Uebereinstimmung besteht: die gothischen Comparativformen werden, wie schon oben angeführt wurde, auch nur in einer durch das Bildungselement *an* erweiterten Grundform, also nach der Grimmschen Bezeichnung schwach, flectirt.

Ein beachtenswerther Unterschied aber besteht darin, daß die männliche Nominativform des Comparativs nicht auch unmittelbar aus der alten consonantisch — beim Comparativ auf den Zischlaut — ausgehenden Grundform gebildet wird, sondern nur als auch von der durch Erweiterung gebildeten Grundform auf *an* ausgegangen erscheint, wie zum Beispiel *althiza* ‚der ältere' (Luk. 15, 25), das mit dem sonst entsprechenden lateinischen *altior* (zunächst aus *altiôs*) ‚der höhere' in seinem Ausgang nicht übereinstimmt. Der Grund davon wird wohl zum Theil darauf beruhen, daß ein etwa zu denkendes altes männlichgeschlechtiges **althis* (**althiz*) mit der alten neutralen Accusativform auf *is*, die also noch nicht auf der durch *an* erweiterten Grundform beruht, ganz zusammengefallen sein würde, die sich für das Gothische zum rein adverbiellen Gebrauch entwickelt hat, wie in *hauhis* ‚höher' (Luk. 14, 10) und *airis* ‚früher' (Luk. 10, 13).

Der Grund aber der Beschränkung der gothischen Comparativflexion auf die sogenannte schwache, die durch den Nasal erweiterte, Form ist offenbar ganz der nämliche, den wir oben bei dem präsentischen Particip erkannten. Die Flexion der alten indogermanischen auf den Zischlaut ausgehenden Comparativform wurde aufgegeben, weil ihr consonantischer Ausgang nicht mehr in den Rahmen gothischer oder überhaupt germanischer adjectivischer Bildungen hineinpaßte, die sogenannte starke oder durch das pronominelle *ja* charakterisirte Flexion aber eignete sich wenig für den Comparativ wegen ihres vorwiegend attributiven Charakters, in dem der alte Comparativ schon deshalb kaum begegnen kann, weil er ja begrifflich immer noch einer syntaktischen Ergänzung bedarf, sich also immer etwas freier bewegen muß. Von den gegen hundert in unseren gothischen

Texten begegnenden adjectivischen Comparativformen finden sich auch nur fünf in rein attributivem Werthe gebraucht, nämlich *sô spêdizei airzitha* ‚ἡ ἐσχάτη πλάνη, die spätere Verführung' Matth. 27, 64; *managizô akran*, ‚πλείονα καρπόν, mehr Frucht' Joh. 15, 2; *maizein fravaurht* ‚μείζονα ἁμαρτίαν ‚größere Sünde' Joh. 19, 11; *managizein saurgai* ‚περισσοτέρᾳ λύπῃ, in größerer Traurigkeit' Kor. 2, 7, 7 und *in arbaidim managizeim* ‚ἐν κόποις περισσοτέρως, in mehr Mühsalen' Kor. 2, 11, 23, während auf der anderen Seite zum Beispiel gothische Comparativformen gar nicht selten den Artikel zur Seite haben, durch den, wie schon oben hervorgehoben wurde, im Deutschen überhaupt vorwiegend die sogenannte schwache Flexionsform des Adjectivs hervorgerufen wird. So begegnen *sa maiza* ‚ὁ μείζων, der größere' Röm. 9, 12; *sa minniza* ‚ὁ μικρότερος, der kleinere' Matth. 11, 11; Luk. 7, 28; *thamma minnizin* ‚τῷ ἐλάσσονι, dem kleineren' Röm. 9, 12; *this minnizins* ‚τοῦ μικροῦ, des kleineren' Mark. 15, 40; *sa jûhiza* ‚ὁ νεώτερος, der jüngere' Luk. 15, 12; 13; *sa althiza* ‚ὁ πρεσβύτερος, der ältere' Luk. 15, 25; *thata managizô* ‚τὸ περισσόν, das größere' Matth. 5, 37; *sô spêdizei* ‚ἡ ἐσχάτη, die spätere' Matth. 27, 64; *thaim airizam* ‚τοῖς ἀρχαίοις, den Früheren' Matth. 5, 21; 33; *thizê airizanê* ‚τῶν ἀρχαίων, der früheren' Luk. 9, 8; 19.

Eine ganz besondere Uebereinstimmung der Flexion des präsentischen Particips und des Comparativs zeigt sich noch in der weiblichgeschlechtigen Form. Sie hat im Gegensatz zu der weiblichgeschlechtigen Form der schwach flectirten Adjective, wie zum Beispiel eines *gôdôn* ‚gute' (Tim. 1, 6, 12) neben männlichgeschlechtigem und ungeschlechtigem *gôdan-* ‚gut', nicht gedehntes *ô*, sondern *ei* (= *î*) als charakteristischen Vocal der Endung, wie zum Beispiel *spêdizei* ‚spätere' Matth. 27, 64; *maizein* ‚größere' Joh. 5, 36; 15, 13; 19, 11, oder *qvithandei* ‚sprechende' Matth. 26, 69; Mark. 6, 25 und *sitandeins* ‚sitzende' Matth. 27, 61.

Wir können nicht daran zweifeln, daß dieses das weibliche Geschlecht kennzeichnende *î* (geschrieben *ei*) kein anderes ist, als das in gleichem Werth zum Beispiel auch im Altindischen auftretende *î*, das namentlich an consonantisch auslautende Grundformen und so insbesondere auch an die mit den im Vorausgehenden näher betrachteten gothischen Comparativformen und präsentischen Participformen übereinstimmenden Formen auf *îjans* (*îjas*) oder *jans* (*jas*) und *ant* zur Kennzeichnung des weiblichen Geschlechts anzutreten pflegte, wie zum Beispiel in *návîjasî* oder *návjasî* ‚neuere' oder *bhárantî* ‚tragende'. Mit der letzteren Form stimmt griechisches φέρουσα (aus φέροντ-ια) ‚tragende' genau überein, das im Verein mit den zahlreichen ähnlich gebildeten griechischen Formen es durchaus wahrscheinlich macht,

daß jenes altindische und dann auch gothische *î*, das das weibliche Geschlecht kennzeichnet, aus älterem *iá* hervorging. Der im Gothischen noch zugefügte Nasal aber wird unmittelbar von den zur Seite stehenden männlichgeschlechtigen und ungeschlechtigen Grundformen auf *an*, und gewiß in verhältnißmäßig später Zeit, erst herübergenommen sein.

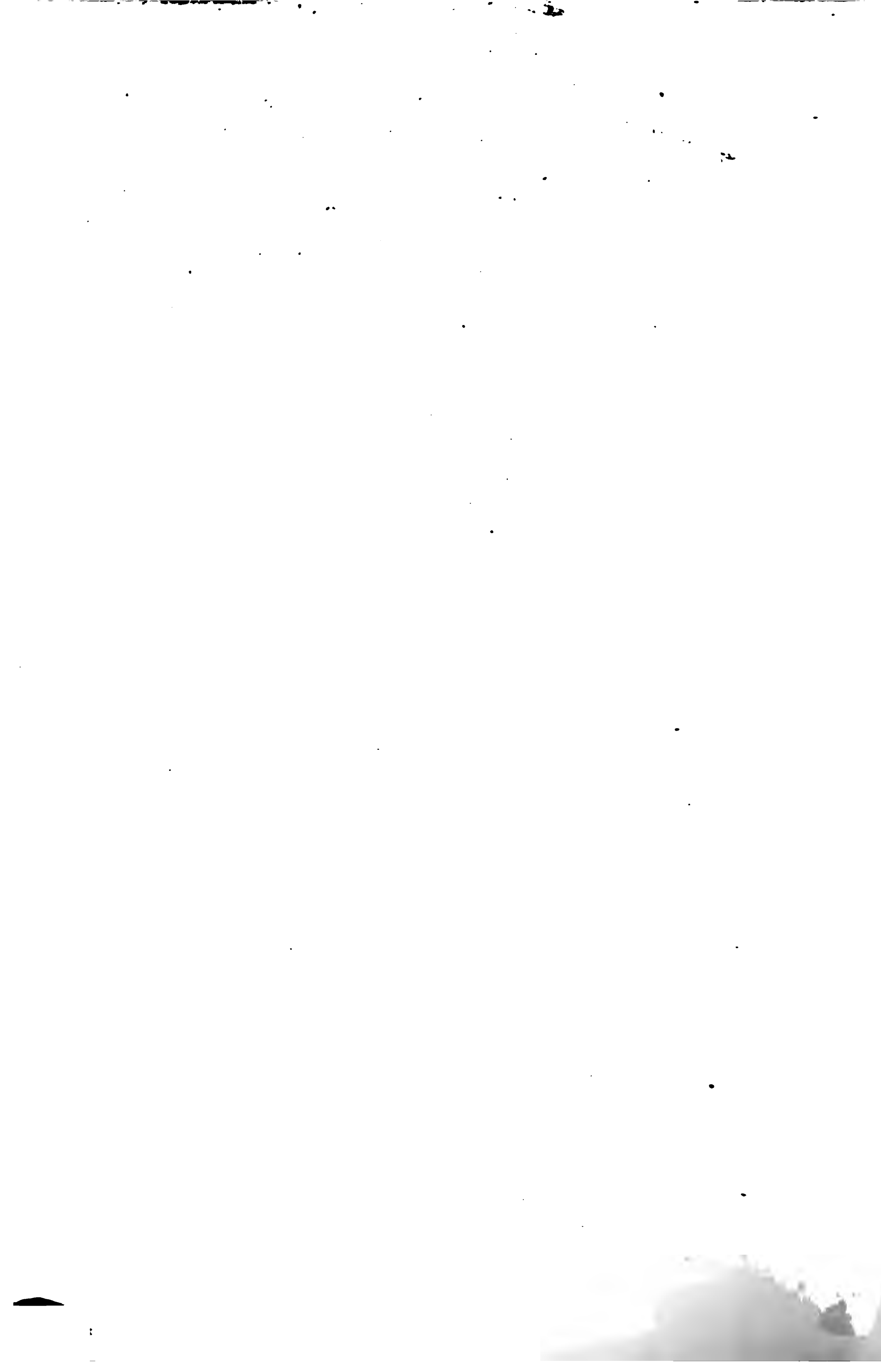
Berichtigung.

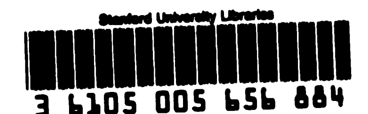
In Henle's Abhandlung »Das Wachsthum des Nagels etc.« Abhandlungen der K. Gesellschaft d. Wissenschaften Bd. XXXI. S. 48 Z. 14 v. u. statt »Eleidin« l. Onychin.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).








Stanford University Libraries
3 6105 005 656 884

